# Лекция № 7. (20.03.15)
# КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Свободные гармонические колебания и их характеристики.
2. Уравнение гармонических колебаний. Гармонический осциллятор.
3. Энергия гармонических колебаний.
4. Маятники.
5. Сложение гармонических колебаний.

***Рожденный пустыней,***
***Колеблется звук,***
***Колеблется синий***
***На ветке паук.***
***Колеблется воздух,***
***Прозрачен и чист,***
***В сияющих звездах***
***Колеблется лист.***

# 1. Свободные гармонические колебания и их характеристики.

$$s = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{7.1}$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{7.2}$$

где $\boldsymbol{x}$ − линейное отклонение материального объекта от положения равновесия; $\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi/T_0}$ − собственная циклическая частота.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{7.3}$$

## 2. Уравнение гармонических колебаний. Гармонический осциллятор.

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad \textbf{(7.4)}$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi). \quad \textbf{(7.5)}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0. \quad \textbf{(7.6)}$$

Уравнение (7.6) – ***дифференциальное уравнение гармонических колебаний.***

Его решение:

$$s = A\cos(\omega t + \varphi)$$

(или с учетом *формулы Эйлера* для комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \textbf{(7.7)}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица)

$$\tilde{s} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}. \quad \textbf{(7.8)}$$

# 2. Уравнение гармонических колебаний. Гармонический осциллятор.

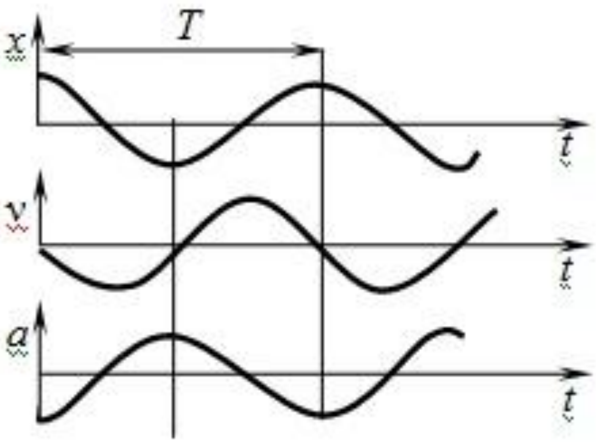


**Рис. 7.1.**

$$F = ma = mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x. \quad \textbf{(7.10)}$$

$$F_x = ma_x = -kx \quad \Rightarrow \quad k = m\omega_0^2. \quad \textbf{(7.11)}$$

где $k$ – коэффициент пропорциональности.

$$\Downarrow$$

Сила, действующая на частицу, совершающую гармонические колебания, является квазиупругой и называется *возвращающей силой*, т. к. пропорциональна смещению материальной точки и направлена в сторону, противоположную смещению (к положению равновесия (при $x = 0$, $F_x = 0$ – это положение равновесия точки)).

*Гармоническим (линейным) осциллятором* называется система, совершающая колебания под действием возвращающей силы и описываемые дифференциальным уравнением (7.6).

*Собственная частота осциллятора*:

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{(k / m)}. \quad \textbf{(7.12)}$$

# 3. Энергия гармонических колебаний.

*Кинетическая энергия* линейного осциллятора:

$$K = m\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m}{4}A^2\omega_0^2[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \quad \textbf{(7.13)}$$

*Потенциальная энергия* осциллятора:

$$\Pi = \int_x^0 F_x dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m}{4}A^2\omega_0^2[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \quad \textbf{(7.14)}$$

*Полная механическая энергия* осциллятора сохраняется:

$$E = K + \Pi = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = const. \qquad \textbf{(7.15)}$$

Т. к. $\left\langle \cos^2\varphi \right\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\varphi)\, d\varphi = \dfrac{1}{2}$ **(7.16)**

тогда $\left\langle K \right\rangle = \left\langle \Pi \right\rangle = \dfrac{1}{4}mA^2\omega_0^2 = E/2.$ **(7.17)**

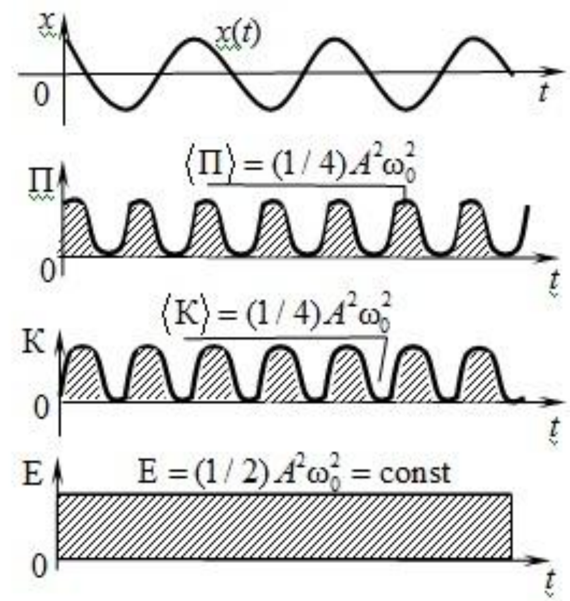


**Рис. 7.2.**

# 4. Маятники.

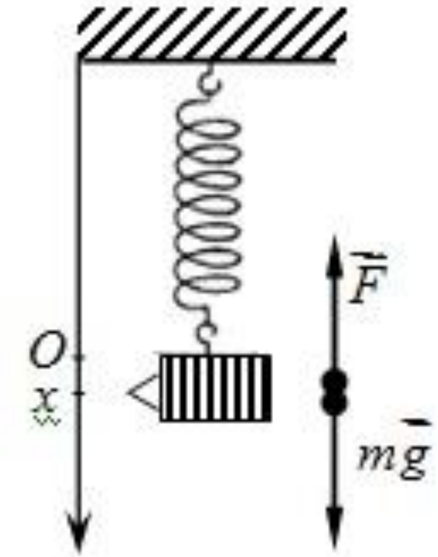


**Рис. 7.3.**

*Пружинный маятник* – это груз массой $m$, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F$ (рис. 7.3):

$$F = -kx,$$

где $k$ – жесткость пружины.

*Уравнение движения* маятника:

$$m\ddot{x} = -kx \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad \textbf{(7.18)}$$

$$\Downarrow (7.6)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \text{ где } \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{(k/m)}.$$

*Потенциальная энергия пружинного маятника*:

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2}. \qquad \textbf{(7.19)}$$

# 4. Маятники.

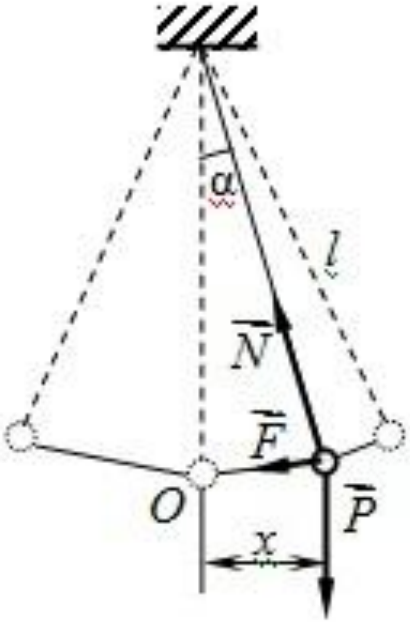


**Рис. 7.4.**

*Математическим маятником* называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой $m$, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной $l$, и колеблющейся под действием силы тяжести без трения (рис. 7.4).

*Возвращающая сила*:

$$F = P\sin\alpha \approx mg\alpha = mg\frac{x}{l}. \quad x \approx l\alpha \qquad \textbf{(7.20)}$$

*Уравнение движения*:

$$m\ddot{x} = -F = -mg\frac{x}{l} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0. \qquad \textbf{(7.21)}$$

$$\Downarrow\ x = A\cos(\omega t + \varphi)\text{, где}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad \textbf{(7.22)}$$

# 4. Маятники.

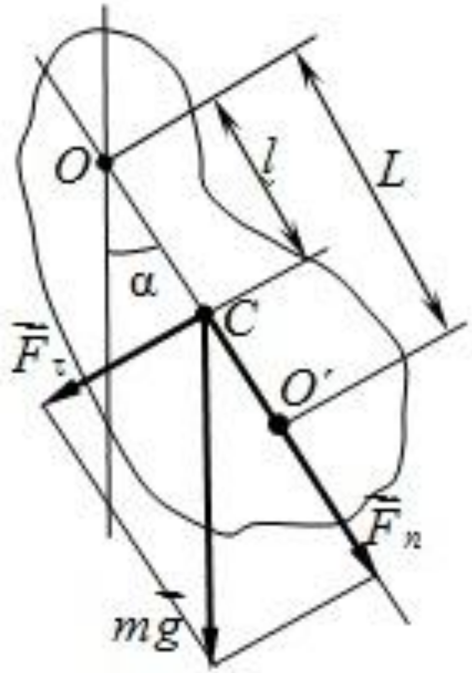


**Рис. 7.5.**

*Физическим маятником* называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела (рис. 7.5).

*Момент возвращающей силы*:

$$M = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha\,, \qquad \textbf{(7.23)}$$

где $l$ − расстояние между *точкой подвеса* и *центром масс C маятника*; $F_\tau = -mg\sin\alpha$ – *возвращающая сила*.

С учетом ОУДВД

$$I_x \frac{d\omega}{dt} = -mgl_0\alpha\,. \qquad \textbf{(7.24)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl_0}{I_x}\alpha = 0\,. \qquad \textbf{(7.25)}$$

# 4. Маятники.

Решение уравнения (7.25):

$$\alpha = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),\ \omega_0 = \sqrt{mgl_0 / I_x}\,. \qquad \textbf{(7.26)}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{mgl_0}}\,. \qquad \textbf{(7.27)}$$

*Приведенная длина* физического маятника $L$:

$$L = \frac{I_x}{ml_0}\,. \qquad \textbf{(7.28)}$$

*Приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,. \qquad \textbf{(7.29)}$$

Точка $O'$ на продолжении прямой $OC$, отстоящая от оси подвеса на расстояние приведенной длины $L$, называется *центром качаний физического маятника*.

# 5. Сложение гармонических колебаний.

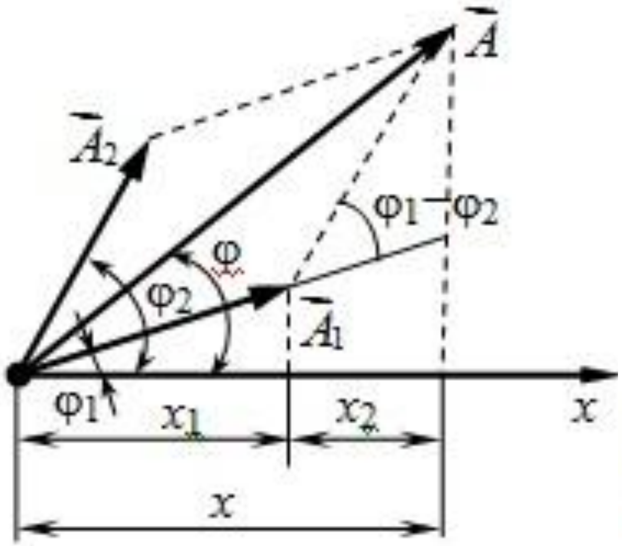


**Рис. 7.6.**

Для сложения двух прямолинейных одинаково направленных колебаний $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ используем *метод вращающегося вектора амплитуды* – *метод векторных диаграмм* (рис. 7.6).

Уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда $A$ и начальная фаза $\varphi$ задаются соотношениями:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),\ tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \quad \textbf{(7.30)}$$

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi,\ (m = 0,1,2,\dots), \quad \Rightarrow A = A_1 + A_2. \\ \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi,\ (m = 0,1,2,\dots), \quad \Rightarrow A = |A_1 - A_2|. \end{array}\right\} \quad \textbf{(7.31)}$$

Если изучение физики порождает: беспокойство, замешательство, страх, уныние или негодование, то это привычное с детства отношение к возникшим трудностям !!!

Надо *незамедлительно* заменить на прямо противоположное и проблема начнет решаться быстро и легко…

# Лекция окончена!!!