Глава 6

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Трёхзначная логика Лукасевича

$x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $\quad x = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{cases}$ $\quad Nx = 1 - x, \quad x \,\&\, y = \min(x, y),$

$x \vee y = \max(x, y), \quad x \Rightarrow y = \min(1, 1 - x + y).$

$N(x \,\&\, y) = 1 - \min(x, y) = \max(1 - x, 1 - y) = (Nx) \vee (Ny),$

но: $x \vee (Nx)$ не всегда истинно.

Трёхзначная логика Гейтинга. В двузначной логике являются тавтологиями как $x \Rightarrow \rceil\rceil x$, так и $\rceil\rceil x \Rightarrow x$. Из предположения, что тавтологией можно считать только формулу $x \Rightarrow \rceil\rceil x$, Гейтинг разработал новую трёхзначную логику:

$x \,\&\, y = \min(x, y), \quad x \vee y = \max(x, y),$

$x \Rightarrow y = 1$, если $x \le y$, $\quad x \Rightarrow y = y$, если $x > y$.

x	*y*	Трёхзначные логики											
		Рейхенбаха				Бочвара				Клини			
		&	∨	⇒	≡	&	∨	⇒	≡	&	∨	⇒	≡
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	½	0	½	1	½	½	½	½	½	0	½	1	½
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
½	0	0	½	½	½	½	½	½	½	0	½	½	½
½	½	½	½	1	1	½	½	½	½	½	½	½	½
½	1	½	1	1	½	½	½	½	½	½	1	1	½
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	½	½	1	½	½	½	½	½	½	½	1	½	½
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рейхенбах построил свою логику для описания явлений квантовой механики. По его Высказывание истинно либо ложно, когда возможно осуществить их проверку. Иначе, высказывание должно оцениваться третьим значением – неопределенно. В логике Рейхенбаха введены три отрицания:

- циклическое отрицание: $\sim A$;
- диаметральное отрицание: $\overline{A}$;
- полное отрицание: $-A$.

A	$\sim A$	$\overline{A}$	$-A$
1	½	0	½
½	0	½	1
0	1	1	1

Выполняется закон тройного отрицания: $\sim(\sim(\sim A)) \sim A$.

Имеет место закон исключённого 4 - го: $A \vee (\sim A) \vee (\sim(\sim A))$ всегда истинно.

КОНЕЧНОЗНАЧНАЯ (K-ЗНАЧНАЯ, $K \geq 2$) ЛОГИКА ПОСТА.

Переменная x может принимать значения: 0, 1 , 2 ,…, k - 1. *Операции*:

1) $\overline{x} = x + 1 \ (mod\ k)$ – цикл. отрицание или отрицание Поста;
2) $Nx = k - 1 - x$ – отрицание Лукасевича;
3) $I_m(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = m, \\ 0, & \text{если } x \neq m, \end{cases}$ $\quad m = 0, 1, \ldots, k - 1.$
4) $x \,\&\, y = \min(x, y)$ – конъюнкция;
5) $x \vee y = \max(x, y)$ - дизъюнкция;
6) $x \times y = x \times y \ (mod\ k)$ – произведение по модулю k;
7) $x + y = x + y \ (mod\ k)$ – сумма по модулю k;
8) $x \Rightarrow y = \begin{cases} k-1, & \text{если } 0 \leq x < y \leq k-1, \\ (k-1) - x + y, & \text{если } 0 \leq y \leq x \leq k-1. \end{cases}$

Теорема. Число различных функций k - значной логики, зависящих от n переменных, равно k^{k^n}.

Теорема (о функциональной полноте, теорема А. В. Кузнецова). Для каждой k - значной логики существует конечное число замкнутых классов $K_1, K_2, \ldots, K_{r(k)}$ таких, что для полноты системы функций k - значной логики $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ необходимо и достаточно, чтобы Φ не содержалась целиком ни в одном из классов $K_1, K_2, \ldots, K_{r(k)}$.

МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА ЛУКАСЕВИЧА

Переменная **x** может принимать одно из значений из T_k:

$T_k = \left\{ 0 = \frac{0}{k-1}, \quad \frac{1}{k-1}, \quad \frac{2}{k-1}, \ \dots, \frac{k-2}{k-1}, \quad \frac{k-1}{k-1} = 1 \right\}.$	(6.1)
$N\,x = 1 - x$; $x \ \&\ y = min\,(x, y)$; $x \vee y = max\,(x, y)$;	(6.2)

$$x \Rightarrow y = min\,(1, 1 + y - x).$$

$L_2, L_3, L_4, \dots$

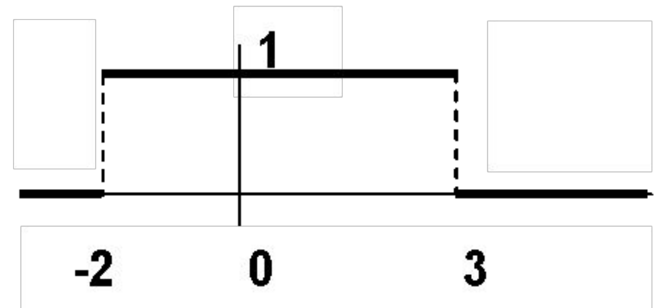
L_∞ - является бесконечнозначной логикой, для которой истинностными значениями являются все рациональные числа единичного отрезка [0,1], а операции вводятся по (6.2).

Логика, в которой истинностными значениями являются $\forall$ числа из [0, 1], а операции вводятся по (6.2), считается стандартной логикой Лукасевича – логикой L_1 .

ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО ПОДМНОЖЕСТВА

Характеристическая функция подмн-ва *A*: $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$

$U = (-\infty, \infty)$, $A = [-2, 3]$, **тогда** $\mu_A(x)$:.



Свойства характеристических функций:

1) $A = B \quad \leftrightarrow \quad \forall x\, (\mu_A(x) = \mu_B(x))$;

2) $\mu_{CA}(x) = 1 - \mu_A(x)$;

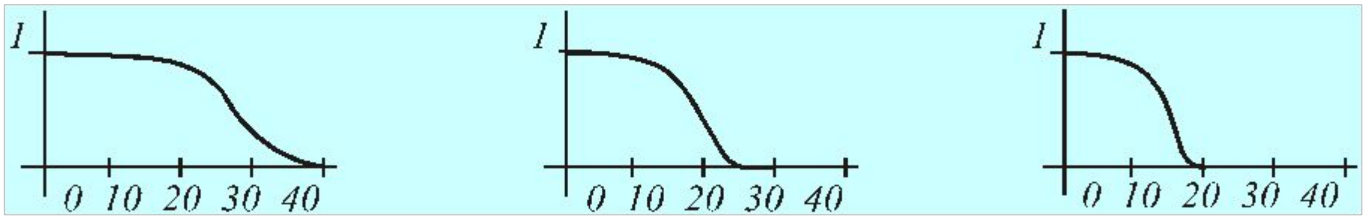
3) $\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \cap B, \\ 0, & \text{если } x \notin A \cap B \end{cases} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$;

4) $\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \cup B, \\ 0, & \text{если } x \notin A \cup B \end{cases} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

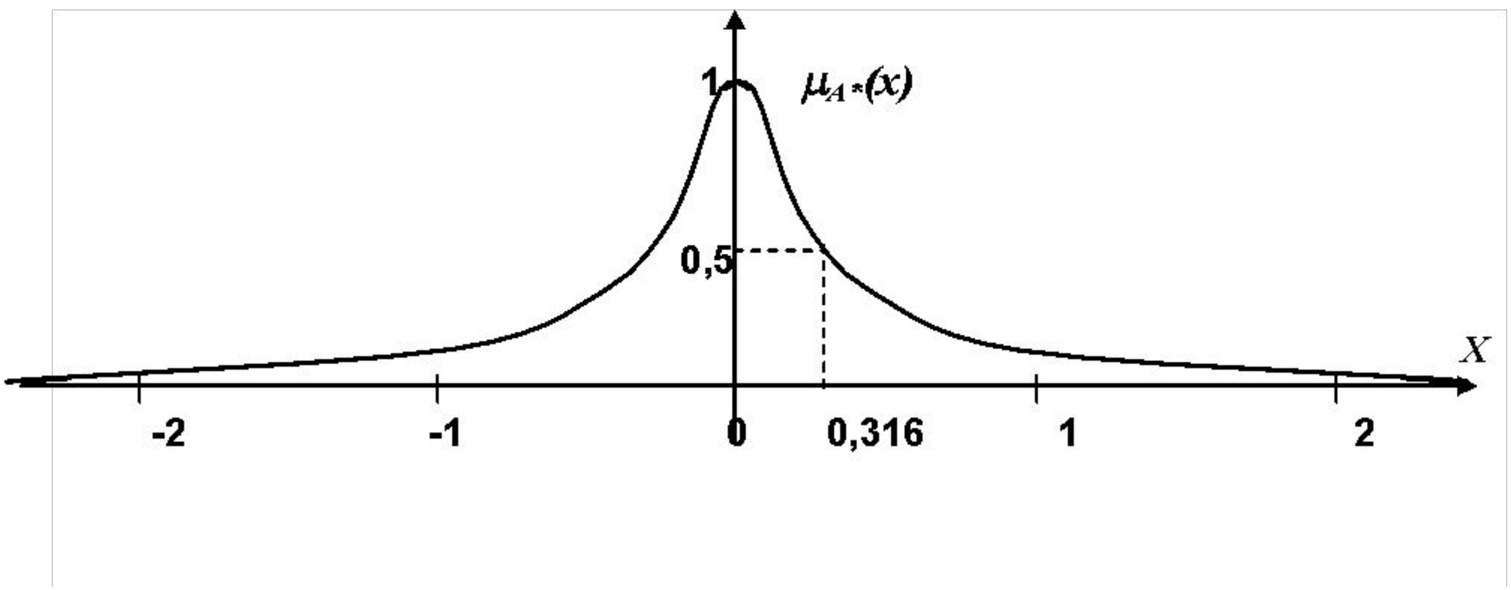
Нечеткое подмножество $A^* = \{ \langle x, \mu_{A^*}(x) \rangle \}$, **где** $x \in U$, $\mu_{A^*}(x) \in [0,1]$;
$\mu_{A^*}(x)$ - ***функция принадлежности***, **а** *U*- ***универсальное множество***.

ПРИМЕРЫ НЕЧЕТКИХ ПОДМНОЖЕСТВ

1. Подмножество молодых людей



2. Нечеткое подмножество *A действительных чисел, очень близких к нулю:** $\mu_{A^*}(x) = \dfrac{1}{1+10x^2}$.



СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ПОДМНОЖЕСТВ

$A^* = B^* \leftrightarrow \forall x \in U: \ \mu_{A^*}(x) = \mu_{B^*}(x).$

$A^* \subseteq B^*: \ \forall x \in U: \ \mu_{A^*}(x) \le \mu_{B^*}(x),$

$\forall x \in U: \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_{A^*}(x)$

$\forall x \in U: \mu_{A^* \cap B^*}(x) = min(\mu_{A^*}(x), \mu_{B^*}(x)),$

$\forall x \in U: \ \mu_{A^* \cup B^*}(x) = max(\mu_{A^*}(x), \mu_{B^*}(x)).$

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ **и** A^* **-** $\mu_{A^*}(x)$. **Тогда:**

$A^* = \mu_1 / u_1 + \mu_2 / u_2 + \ldots + \mu_n / u_n,$ **или** $A^* = \sum_{i=1}^{n} \mu_i / u_i$.

ЗАДАНИЕ НЕЧЕТКОГО ПОДМНОЖЕСТВА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть $U = \{ 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 \}$.

Элементы из *U* (годы)	Нечёткие подмножества		
	A- молодой*	*B*- пожилой*	*старый*
5	1	0	0
10	1	0	0
20	0,8	0,1	0
30	0,5	0,3	0,1
40	0,2	0,5	0,3
50	0,1	0,7	0,5
60	0	1	0,8
70	0	1	1
80	0	1	1
90	0	1	1

Нечёткое подмножество A^* **:**

$A^* = 1/5 + 1/10 + 0{,}8/20 + 0{,}5/30 + 0{,}2/40 + 0{,}1/50.$

$B^* = 0{,}1/20 + 0{,}3/30 + 0{,}5/40 + 0{,}7/50 + 1/60 + 1/70 + 1/80 + 1/90.$

$A^* \cap B^* = 0{,}1/20 + 0{,}3/30 + 0{,}2/40 + 0{,}1/50.$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ПОДМНОЖЕСТВ

Если A^*, B^*, и C^* - нечеткие подмножества то:

1. $\overline{\overline{A}}{}^* = A^*$ – инволютивность;

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ A^*\cup B^* = B^*\cup A^* \\ 3.\ A^*\cap B^* = B^*\cap A^* \end{array}\right\} \text{– коммутативность;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ A^*\cup (B^*\cup C^*) = (A^*\cup B^*) \cup C^* \\ 5.\ A^*\cap (B^*\cap C^*) = (A^*\cap B^*) \cap C^* \end{array}\right\} \text{– ассоциативность;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6.\ A^*\cup (B^*\cap C^*) = (A^*\cup B^*) \cap (A^* \cup C^*) \\ 7.\ A^*\cap (B^*\cup C^*) = (A^*\cap B^*) \cup (A^*\cap C^*) \end{array}\right\} \text{– дистрибутивность;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8.\ A^*\cup \varnothing = A^* \\ 9.\ A^*\cup U = U \\ 10. A^*\cap \varnothing = \varnothing \\ 11. A^*\cap U = A^* \end{array}\right\} \text{– свойства операций с } \varnothing \text{ и } U;$$

Свойства операций для нечетких подмножеств

Если A^*, B^*, и C^* - нечеткие подмножества то:

...

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A^* \cup B^*} = \bar{A}^* \cap \bar{B}^* \\ &\overline{A^* \cap B^*} = \bar{A}^* \cup \bar{B}^* \end{aligned}\right\} \text{ – законы де Моргана;}$$

$$\left.\begin{aligned} &A^* \cup A^* = A^* \\ &A^* \cap A^* = A^* \end{aligned}\right\} \text{ – законы идемпотентности;}$$

$$\left.\begin{aligned} &A^* \cap (A^* \cup B^*) = A^* \\ &A^* \cup (A^* \cap B^*) = A^* \end{aligned}\right\} \boxed{\text{- законы поглощения.}}$$

Для мн-ва U $\mu_U(x) = 1$ при $\forall x \in U$, для $\varnothing$ $\mu_\varnothing(x) = 0$ для $\forall x \in U$.

Но $\exists$ A^* и B^* такие, что: $A^* \cup \bar{A}^* \neq U$ и $B^* \cap \bar{B}^* \neq \varnothing$.

НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

«Число 0,125 очень близко к нулю», «Волга - хорошая машина», «Молодая была уже не молода». Для высказывания «Число 0,125 очень близко к нулю» используем: $\mu_{A^*}(x) = \dfrac{1}{1+10x^2}$. Тогда при x = 0,125:

$$\mu_{A^*}(0,125) = \frac{1}{1+10\times 0.125^2} \approx 0.865.$$

Высказывания нечеткой логики : « x есть A^* », где $x \in U$, A^* – нечеткое подмножество множества U. Полагаем: $v(A^*) = \mu_{A^*}(x)$.

$$v(\neg A^*) = 1 - v(A^*)$$

$$v(A^* \& B^*) = min(v(A^*), v(B^*))$$

$$v(A^* \vee B^*) = max(v(A^*), v(B^*))$$

Или:

$$\mu_{\neg A^*}(x) = 1 - \mu_{A^*}(x);$$

$$\mu_{A^* \& B^*}(x) = \min(\mu_{A^*}(x), \mu_{B^*}(x));$$

$$\mu_{A^* \vee B^*}(x) = \max(\mu_{A^*}(x), \mu_{B^*}(x))$$

ИЗОМОРФИЗМ АЛГЕБР

Структура алгебры	$A = \langle U; \bar{\ }, \cap, \cup \rangle$ - **алгебра подмножеств множества** A	$B = \langle V; \rceil, \&, \vee \rangle$ - **алгебра высказываний**
Основное множество	U – **множество подмножеств множества** A	V - **множество высказываний**
Выделенные элементы из основного множества	$\varnothing$	Π- **противоречие**
	A	T-**тавтология**
Операции	$(\ \bar{\ }\ )$ – **дополнение**	$\rceil$- **отрицание**
	$\cap$ - **пересечение**	$\&$ - **конъюнкция**
	$\cup$ - **объединение**	$\vee$ - **дизъюнкция**

Существует изоморфизм между стандартной логикой Лукасевича L_1 (с максиминными операциями) и алгеброй нечётких подмножеств с операциями дополнения, пересечения и объединения.

t - НОРМЫ И *t* – КОНОРМЫ

***t* – норма** - бинарная операция t: $[\,0, 1\,] \times [\,0, 1\,] \to [\,0, 1\,]$:

1) коммутативности: $a\ t\ b = b\ t\ a$;
2) ассоциативности: $(a\ t\ b)\ t\ c = a\ t\ (b\ t\ c)$;
3) монотонности: если $b \le c$, то $a\ t\ b \le a\ t\ c$.
4) граничным условиям: $a\ t\ 1 = a$; $a\ t\ 0 = 0 \quad \forall a \in [\,0, 1\,]$.

$a\ t_1\ b = \min(a, b)$; $\qquad a\ t_2\ b = a\,b$;

$a\ t_3\ b = \max(0, a + b - 1)$ – *t* – норма Лукасевича и …

***t* – конорма** - бинарная операция s: $[\,0, 1\,] \times [\,0, 1\,] \to [\,0, 1\,]$:

1) коммутативности: $a\ s\ b = b\ s\ a$;
2) ассоциативности: $(a\ s\ b)\ s\ c = a\ s\ (b\ s\ c)$;
3) монотонности: если $b \le c$, то $a\ s\ b \le a\ s\ c$.
4) граничным условиям: $a\ s\ 1 = a$; $a\ s\ 0 = 0 \quad \forall a \in [\,0, 1\,]$.

$a\ s_1\ b = \max(a, b)$; $\qquad a\ s_2\ b = a + b - a\,b$;

$a\ s_3\ b = \min(a + b, 1)$ – *t* – конорма Лукасевича и …

ИМПЛИКАЦИЯ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Существует > 40 вариантов нечеткой импликации:

импликация Лукасевича: $\mu_{A^*\Rightarrow B^*}(x) = \max(1 - \mu_{A^*}(x), \mu_{B^*}(x))$;

правило Мамдани: $\mu_{A^*\Rightarrow B^*}(x, y) = \min(\mu_{A^*}(x), \mu_{B^*}(y))$;

ПОНЯТИЕ О НЕЧЕТКОЙ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Лингвистической **называется переменная, значениями которой являются слова или предложения естеств. или искусственного языка.**

(X, T(X), U, G , M), где

X **- название лингвистической переменной,**

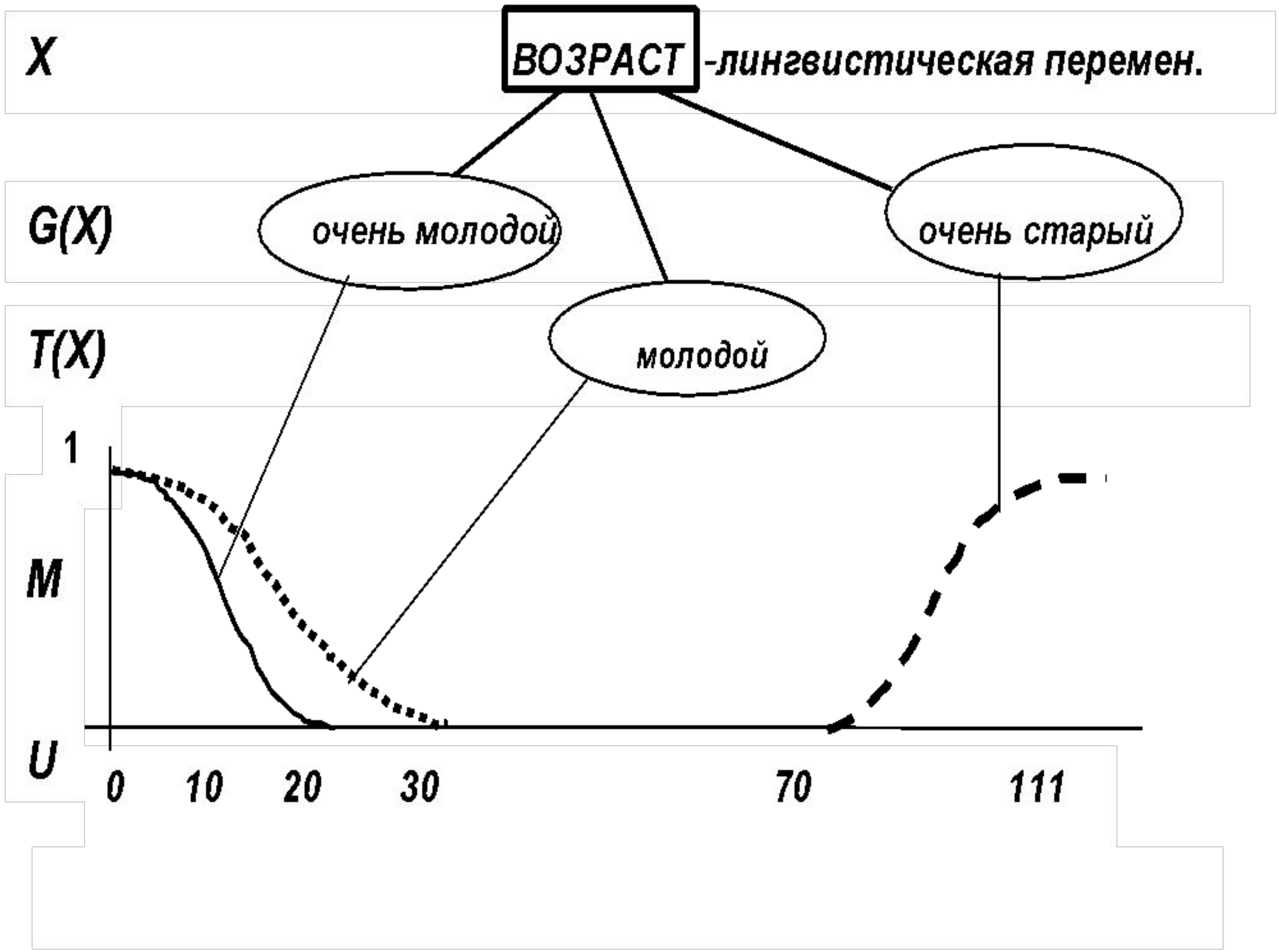
T(X) **- множество лингвистических значений переменной *X*,**

U **- универсальное множество,**

G **- синтаксические правила, порождающие значения переменной, т.е. правила определения лингвистических значений,**

M **- семантические правила, которые ставят в соответствие каждому значению переменной ее смысл, т.е. характеристическую функцию.**

ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ «ВОЗРАСТ»



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Модальности: ***«необходимость», «возможность», «доказано»***, ***«не доказано»***, ***«запрещено»***, ***«разрешено»***, ***«всегда»***, ***«иногда»*** и т.п.

Модальные логики являются расширением обычной логики. В них кроме $\neg$, $\vee$, $\&$, $\Rightarrow$, $\equiv$, $\forall x$ и $\exists x$ вводятся операторы : $\Box$ и $\Diamond$ (« $\Box$ *p* » - «необходимо, что *p* » или « доказано, что *p* », или « разрешено *p* »).

Модели Крипке

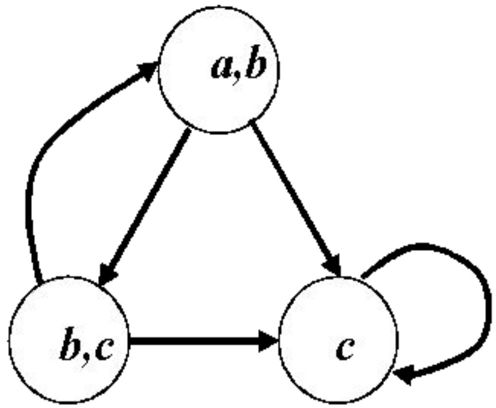
P – множество (атомарных) высказываний.

Моделью Крипке над множеством *P* высказываний наз-ся система: $M = (S,R,L)$, где

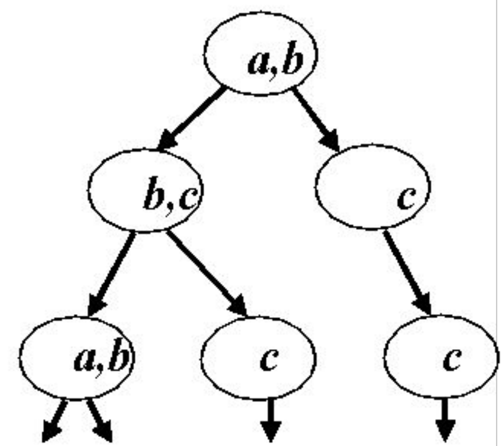
1) S - конечное множество состояний;
2) R - бинарное отношение переходов: для $\forall\ s \in S$ должно $\exists\ s^* \in S$, что $s\ R\ s^*$;
3) L: $S \rightarrow 2^{P}$ - функция, которая помечает каждое состояние множеством атомарных высказываний, истинных в этом состоянии.

Последовательность $\pi = s_0\ s_1\ s_2 \ \ldots$ - путь в модели Крипке из состояния s_0, если для всех i, $i \geq 0$, $\langle s_i , s_{i+1} \rangle \in R$.

МОДЕЛИ КРИПКЕ



Граф переходов
или модель Крипке



Бесконечное дерево,
развернутое из графа
переходов

К модели Крипке могут быть сведены:

- **булевы схемы;**
- **последовательные и параллельные программы.**

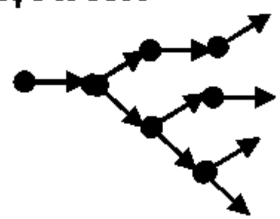
Модели Крипке используются для описания программ, а темпоральные логики для описания требований к ним (спецификации программ).

ВРЕМЕННЫЕ (ТЕМПОРАЛЬНЫЕ) ЛОГИКИ

Временные (темпоральные) логики **вводят понятия *«было», «есть», «будет» («раньше», «одновременно», «позже»)*.**

Темпоральные логики являются модальными логиками, они получаются добавлением к алгебре высказываний новых операторов отражающих временные свойства.

Темпоральные логики классифицируются в соответствии с тем, является ли структура времени *линейной* или *ветвящейся*.



Темпоральная логика деревьев вычислений CTL*

Обозначение *CTL* - «Computational Tree Logic».

***Кванторы пути*: A: *«выполнено для всех путей (вычислений)»*;**

E: *«выполнено для некоторых путей (вычислений)»*.

***Темпоральные операторы*: X: *«в следующий момент времени»* ;**

G: *«когда-то в будущем»*;

F: *«всегда, повсюду»*.

ВРЕМЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

U: - *«до тех пор пока»*.; R: - ***«высвободить»***.

Обозначения X, F, G, U, R получены из слов «neXttime», «Future», «Generally» («Globally»), «Until» и «Release» соответственно.

P **множество (атомарных) высказываний.**

Формулы состояния логики CTL*:

- **если $p \in P$, то p - формула состояния (ф.с.);**
- **если f и g - ф.с., то $\neg f$, $f \& g$ и $f \vee g$ - ф.с.;**
- **если f - формула пути, то E f и A f - ф.с..**

Формула пути логики CTL*:

- **если f - ф.с., то f - формула пути;**
- **если f и g - ф.с., то $\neg f$, $f \& g$, $f \vee g$, X f, F f, G f, f U g, f R g – форм. пути.**

Запись M , $s \models f$ означает, что ф. с. f выполнена на модели M со стартовой вершиной s.

Из десяти операторов $\neg$, &, $\vee$, A, E, X, F, G, U, R можно оставить: например: $\neg$, $\vee$, E, X, U, а остальные выражаются через них:

$f \& g \sim \neg(\neg f \vee \neg g)$; $f \text{ R } g \sim \neg(\neg f \text{ U } \neg g)$; $\text{F} f \sim \text{True U} \neg f$; $\text{G} f \sim \neg \text{F} \neg f$; $\text{A}f \sim \neg \text{E} \neg f$.

ТЕМПОРАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ *CTL* И *LTL*

Логика деревьев вычислений *CTL* представляет собой фрагмент *CTL**, в которой ∀ темпоральный оператор X, F, G, U и R должен следовать непосредственно за квантором пути, при этом формулы пути определяются только одним условием:

если *f* и *g* - ф.с., то X *f*, F *f*, G *f*, *f* U *g* и *f* R *g* - формулы пути.

Линейная темпоральная логика *LTL* состоит из всех формул вида A *f*, где *f* формула пути, в которой все формулы состояния – это атомарные высказывания.

Типичными *CTL* формулами, возникающими при верификации систем параллельных программ с конечным числом состояний, будут, например, следующие:

EF (*Start* & ¬*Ready*): можно достичь такого состояния, в котором условие *Start* выполняется, а *Ready* - нет;

AG (*Req* → AF *Ack*) : если получен запрос, то рано или поздно он будет подтвержден;

AG (EF *Restart*): из ∀ состояния достижимо состояние *Restart.*

ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММ

Модели Крипке используются для описания программ.

Темпоральные логики для описания требований к ним (спецификации программ).

Основная проблема эффективных алгоритмов верификации состоит в экспоненциальном росте числа состояний в модели Крипке.

На начальном этапе системы верификации были способны проверять системы, содержащие примерно 10^5 состояний. В настоящее время, внесенные улучшения в технологию верификации, позволяют расширить границы по числу состояний до 10^{120}.