Теория систем и системный анализ

Тема 6. Состояние и функционирование систем

Карасев Е.М.,
2014

План лекции

1. Состояние системы
2. Статические и динамические свойства динамических систем
3. Пространство состояний
4. Устойчивость динамических систем
5. Выводы

1. Состояние системы

Система создается для того, чтобы получить желаемые значения (состояния) ее целевых выходов.

Состояние выходов системы зависит от:

- значений(состояния) входных переменных;
- начального состояния системы;
- функции системы.

Одна из основных задач системного анализа: **установление причинно-следственных связей выходов системы с ее входами и состоянием.**

1. Состояние системы. Оценка состояния

Состояние системы в определенный момент времени это множество ее существенных свойств в этот момент времени.

При описании состояния системы нужно говорить о:

- состоянии входов;
- внутреннем состоянии;
- состоянии выходов системы.

1. Состояние системы. Оценка состояния

Состояние входов системы представляется вектором значений входных параметров: $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и фактически является отражением состояния окружающей среды.

Внутреннее состояние системы представляется вектором значений ее внутренних параметров (*параметров состояния*): $Z=(z_1, z_2, \ldots, z_v)$ и зависит от состояния входов X и начального состояния системы Z_0:

$$Z = F(Z_0, X).$$

1. Состояние системы. Оценка состояния

Внутреннее состояние практически ненаблюдаемо, но его можно оценивать по **состоянию выходов** (значениям выходных переменных) системы $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ благодаря зависимости $Y = F_2(Z)$.

При этом следует говорить о выходных переменных в широком смысле: в качестве координат, отражающих состояние системы, могут выступать не только сами выходные переменные, но и характеристики их изменения: скорость, ускорение и т.д.

1. Состояние системы. Оценка состояния

Таким образом, внутреннее состояние системы *S* в момент времени *t* может характеризоваться множеством значений ее выходных координат и их производных в этот момент времени:

$$S_t=\{Y_t, Y'_t, Y''_t, \ldots\}.$$

Однако необходимо заметить, что выходные переменные не полностью, неоднозначно и несвоевременно отражают состояние системы.

1. Состояние системы. Процесс

Если система способна переходить из одного состояния в другое (например, S_1->S_2->S_3->…), то говорят, что она обладает **поведением** и в ней происходит **процесс**.

Процесс – это последовательная смена состояний.

В случае непрерывной смены состояний имеем: $P=S(t)$, а в дискретном случае: $P=\{S_{t1}, S_{t2}, \ldots, \}$.

1. Состояние системы. Процесс

По отношению к системе можно рассматривать два вида процессов:

- ***внешний процесс*** – последовательная смена воздействий на систему, т.е. последовательная смена состояний окружающей среды;
- ***внутренний процесс*** – последовательная смена состояний системы, которая наблюдается как процесс на выходе системы.

1. Состояние системы. Статические и динамические системы

Статическая система – это система, состояние которой практически не изменяется в течении определенного периода ее существования.

Динамическая система – это система, изменяющая свое состояние во времени.

Уточняющее определение: система, переход которой из одного состояния в другое совершается не мгновенно, а в результате некоторого процесса, называется динамической.

1. Состояние системы. Функция системы

Свойства системы проявляются не только значениями выходных переменных, но и ее функцией, поэтому определение функций системы является одной из основных задач ее анализа и проектирования.

Понятие функции имеет разные определения: от общефилософских до математических.

1. Состояние системы. Функция системы

Общефилософское понятие.

Функция – внешнее проявления свойств объекта.

Система может быть одно- и многофункциональной.

В зависимости от степени воздействия на внешнюю среду и характера взаимодействия с другими системами, функции можно распределить по возрастающим рангам:

1. пассивное существование, материал для других систем;
2. обслуживание системы более высокого порядка;
3. противостояние другим системам, среде;
4. поглощение (экспансия) других систем и среды;
5. преобразование других систем и среды.

1. Состояние системы. Функция системы

Математическое понятие.

Элемент множества E_y произвольной природы называется функцией элемента x, определенной на множестве E_x произвольной природы, если каждому элементу x из множества E_x соответствует единственный элемент y из E_y.

1. Состояние системы. Функция системы

Кибернетическое понятие.

Функция системы это способ (правило, алгоритм) преобразования входной информации в выходную.

Функцию динамической системы можно представить логико-математической моделью, связывающей входные (*X*) и выходные (*Y*) координаты системы, - моделью «вход-выход»: $Y=F(X)$, где *F* – оператор, называемый алгоритмом функционирования.

1. Состояние системы. Функция системы

В кибернетике широко используется понятие «черный ящик» - кибернетическая модель, в которой не рассматривается внутренняя структура объекта (либо о ней ничего не известно). В этом случае о свойствах объекта судят только на основании анализа его входов и выходов.

Иногда применяется понятие «серый ящик», когда о внутренней структуре объекта все же что либо известно.

Задачей системного анализа как раз и является «осветление» ящика – превращение черного в серый, а серого – в белый.

1. Состояние системы. Функционирование системы

Функционирование рассматривается как процесс реализации системой своих функций. С кибернетической точки зрения:

Функционирование системы – это процесс переработки входной информации в выходную.

Математически функционирование системы можно записать так:

$$Y(t) = F(X(t)),$$

т.е. функционирование системы описывает, как меняется состояние системы при изменении состояния ее входов.

1. Состояние системы. Состояние функции системы

Функция системы является ее свойством, поэтому можно говорить о состоянии системы в заданный момент времени, указывая ее функцию, которая справедлива в этот момент времени.

Таким образом, состояние системы можно рассматривать в двух разрезах:

- состояние ее параметров и
- состояние ее функции, которая в свою очередь зависит от состояния структуры и параметров:

$$S_t=\{A_t, F_t\} =\{A_t, \{St_t, A_t\}\}$$

1. Состояние системы. Состояние функции системы

Систему называют **стационарной**, если ее функция практически не изменяется в течение определенного периода ее существования.

Для стационарной системы реакция на одно и то же воздействие не зависит от момента приложения этого воздействия.

Систему считают **нестационарной**, если ее функция изменяется со временем.

Нестационарность системы проявляется различными ее реакциями на одни и те же возмущения, приложенные в разные периоды времени. Причины нестационарности системы лежат внутри нее и заключаются в изменении функции системы: структуры (*St*) и/или параметров (*A*).

1. Состояние системы. Состояние функции системы

Стационарность системы в узком смысле:

Стационарной называют систему, все внутренние параметры которой не изменяются во времени.

Нестационарная система – это система с переменными внутренними параметрами.

1. Состояние системы. Режимы динамической системы

Равновесный режим (равновесное состояние, состояние равновесия) – это такое состояние динамической системы, в котором она может находиться сколь угодно долго в отсутствии внешних возмущающих воздействий или при постоянных воздействиях.

Замечание: для экономических и организационных систем понятие» равновесие» применимо достаточно условно.

1. Состояние системы. Режимы динамической системы

Под **переходным режимом (процессом)** понимается процесс движения динамической системы из некоторого начального состояния к какому-либо ее установившемуся режиму – равновесному или периодическому.

Периодическим режимом называется такой режим, когда система через равные промежутки времени приходит в одни и те же состояния.

2. Статические и динамические свойства динамических систем

По признаку учета зависимости объекта моделирования от времени различают статические и динамические характеристики систем, отражаемые в соответствующих моделях.

Статические модели (модели статики) отражают функцию системы – конкретное состояние реальной или проектируемой системы или соотношение ее параметров, которые со временем не меняются.

2. Статические и динамические свойства динамических систем

Динамические модели (модели динамики) отражают функционирование системы – процесс изменения состояний реальной или проектируемой системы. Они показывают различия между состояниями, последовательность смены состояний и развитие событий с течением времени.

Основное отличие статических и динамических моделей заключается в учете времени: в статике его как бы не существует, а в динамике – это основной элемент.

2.1 Статические характеристики систем

В узком смысле к статической характеристике системы можно отнести ее структуру. Однако чаще интересуют свойства системы по преобразованию входов в выходы в установившемся режиме, когда отсутствуют изменения как входных, так и выходных переменных. такие свойства определяются как статические характеристики.

Статическая характеристика – это зависимость между входной и выходной величинами в установившемся режиме.

Статическая характеристика может быть представлена математической или графической моделью.

2.2 Динамические характеристики систем

Динамическая характеристика – это реакция системы на возмущение (зависимость изменения выходных переменных от входных и от времени).

Динамическая характеристика может быть представлена:

- математической моделью в виде дифференциального уравнения (или системы уравнений) вида: $$\frac{dy}{dt} = F(y(t), x(t))$$

2. Динамические характеристики систем

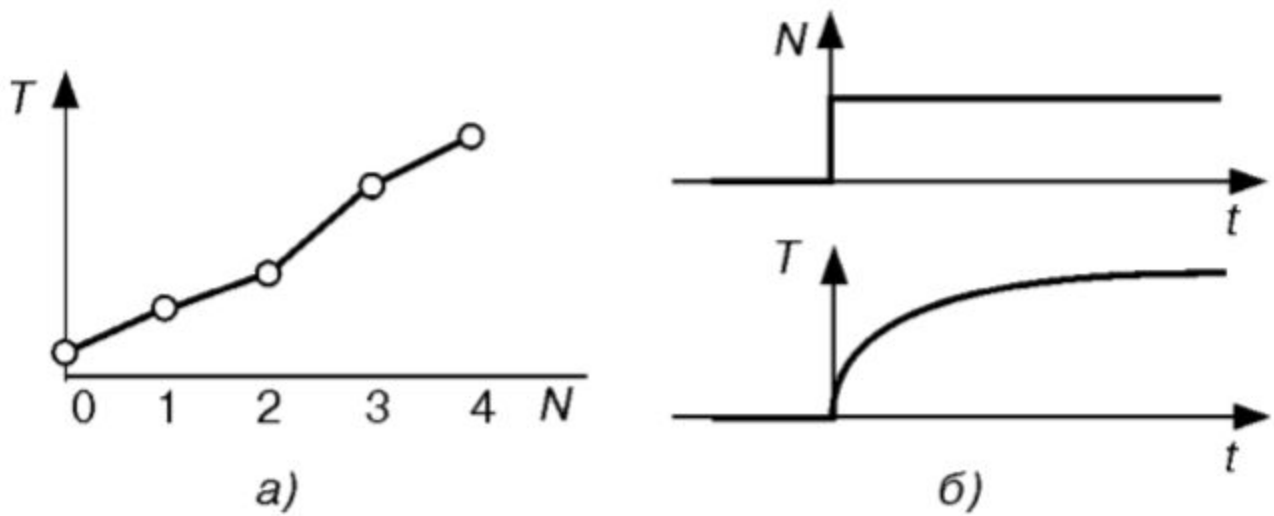
математической моделью в виде решения дифференциального уравнения:

$$y(t) = F(x(t), t);$$

графической моделью, состоящей из двух графиков: графика изменения возмущения во времени и графика реакции объекта на это возмущение – графической зависимости изменения выхода во времени.

2. Динамические характеристики систем

Задача выбора электрической плиты



Карасев Е.М.,

2.3 Элементарные динамические звенья

Для облегчения задачи исследования сложной динамической системы ее разбивают на отдельные элементы и для каждого из них составляют дифференциальные уравнения. Для отображения динамических свойств элементов системы независимо от их физической природы используют понятие динамического звена.

Динамическое звено – это часть системы или элемента, описываемая определенным дифференциальным уравнением.

Динамическим звеном можно представить элемент, совокупность элементов, автоматическую систему в целом.

2.3 Элементарные динамические звенья

Любую динамическую систему можно условно разложить на динамические атомы – элементарные динамические звенья.

Упрощенно элементарным динамическим звеном можно считать звено с одним входом и одним выходом.

Элементарное звено должно быть звеном направленного действия: звено передает воздействие только в одном направлении – с входа на выход, так что изменение состояние звена не влияет на состояние предшествующего звена, работающего на вход.

Поэтому при разбиении системы на звенья направленного действия математическое описание каждого звена может быть составлено без учета связей его с другими звеньями.

2.3 Элементарные динамические звенья

Все звенья различают по виду уравнений, определяющих характеристики переходных процессов, возникающих в них при одинаковых исходных условиях и одинаковом виде возмущения.

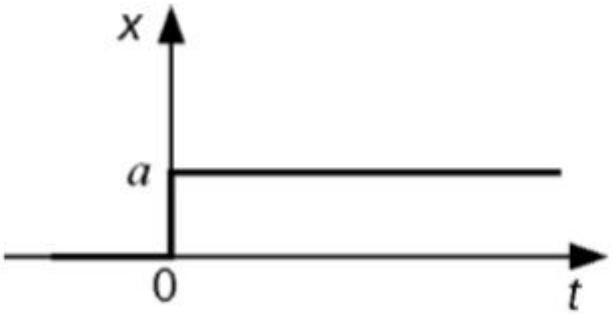
Для оценивания поведения элементарного звена обычно на его вход подают тестовые сигналы определенной формы. Наиболее часто используют следующие виды возмущающих сигналов:

- ступенчатое воздействие;
- импульсное воздействие;
- периодический сигнал.

2.3 Элементарные динамические звенья

Ступенчатое воздействие:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ a & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$



Частным случаем ступенчатого воздействия является единичное воздействие, которое описывается так называемой единичной функцией *x(t)* = ***1***(*t*):

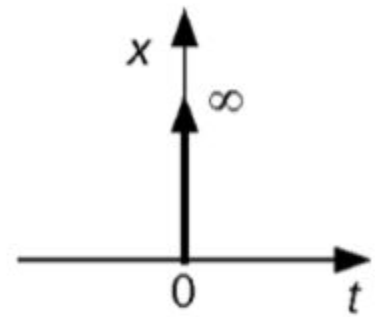
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

2.3 Элементарные динамические звенья

Импульсное воздействие (единичный импульс или дельта-функция)

x(t) = δ(t)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$



Следует за

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}.$$

Периодический сигнал: либо в виде синусоиды, либо в виде прямоугольной волны.

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Воздействие на вход системы вызывает изменение ее выхода *y(t)* – переходный процесс, именуемый переходной функцией.

Переходная (временная) функция – это реакция выходной переменной звена на изменение входа.

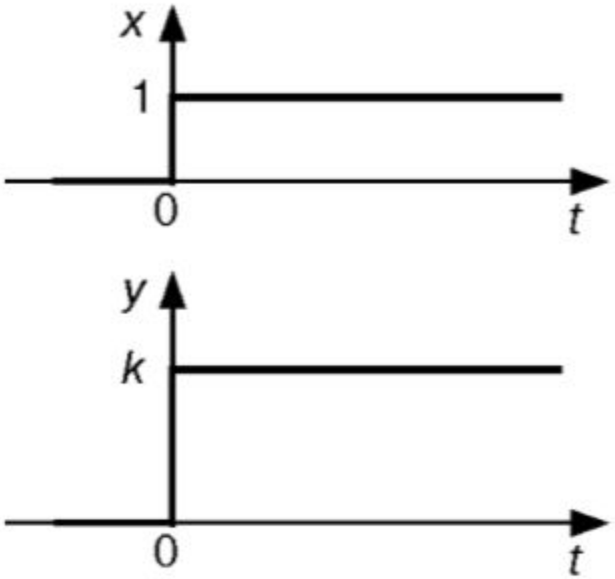
В дальнейшем будем рассматривать типовые звенья при единичном ступенчатом возмущении.

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Безынерционное звено (усилительное, безъемкостное, масштабирующее или пропорциональное) описывается уравнением:

$$y(t) = kx(t),$$

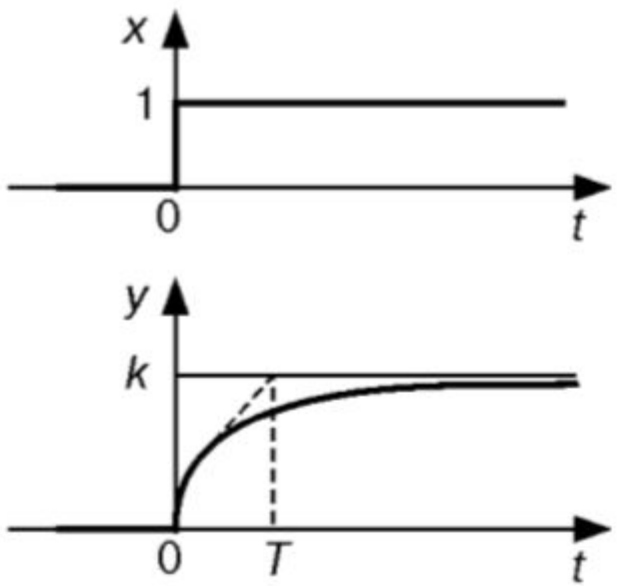
где k – коэффициент пропорциональности или усиления.



2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Инерционное звено (апериодическое, емкостное, релаксационное) описывается дифференциальным уравнением:

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t).$$



Его переходный процесс описывается уравнением:

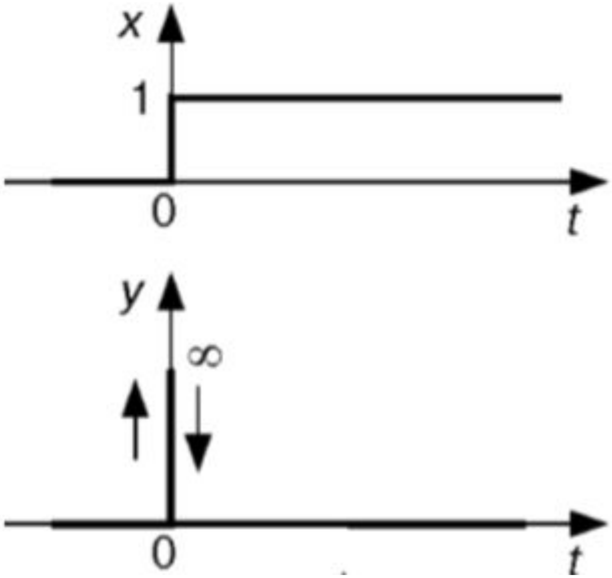
$$y(t) = kx(t)(1 - e^{-t/T}),$$

где T – постоянная времени.

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Идеальное (безынерционное) дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением:

$$y(t) = kx'(t).$$

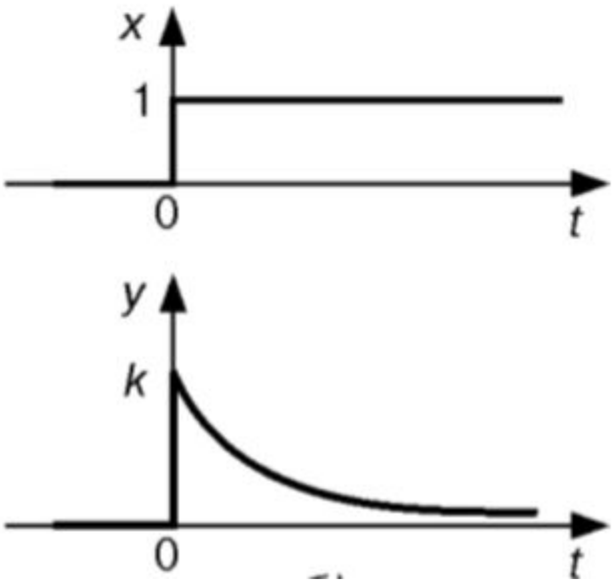


Во всех точках, кроме нулевой, значение *y* равно нулю; в нулевой точке *y* за бесконечно малое время успевает увеличиться до бесконечности и вернуться в ноль.

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Реальное дифференцирующее звено описывается дифференциальным уравнением, в котором, в отличии от идеального звена, дополнительно появляется ине

$$Ty'(t) + y(t) = kx'(t).$$



При возмущении звена единичным ступенчатым воздействием переходный процесс в звене опис ем:

$$y(t) = kx(t)e^{-t/T}.$$

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

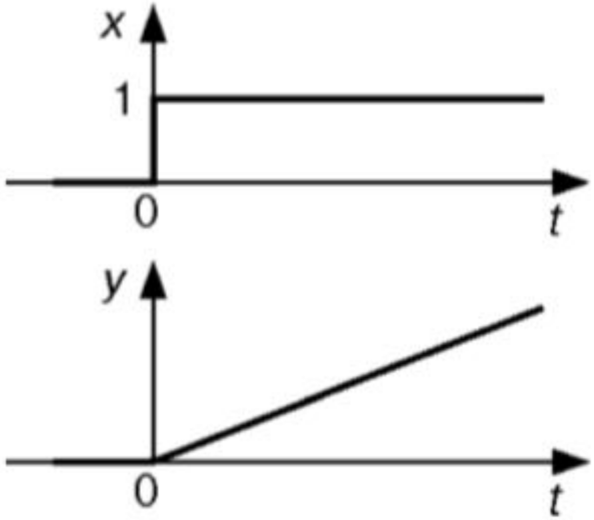
Реальное дифференцирующее звено не является элементарным – его можно заменить соединением двух звеньев: идеального дифференцирующего и инерционного:

$$\begin{cases} z = kx'; \\ Ty' + y = kz. \end{cases}$$

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Интегрирующее звено (астатическое, нейтральное) описывается дифференциальным уравне

$$y'(t) = kx(t).$$



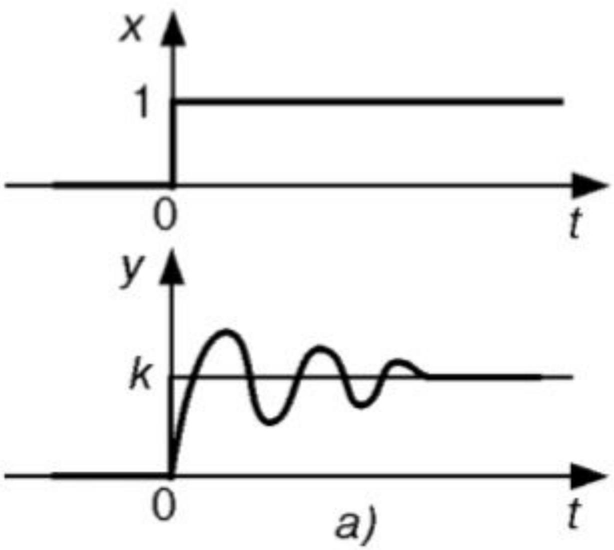
Переходный процесс в звене описывается решением этого уравне

$$y(t) = k \int_0^t x(\tau)\, d\tau$$

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Колебательное звено в общем виде описывается следующим

$$T_1^2 y''(t) + T_2 y'(t) + y(t) = kx(t).$$



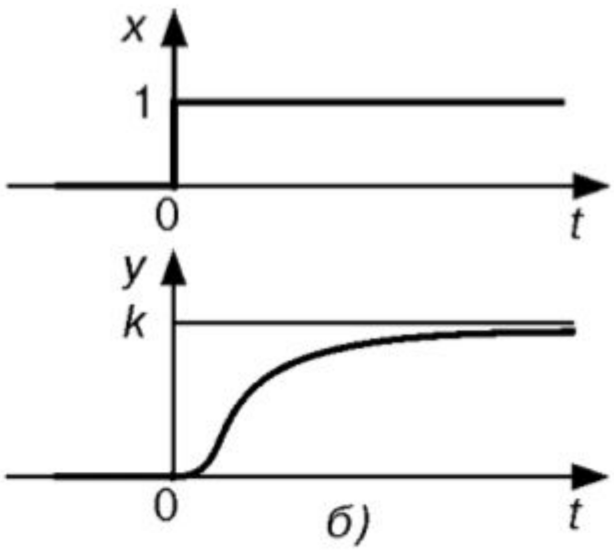
Колебательное звено получается при наличии в нем двух емкостных элементов, способных запасать энергию двух видов и взаимно обмениваться этими запасами. Если в процессе колебаний запас энергии, полученной звеном в начале возмущения, уменьшается, то колебания затухают. При этом:

$$T_2^2 - 4T_1^2 < 0$$

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Колебательное звено в общем виде описывается следующим

$$T_1^2 y''(t) + T_2 y'(t) + y(t) = kx(t).$$



Если же

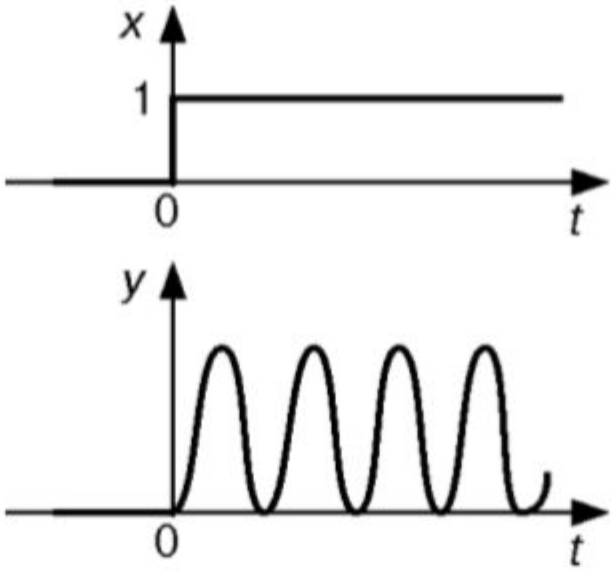
$$T_2^2 - 4T_1^2 \geqslant 0$$

то вместо колебательного звена получается апериодическое звено второго порядка.

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Колебательное звено в общем виде описывается следующим

$$T_1^2 y''(t) + T_2 y'(t) + y(t) = kx(t).$$



При

$$T_2 = 0$$

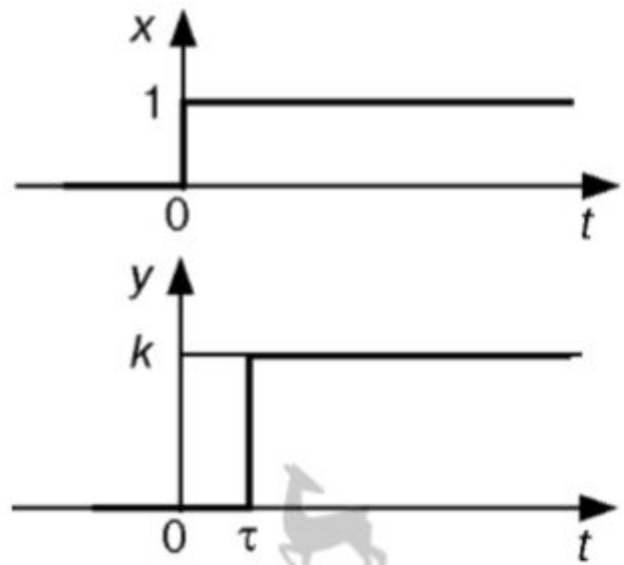
получаем консервативное звено с незатухающими колебаниями.

2.4 Виды типовых звеньев и их переходные функции

Звено чистого (транспортного) запаздывания повторяет по форме входной сигнал, но с запаздыванием по времени:

$$y(t) = kx(t - \tau),$$

где τ – время запаздывания.



3. Пространство состояний

Поскольку свойства системы выражаются значениями ее выходов, то **состояние системы** можно определить как вектор значений выходных переменных $Y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Поэтому поведение системы (ее процесс) можно отобразить в виде графика в m-мерной системе координат.

Множество возможных состояний системы Y рассматривают как **пространство состояний** (или **фазовое пространство**) системы, а координаты этого пространства называют **фазовыми координатами**.

3. Пространство состояний

Точка, соответствующая текущему состоянию системы, называется **фазовой**, или **изображающей**, **точкой**.

Фазовая траектория – это кривая, которую описывает фазовая точка при изменении состояния невозмущенной системы (при неизменных внешних воздействиях).

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих всевозможным начальным условиям, называется **фазовым портретом**.

3. Пространство состояний

Фазовой плоскостью – называется координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы.

Неподвижными (**особыми** или **стационарными**) называются точки, положение которых на фазовом портрете с течением времени не изменяется. Особые точки отражают положения равновесия.

3. Пространство состояний

Будем считать, что на оси абсцисс фазовой плоскости откладываются значения выходной координаты, а на оси ординат – скорость ее изменения.

3. Пространство состояний

Для фазовых траекторий невозмущенной системы справедливы следующие свойства:

- через одну точку фазовой плоскости проходит только одна траектория;
- в верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо, в нижней – наоборот;
- на оси абсцисс производная $dy_2/dy_1=\infty$ всюду за исключением точек равновесия, поэтому фазовые траектории пересекают ось абсцисс (в неособых точках) под прямым углом.

4. Устойчивость динамических систем

Под **устойчивостью** понимается свойство системы возвращаться к равновесному состоянию или циклическому режиму после устранения возмущения, вызвавшего нарушение последних.

Состояние устойчивости (устойчивое состояние) – это такое равновесное состояние системы, в которое она возвращается после снятия возмущающих воздействий.

4. Устойчивость динамических систем

Александр Михайлович Ляпунов:

Неподвижная точка системы a называется устойчивой (или аттрактором), если для любой окрестности N точки a существует некоторая меньшая окрестность этой точки N’ такая, что любая траектория, проходящая через N’, остается в N при возрастании t.

4. Устойчивость динамических систем

Аттрактор – (от латинского attraho – притягиваю к себе) – область устойчивости, куда стремятся траектории в фазовом пространстве.

Неподвижная точка системы a называется асимптотически устойчивой, если она устойчива и, кроме того, существует такая окрестность N этой точки, где любая траектория, проходящая через N, стремится к a при t стремящемся к бесконечности.

4. Устойчивость динамических систем

Неподвижная точка системы, которая устойчива, но не асимптотически устойчива, называется нейтрально устойчивой.

Неподвижная точка системы, которая не является устойчивой , называется неустойчивой (или репеллером).

Репеллер (от латинского repello – отталкиваю, отгоняю) область в фазовом пространстве, где траектории, даже начинающиеся очень близко от особой точки, отталкиваются от нее.

Спасибо за внимание!!!

Карасев Е.М.,