ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор: к. ф. - м. н., доцент
Мукимов Ваниль Рафкатович

Постановка задачи. Определения

Пусть функция у = $f(x)$ отражает количественную сторону некоторого явления. Часто рассматривая это явление, мы не можем непосредственно установить характер зависимости y от x, а можем установить зависимость между величинами x и y и производными от y по x : $y', y'', \ldots, y(n)$, то есть написать дифференциальное уравнение. Из полученной зависимости между переменными x и y и производными требуется установить непосредственно зависимость y от x, то есть найти $y=f(x)$ или, как говорят, проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Пример: С некоторой высоты сброшено тело, масса которого m. Требуется установить, по какому закону будет изменяться скорость r падения этого тела, если на него кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости, с коэффициентом пропорциональности k, то есть требуется найти $r = f(x)$.

Определение: *Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную* x*, искомую функцию* $y = f(x)$ *и ее производные* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение

можно написать так:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0,$$

или

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной неизвестной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Определение: *Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.*

Например, уравнение $y' - 2xy^2 + 5 = 0$ - первого порядка,

$y'' - ky' = \sin x$ - уравнение второго порядка.

Решением, или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$ которая будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если это уравнение можно разрешить y'
относительно , то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y)$$

В этом случае говорят, что дифференциальное уравнение разрешимо относительно производной. Для таких уравнений справедлива теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема: *Если в уравнении* $y' = f(x, y)$ *функция* $y = f(x)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в некоторой области D на плоскости XOY, содержащей некоторую точку* (x_0, y_0)*, то существует единственное решение этого уравнения* $y = \varphi(x)$*, удовлетворяющее условию* $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

Геометрический смысл теоремы: Существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$ график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется начальным условием. Оно часто записывается в виде:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

<u>Определение:</u> *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция*

$$y = \varphi(x, C),$$

которая зависит от одной произвольной постоянной С и удовлетворяет следующим условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной С;

б) каково бы ни было начальное условие $y = y_0$ при $x = x_0$, то есть $y|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = (x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

При этом предполагается, что значения x_0 и y_0 принадлежат к той области изменения переменных х и *у*, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности.

Определение: *Частным решением называется любая функция* $y = \varphi(x, C_0)$, *которая получается из общего решения* $y = \varphi(x, C)$, *если в последнем произвольной постоянной* С *придать определенное значение* С = С₀

Решить, или проинтегрировать дифференциальное уравнение, значит:

а) найти общее решение или общий интеграл, если начальные условия не заданы,

или

б) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям, если таковые имеются.

Уравнение с разделенными и разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y),$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от *x*, на функцию, зависящую только от *y*. Преобразуем его следующим образом, предполагая, что $f_2(y) \neq 0$:

$$\frac{1}{f_2(y)}\, dy = f_1(x)\, dx$$

Интегрируя, левую часть по *y*, а правую по *x*, найдем

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\, dy = \int f_1(x)\, dx + C$$

Мы получили соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, то есть получили общий интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$$

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)dx + C$$

1) дифференциальное уравнения типа

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

называют уравнением с разделенными переменными. Общий интеграл его по доказанному есть

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C,$$

2) уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения первого порядка

Определение: *Функция f(x,y) называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество* $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Пример: Функция $f(x, y) = xy - y^2$ -2 − ого измерения.

Определение: *Уравнение первого порядка*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется однородным относительно x и y, если функция f(x,y) является однородной функцией нулевого измерения относительно x и y.

Линейные уравнения первого порядка

<u>Определение:</u> *Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной.*

Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x),$$

где $P(x)$,$Q(x)$ - заданные непрерывные функции от x (или постоянные). Если, в частности, $Q\equiv 0$, то уравнение $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x),$ имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

Уравнение $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ называется линейным однородным, или без правой части, уравнение $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ - неоднородным.

Уравнения Бернулли и Риккати

Рассмотрим уравнение вида $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции от x, или постоянные, а $n \neq 0$, $n \neq 1$, в противном случае получилось бы линейное уравнение. Уравнение $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}$ называется уравнением Бернулли. Оно приводится к линейному следующим преобразованием: Разделив все члены уравнения на y^{n}, получим

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x).$$

Сделаем замену $z=y^{-n+1}$, тогда

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляя эти значения в уравнение $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x)$ будем

иметь линейное уравнение $\frac{dz}{dx}+(-n+1)Pz=(-n+1)Q.$ Найдя его общий интеграл и подставив вместо *z* выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли

<u>Замечание:</u> Решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций: $y = u(x)v(x)$, где $v(x)$ - какая-либо функция, отличная от 0 и удовлетворяющая уравнению $v'+Pv=0$.

Общее уравнение Риккати имеет вид: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

, где $a(x) \neq 0$.

Уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах.

1) если известно частное решение уравнения Риккати, то все его решения находятся с помощью двух квадратур. Пусть $y_1(x)$ - частное решение. Полагая $y = y_1 + z$

, получим уравнение Бернулли.

Уравнение в полных дифференциалах

Определение: *Уравнение* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *называется уравнением в полных дифференциалах, если M(x,y) и N(x,y) - непрерывно – дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение* $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$,

причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial N}{\partial x}$ *непрерывны в некоторой области.*

Огибающая семейства кривых

Пусть дано уравнение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

где *x*, *y* − переменные декартовы координаты, *С*-параметр, принимающие различные фиксированные значения. При каждом данном значении параметра С $\Phi(x, y, C) = 0,$ уравнение определяет некоторую кривую на плоскости *XOY*. Придавая *С* всевозможные значения, мы получаем семейство кривых, зависящие от одного параметра, или, как часто говорят,

$\Phi(x, y, C) = 0,$ - однопараметрическое семейство кривых. Таким образом, уравнение есть уравнение однопараметрического семейства кривых:

Определение: *Линия L называется огибающей однопараметрического семейства линий, если она в каждой своей точке касается той или иной линий семейства, причем в различных точках линий L ее касается различные линии данного семейства.*

Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

которое имеет общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Определение: *Решение дифференциального уравнения, не получающееся из общего интеграла ни при каком значении С и имеющее своим графиком огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общее решение, называется особым решением дифференциального уравнения.*

Определение: *Точка, в которой нарушается единственность решения дифференциального уравнения, то есть точка, через которую проходят по крайней мере 2 интегральные кривые, называется особой точкой.*

Метод введения параметра. Уравнение Лагранжа и Клеро

Одним из наиболее мощных методов интегрирования является метод введения параметра или, как его еще называют, интегрирование посредством дифференцирования. Суть метода состоит в следующем:

1) Вводится новая переменная (параметр) p по формуле $y' = p$, при этом переменные x и y рассматриваются как функции от p: $x = x(p), y = y(p)$.

2) Уравнение $F(x, y, y') = 0$ приводится к виду $F(x, y, p) = 0$, и полученное уравнение дифференцируем по x или y.

Определение: *Уравнением Лагранжа называется уравнение вида*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

где φ *и* ψ *- известные функции от* $\frac{dy}{dx}$.

Уравнение Якоби

К числу уравнений первого порядка, общее решение которых выражается в элементарных функциях, относится уравнение Якоби. Оно имеет вид

$$(Ax+By+C)dx+(A'x+B'y+C')dy+$$
$$+(A''x+B''y+C'')(xdy-ydx)=0$$

где $A,B,C,A',B',C',A'',B'',C''$ - постоянные.

Ортогональные и изогональные траектории

Пусть имеем однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

<u>Определение:</u> *Линии, пересекающие все кривые данного семейства* $\Phi(x, y, C) = 0$ *под постоянным углом, называются изогональными траекториями. Если же этот угол прямой, то траектории называются ортогональными.*

Уравнение ортогональных траекторий :

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0$$

Уравнение изогональных траекторий :

$$F\left(x, y, -\frac{\frac{dy}{dx} - k}{d\frac{dy}{dx} + 1}\right) = 0$$