Простейшие модели ангармонизма. Нелинейность свободного электрона

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, поляризованную вдоль оси *x* и распространяющуюся вдоль оси *z*:

$$E \equiv E_x(z,t) = H_y(z,t) = \mathrm{Re}\left\{E_1 e^{ikz(t)-i\omega t}\right\},$$

взаимодействующую со свободным электроном плазмы, находящимся в начале координат.

Уравнения движения электрона с учетом силы Лоренца запишутся в виде:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = \frac{e}{m}\left(E_x - \frac{1}{c}\dot{z}H_y\right) = \frac{e}{m}\left(1 - \frac{1}{c}\dot{z}\right)E,$$

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} = \frac{e}{mc}\dot{x}E$$

γ - константа затухания, учитывающая столкновительную релаксацию и излучательные потери

Решение уравнений движения ищем в виде ряда Фурье методом последовательных приближений по амплитуде поля:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)} + \ldots = \mathrm{Re}\left(\mathbf{R}_1 e^{-i\omega t} + \mathbf{R}_2 e^{-i2\omega t} + \ldots\right), \quad \mathbf{R} = \{X, 0, Z\}$$

Нелинейность свободного электрона. Линейное приближение

В первом приближении пренебрегаем членами порядка 1/c, тогда

$$X_1^{(1)} = -\frac{e/m}{\omega^2 + 2i\omega\gamma} E_1, \quad Z_1^{(1)} = 0$$

тогда амплитуда дипольного момента $d_1 = eX_1^{(1)}$

а линейная поляризуемость и линейная восприимчивость

$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2/m}{\omega^2 + 2i\omega\gamma}, \qquad \chi^{(1)} = \alpha N$$

при $\omega >> \gamma$

$$\alpha(\omega) = -\frac{e^2}{m\omega^2} = -r_e \frac{c^2}{\omega^2} = -\frac{1}{4\pi^2} r_e \lambda^2$$

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}$$ классический радиус электрона

! NB линейная поляризуемость:

- отрицательна
- имеет размерность куба
- при энергиях порядка Ридберга $\alpha(\omega) = -4a_0^3$

Нелинейность свободного электрона. Второе приближение

Во втором порядке, в левую часть подставляем $\mathbf{R}_2$, а в правую $\mathbf{R}_1$

тогда сила Лоренца $F_z^{(2)} = \dot{X}^{(1)} E$

имеет компоненту на удвоенной частоте, а амплитуда колебаний в продольном направлении

$$Z_2^{(2)} = \frac{e^2 E_1^2}{8im^2 c\omega(\omega + i\gamma)(\omega + i2\gamma)} \equiv \frac{1}{e} \beta_{zxx} E_1^2$$

квадратичная поляризуемость β_{zxx} связывает амплитуды поля и дипольный момент на удвоенной частоте.

при $\omega >> \gamma$

$$\left|\beta(\omega)\right| = \frac{e^3}{m^2 c\omega^3} = \left(e\lambda/2\pi mc^2\right)\alpha \equiv \alpha/E_{NL}$$

где параметр E_{NL} имеет смысл амплитуды поля, при котором $Z^{(2)} = X^{(1)}$

$$E_{NL} \approx 10^9$$

Нелинейность связанного электрона

Рассмотрим среду в виде совокупности осцилляторов плотностью *N.*
Уравнение движения электрона

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\Gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x+ax^2=F$$

Приложенное поле задано на частотах $\pm\omega_1,\ \pm\omega_2$

$$F=(q/m)\left[E_1\left(e^{-i\omega_1 t}+e^{i\omega_1 t}\right)+E_2\left(e^{-i\omega_2 t}+e^{i\omega_2 t}\right)\right]$$

Наведенная электрическая поляризация $P=Nqx$

При малости ангармонического слагаемого смещение зарядов запишем

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+....$$

В приближении первого порядка

$$x^{(1)}=x^{(1)}(\omega_1)+x^{(1)}(\omega_2)$$

$$x^{(1)}(\omega_n)=\frac{(q/m)E_n}{\left(\omega_0^2-\omega_n^2-i\omega_n\Gamma\right)}e^{-i\omega_n t}$$

Нелинейность связанного электрона. Второй порядок

Подставив в уравнение движения вместо ax^2 результат первого приближения $a\left[x^{(1)}\right]^2$

Тогда в выражении для смещения электрона появляются компоненты на частотах $\omega_1 \pm \omega_2,\ 2\omega_1,\ 2\omega_2,\ 0:$

$$x^{(2)} = x^{(2)}(\omega_1+\omega_2) + x^{(2)}(\omega_1-\omega_2) + $$
$$+ x^{(2)}(2\omega_1) + x^{(2)}(2\omega_2) + x^{(2)}(0)$$

где

$$x^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2) = \frac{-2a(q/m)^2 E_1 E_2}{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1\Gamma\right)\left(\omega_0^2 - \omega_2^2 \mp i\omega_2\Gamma\right)} \times$$
$$\times \frac{1}{\left(\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2 - i(\omega_1 \pm \omega_2)\Gamma\right)} e^{-i(\omega_1 \pm \omega_2)t}$$

$$x^{(2)}(2\omega_n) = \frac{-a(q/m)^2 E_n^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2 - i\omega_n\Gamma\right)^2 \left(\omega_0^2 - 4\omega_n^2 - i2\omega_n\Gamma\right)} e^{-i2\omega_n t}$$

$$x^{(2)}(0) = -\frac{a(q/m)^2}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1\Gamma} + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\omega_2\Gamma}\right)$$

Нелинейность связанного электрона. Второй порядок

Квадратичная поляризация $P^{(2)} = Nqx^{(2)}$

а оценка отношения поляризаций

$$P^{(2)} / P^{(1)} \approx qaE / m\omega_0^4$$

поскольку

$$qE_{at} \approx (m / a)\omega_0^4$$

то

$$P^{(n+1)} / P^{(n)} \approx E / E_{at}$$