ПРОТОТИПЫ В 14 ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ, ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИЮ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Проверяемые требования (умения): уметь выполнять действия с функциями.

Умения по КТ

- Вычислять производные и первообразные элементарных функций

- Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций

Содержание задания В14 по КЭС

Начала математического анализа

- 4.1 *Производная*

4.1.1 Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

4.1.2 Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком

4.1.3 Уравнение касательной к графику функции

4.1.4 Производные суммы, разности, произведения, частного

4.1.5 Производные основных элементарных функций

4.1.6 Вторая производная и ее физический смысл

- 4.2 *Исследование функций*

4.2.1 Применение производной к исследованию функций и построению графиков

4.2.2 Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах

Памятка ученику

- **Задание B14** - на нахождение с помощью производной точек экстремума функции или вычисление наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке. Для успешного решения задачи ученик должен уметь вычислять производные элементарных функций и в простейших случаях исследовать функцию на монотонность.

C'	0
$(x)'$	1
$(x^a)'$	ax^{a-1} при $a \neq 1$
$\sin' x$	$\cos x$
$\cos' x$	$-\sin x$
$tg' x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$ctg' x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)'$	e^x
$(a^x)'$	$a^x \ln a$
$\ln' x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a' x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$(f+g)'$	$f'+g'$
$(f \cdot g)'$	$f'g+fg'$
$(cf)'$	cf'
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{(f'g-fg')}{g^2}$
$(f(kx+b))'$	$kf'(kx+b)$
$(f(g(x)))'$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Устные упражнения

4) $g(x) = (1 - x)^3$

Ответ: $g'(x) = -3(1 - x)^2$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

Ответ: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

Устные упражнения

Найдите производные функций:

1) $g(x) = x^2 - 3x + 4$

Ответ: $g'(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$

Ответ: $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 4x$

3) $h(x) = (2x+1)^2$

Ответ: $h'(x) = 4(2x+1)$

Устные упражнения

6) $y = \sin 2x$

$Ответ:\ y' = 2\cos 2x$

7) $f(x) = tg3x$

$$Ответ:\quad f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$$

Устные упражнения

8) $y = \sin^2 x$

Ответ: $y' = \sin 2x$

9) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$

Ответ: $y' = 0$

Найдите ошибку

1) Найдите производную функции

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{x}$$

Решение

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x^2}$$

Найдите ошибку

1) Найдите производную функции

$$f(x) = x^{12} + \sin x$$

Решение

$$f'(x) = 12x + \cos x$$

Найдите ошибку

1) Найдите производную функции

$$f(x) = (-3+6x)^7$$

Решение

$$f'(x) = 7(-3+6x)^6$$

Порешаем?...

Найдите значение производной функции $f(x) = \sin 3x + 1$ **при** $x = \dfrac{\pi}{2}$

Решение

$$f'(x) = 3\cos 3x;$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

$$Ответ: \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Алгоритм нахождения наименьшего (наибольшего) значения на данном отрезке. Первый способ (традиционный) предполагает использование

алгоритмов и знание формул.

1) использование алгоритмов и знание формул. Найти производную функции.
2) Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
3) Найти значение функции на краях числового промежутка и в нулях производной, входящих в данный числовой промежуток.
4) Выбрать среди полученных значений функции значение, соответствующее вопросу задачи (наибольшее или наименьшее)

- **Важно: промежуток может быть не указан, но очевиден: область определения.**

Прототип задания В14

- Найдите наименьшее значение функции $y=(x-8)e^{x-7}$

на отрезке [6;8].

Найдем y'(x). Производная произведения равна

$(uv)'=u'v+v'u$

$y'=(x-8)'\cdot e^{x-7}+(x-8)(e^{x-7})'=e^{x-7}+(x-8)\cdot e^{x-7}=e^{x-7}\cdot(x-7)$

Приравняем к нулю:

$e^{x-7}(x-7)=0$

$e^{x-7}=0$ **- нет корней;** $x-7=0$, $x=7$ **– принадлежит [6;8]**

Найдём наименьшее значение функции:

$y(6)=(6-8)\cdot e^{6-7}=-2\cdot 2{,}7^{-1}=-\frac{20}{27}$

$y(7)=(7-8)\cdot e^{7-7}=-1$

$y(8)=(8-8)\cdot e^{8-7}=0$

Ответ: -1 - наименьшее значение функции на отрезке [6;8].

Решение

Задания для самостоятельного решения

- **Задание B14**

Найдите наименьшее значение функции $y=(x-6)e^{x-5}$ на отрезке [4;6].

- **Задание B14**

Найдите наименьшее значение функции $y=(x-17)e^{x-16}$ на отрезке [15;17].

Проверка

Ответ: -1 **Ответ: -1**

Прототип задания В14

- Найдите наибольшее значение функции $y=12\cos x+6\sqrt{3}\cdot x-2\sqrt{3}\pi+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Найдем y'(x). Производная функции равна

$$y'=-12\sin x+6\sqrt{3}$$

Приравняем к нулю:

$$-12\sin x+6\sqrt{3}=0 \qquad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x=\frac{\pi}{3}$$

- принадлежит $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Найдём наибольшее значение функции:

$$y(0)=12\cdot 1+6\sqrt{3}\cdot 0-2\sqrt{3}\pi+6=12-2\sqrt{3}\pi+6\approx 7{,}12$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=12\cdot\frac{1}{2}+6\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}-2\sqrt{3}\pi+6=6+2\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}\pi+6=12$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0+6\sqrt{3}\,\frac{\pi}{2}-2\sqrt{3}\pi+6=3\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}\pi+6=\sqrt{3}\pi+6\approx 11{,}4$$

Ответ: 12 - наибольшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

Задания для самостоятельного решения

- **Задание B14**

  Найдите наибольшее значение функции $y = 12\sqrt{2}\cos x + 12x - 3\pi + 9$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

- **Задание B14**

  Найдите наибольшее значение функции $y = 7\sqrt{2}\cos x + 7x - \frac{7\pi}{4} + 9$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Проверка

Ответ: 21 **Ответ: 16**

Прототип задания B14

- Найдите наименьшее значение функции

$y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$

Найдем y'(x). Производная функции равна

$y' = -5\sin x - 6$

Приравняем к нулю:

$-5\sin - 6 = 0 \qquad \sin x = -\frac{6}{5}$ **- нет корней**

Найдём наименьшее значение функции:

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 \approx 27 + 4 \approx 31$$

$y(0) = 5 + 4 = 9$

Ответ: 9 - наименьшее значение функции на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Решение

Задания для самостоятельного решения

- **Задание B14**
- Найдите наименьшее значение функции $y = 7\cos x - 13x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.
- **Задание B14**
- Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 9x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Проверка

Ответ: 16 Ответ: 8

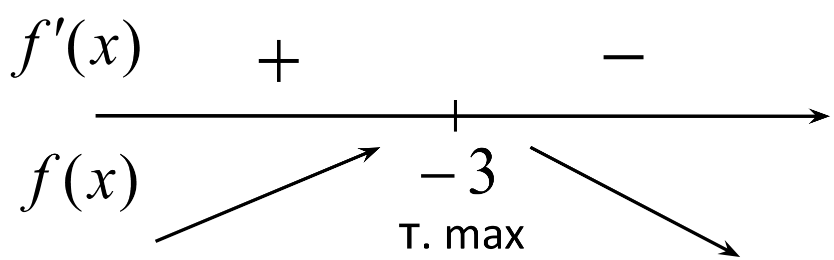
Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции без указания числового промежутка:

1) **Найти производную функции.**
2) **Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.**
3) **Провести исследование на экстремумы в области определения функции**. Если экстремум один, то именно в нем достигается наибольшее (наименьшее) значение функции.

Алгоритм нахождения точек экстремума.

- Найти производную функции.
- Приравнять производную к нулю и решить полученное уравнение.
- На числовой прямой отметить нули производной и точки, в которых производная не определена.
- Соотнести поведение производной с поведением функции и ответить на вопрос.

Например:



-3

Ответ:

Формулы:

Дифференцирование показательной функции:

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$$

Дифференцирование логарифмической функции:

$$\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$$

Дифференцирование сложной функции: $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = \left(f\left(g\right)\right)' \cdot \left(g\left(x\right)\right)'$

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Решение:

Промежуток не указан. Очевидно, что необходимо исследовать функцию на всей области определения.

$$D(f): 4 - 2x - x^2 > 0$$

$$x \in \left(-1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right)$$

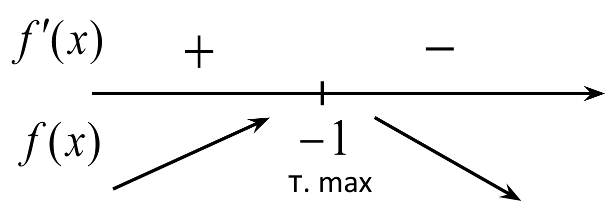
$$y' = \frac{1}{(4-2x-x^2)\ln 5}\cdot(4-2x-x^2)'$$

$$y' = \frac{1}{(4-2x-x^2)\ln 5}\cdot(-2-2x)$$

$$y' = 0 \qquad при \qquad x = -1$$

Конечно, страшновато, но уже ясно, что краев у числового промежутка нет, а, следовательно в них не будет достигаться наибольшее или наименьшее значение.

Убедимся, что это значение *наибольшее*



Точка максимума одна, следовательно в ней и будет
наибольшее значение.

$$y_{наиб.} = y(-1) = 4$$

Ответ: **4**

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3^{-7-6x-x^2}$$

Решение: $y = 3^x$

Промежуток не указан. Очевидно, что необходимо исследовать функцию на всей области определения.

$$D(f): R$$

$$y' = 3^{-7-6x-x^2} \ln 3 \cdot (-6-2x)$$

$$3^{-7-6x-x^2} \ln 3 \cdot (-6-2x) = 0$$

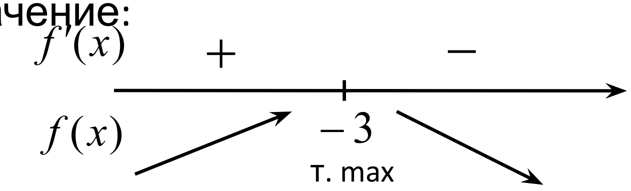
Разделим на первый и второй множители,
не равные нулю:

$$-6-2x=0$$

$$x=-3$$

$$y_{наиб.} = y(-3) = 9$$

Убедимся, что это *наибольшее* значение:



Точка максимума одна, следовательно в ней и будет
наибольшее значение.

Ответ: **9**

Не очень просто.

Тем более, что некоторые программы не предусматривают использование формул дифференцирования показательной и логарифмической функции в общем виде. Попробуем иначе. Без использования алгоритма и формул.

В случае, если мы имеем дело со сложной функцией $f(g(x))$, где f – монотонная функция, то достаточно исследовать функцию $g(x)$. Наибольшие, наименьшие значения, точки экстремума функция f будет иметь такие же, что и функция $g(x)$. Конечно, с учетом области определения.

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3^{-7-6x-x^2}$$

Решение:

Функция $y = 3^x$ возрастает на R, следовательно наибольшее значение принимает при наибольшем значении аргумента (аргументом в данном случае является функция, находящаяся в показателе).

Исследуем на наибольшее значение функцию, находящуюся в показателе.

$$f(x) = -7 - 6x - x^2$$

$$f'(x) = -6 - 2x$$

$$-6 - 2x = 0$$

$$x = -3$$

$f'(x)$ + −

$f(x)$ -3

т. max

Следовательно $f(x)_{наиб.} = f(-3) = 2$

Следовательно $y_{наиб.} = 3^2 = 9$

Ответ: **9**

Можно и совсем обойтись без производной.

Используем простые графические соображения.

Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2^{x^2+2x+5}$$

Решение:

Функция $y = 2^x$ возрастает на R, следовательно наименьшее значение принимает при наименьшем значении аргумента (функции, находящейся в показателе).

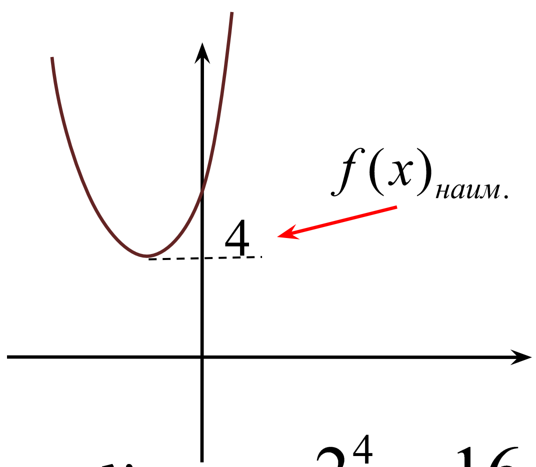
Исследуем на наибольшее значение функцию, находящуюся в показателе.

$$f(x) = x^2 + 2x + 5$$

График – парабола, ветви направлены вверх.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -1$$

$$y_0 = 4$$



Следовательно $y_{наиб.} = 2^4 = 16$

Ответ: | 1 | 6 |

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$$

Решение:

Функция $y = \log_5 x + 3$ возрастает на всей области определения , следовательно наибольшее значение принимает при наибольшем значении значении аргумента (функции, находящейся под знаком логарифма).

Исследуем на наибольшее значение функцию, находящуюся под знаком логарифма.

$$D(f): 4 - 2x - x^2 > 0$$

$$x \in \left(-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\right)$$

$$f(x) = 4 - 2x - x^2$$

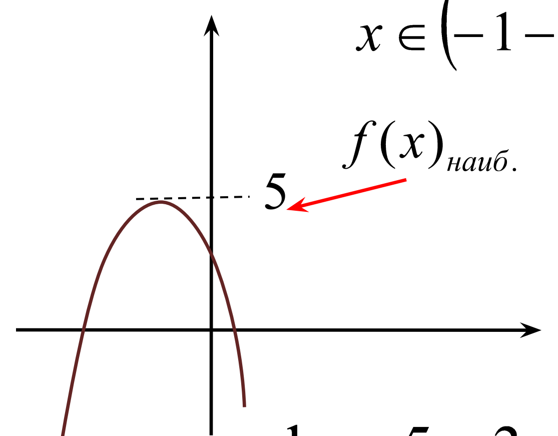


График – парабола, ветви направлены вниз.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -1$$

$$y_0 = 5$$

Следовательно $y_{наиб.} = \log_5 5 + 3 = 4$

Ответ: **4**

Решим таким же способом задания, связанные с исследованием сложной функции, содержащей квадратичную функцию под знаком квадратного корня.

Найдите точку минимума функции

$$y=\sqrt{x^2-6x+11}$$

Решение:

Функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на всей области определения, следовательно ведет себя так же, как подкоренная функция на области определения.

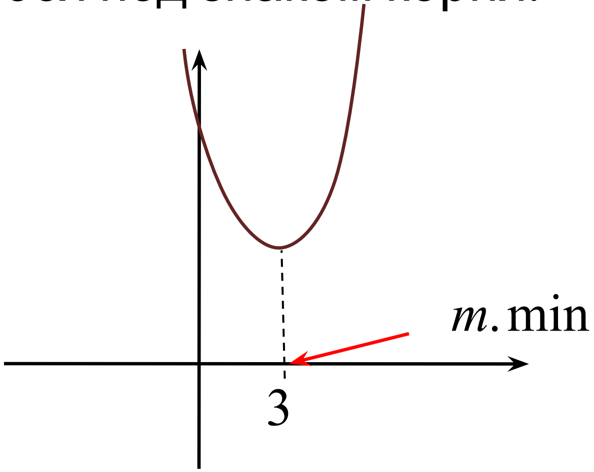
Подкоренное выражение больше нуля при любом значении x. D(y):R.

Исследуем функцию, находящуюся под знаком корня.

$$f(x)=x^2-6x+11$$

График – парабола, ветви направлены вверх.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=3$$



Ответ: **3**

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$$

Решение:

Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения, следовательно принимает наибольшее значение в той же точке, что и подкоренная функция с учетом области определения.

D(y):[-5;1].

Исследуем функцию, находящуюся под знаком корня.

$$f(x) = 5 - 4x - x^2$$

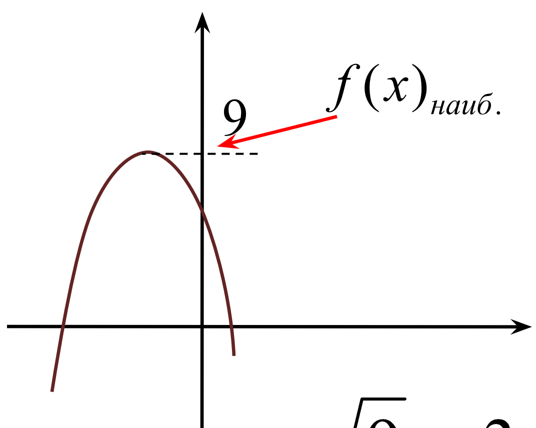


График – парабола, ветви направлены вниз.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -2$$

$$y_0 = 9$$

Следовательн $y_{наиб.} = \sqrt{9} = 3$
о

Ответ: **3**

Реши самостоятельно любым способом:

- Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$

- Найдите точку максимума функции $y = 11^{6x - x^2}$

- Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$

- Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$

Задания для домашнего (или дополнительного) решения

- **Задание B14**

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$y=4+\frac{4\sqrt{3}\cdot\pi}{3}-4\sqrt{3}\cdot x-8\cos x$$

- **Задание B14**

Найдите наименьшее значение функции на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$y=11+\frac{7\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{7\sqrt{3}}{3}x-\frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x$$

Проверка

Ответ: 0 **Ответ: 4**

Задания для домашнего (или самостоятельного) решения

- **Задание B14**
- Найдите наибольшее значение функции $y = 11x - 9\sin x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$
- **Задание B14**
- Найдите наибольшее значение функции $y = 12x - 8\sin x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

Проверка

Ответ: 3 **Ответ: 6**