Модуль 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Плоскость и её основные уравнения

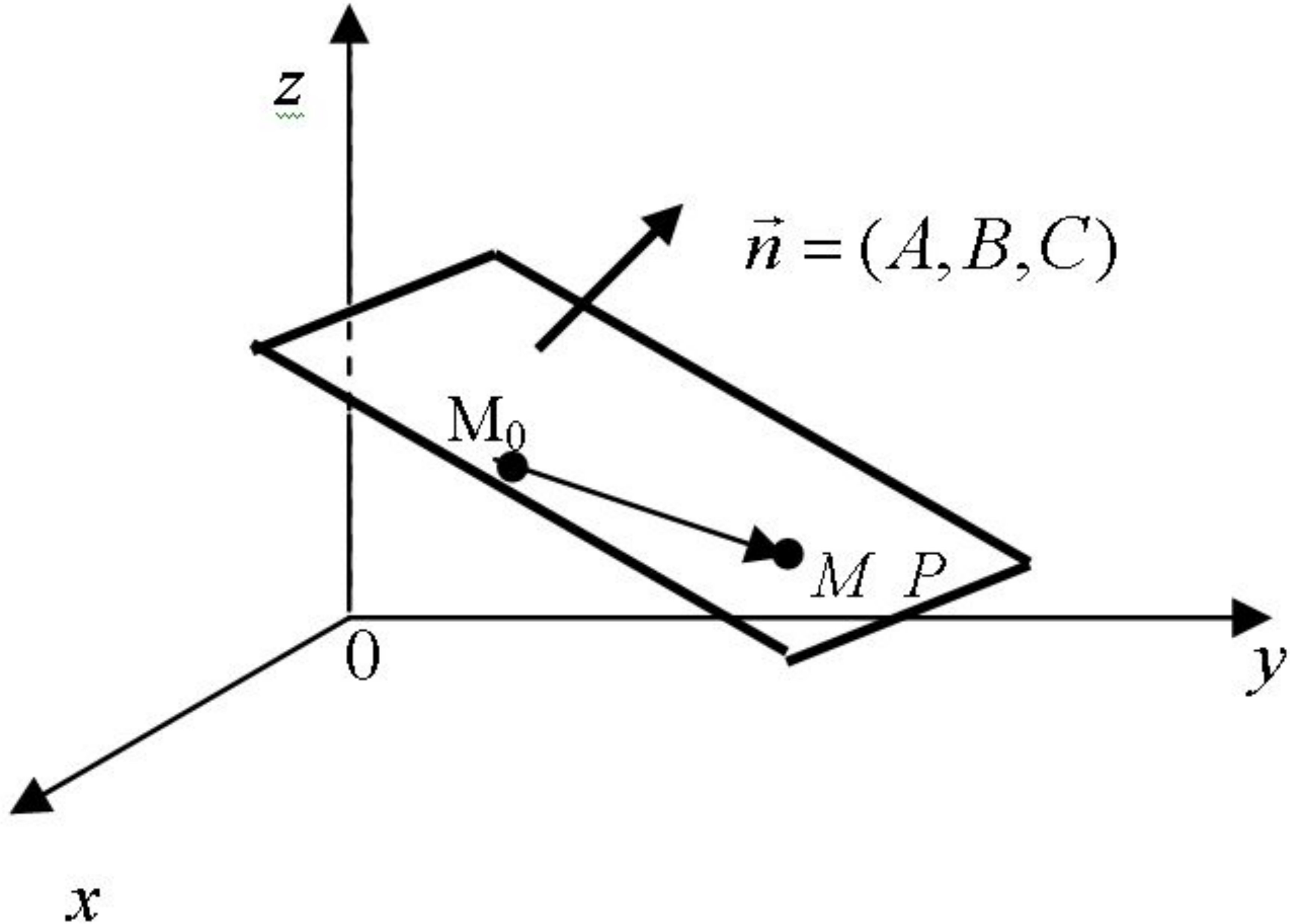
- Рассмотрим плоскость *P* в прямоугольной декартовой системе координат.

- Положение плоскости вполне определяется

точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

и *вектором нормали*

$$\vec{n} = (A, B, C) \perp P \quad (\vec{n} \neq \vec{0})$$

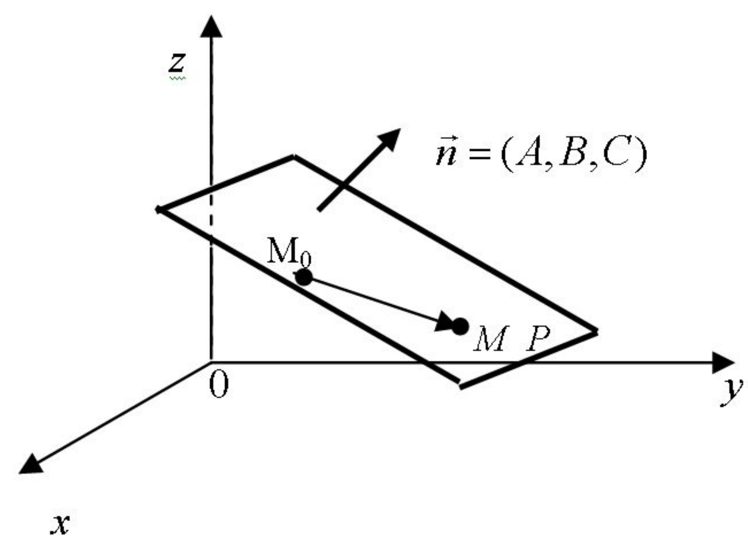

z
$\vec{n} = (A, B, C)$
M_0
M
P
0
y
x

- Возьмём любую точку

$$M(x, y, z) \in P$$

и построим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

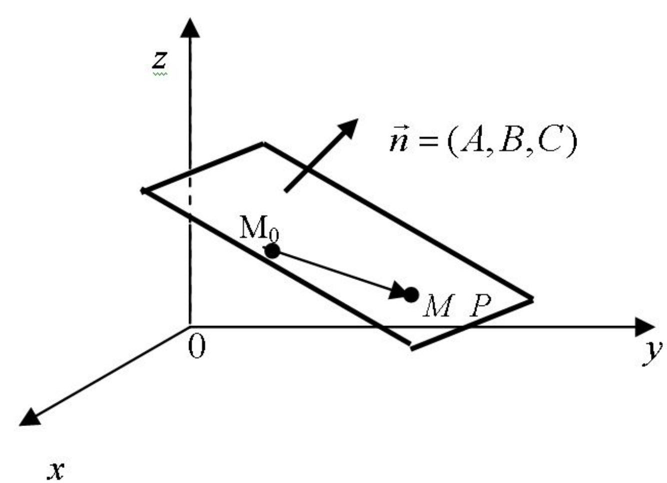


- Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то скалярное произведение

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



- Получили *уравнение плоскости*, *заданной*

точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$

и вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C)$

- Если в уравнении

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

раскрыть скобки и обозначить

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

то получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$(A^2+B^2+C^2>0)$$

- **Теорема**. *Всякое уравнение вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

определяет некоторую плоскость в пространстве.

- Если в этом уравнении какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю, то плоскость расположена параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

- Например, при $A = 0$ плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox; при $A = B = 0$ плоскость $Cz + D = 0$ параллельна осям Ox и Oy, т.е. плоскости xOy и т.д.

- Пусть в уравнении

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ни один из коэффициентов не равен 0. Перепишем это уравнение в виде

$$Ax + By + Cz = -D$$

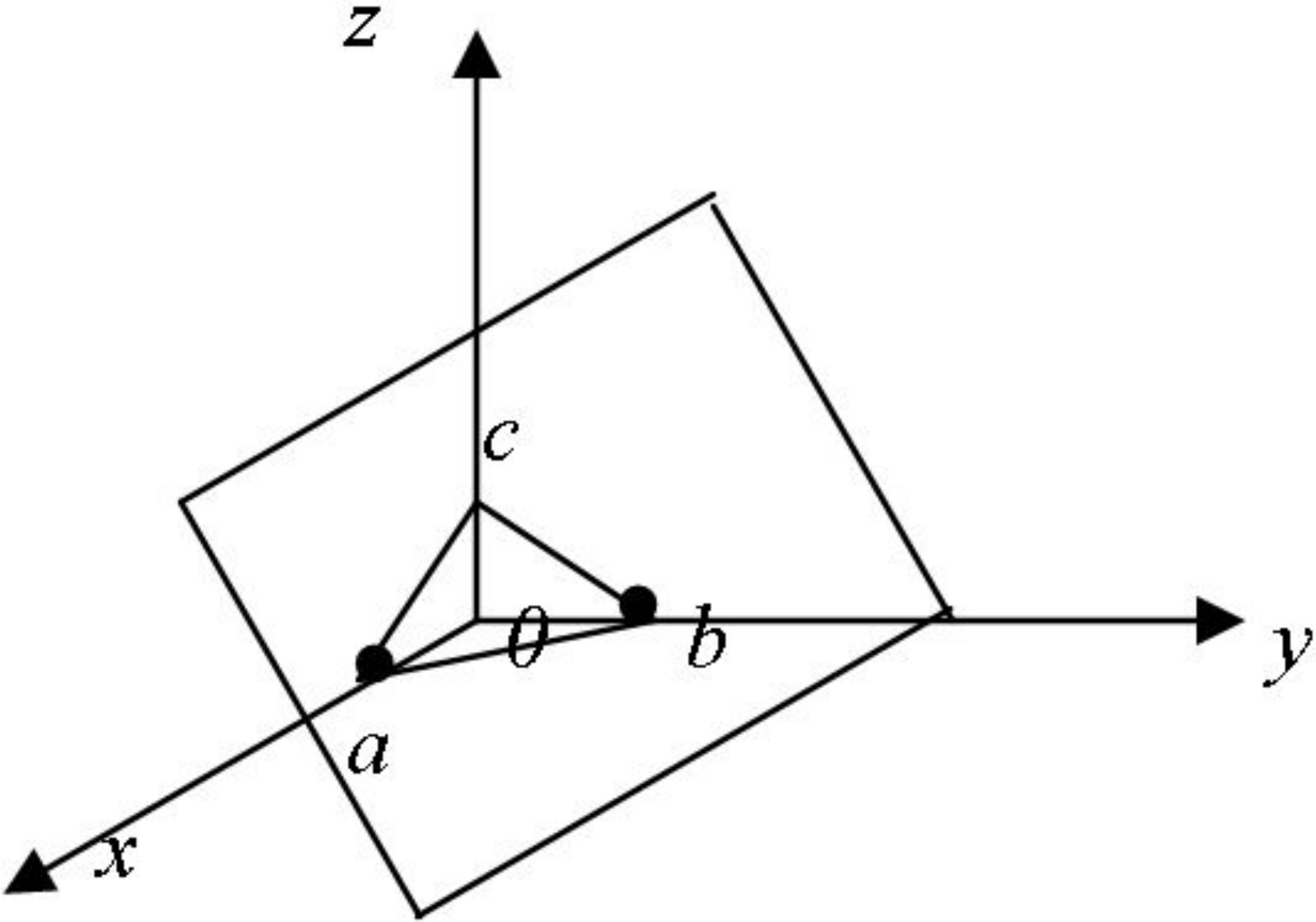
разделим обе части этого равенства на - D и обозначим

$$-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$$

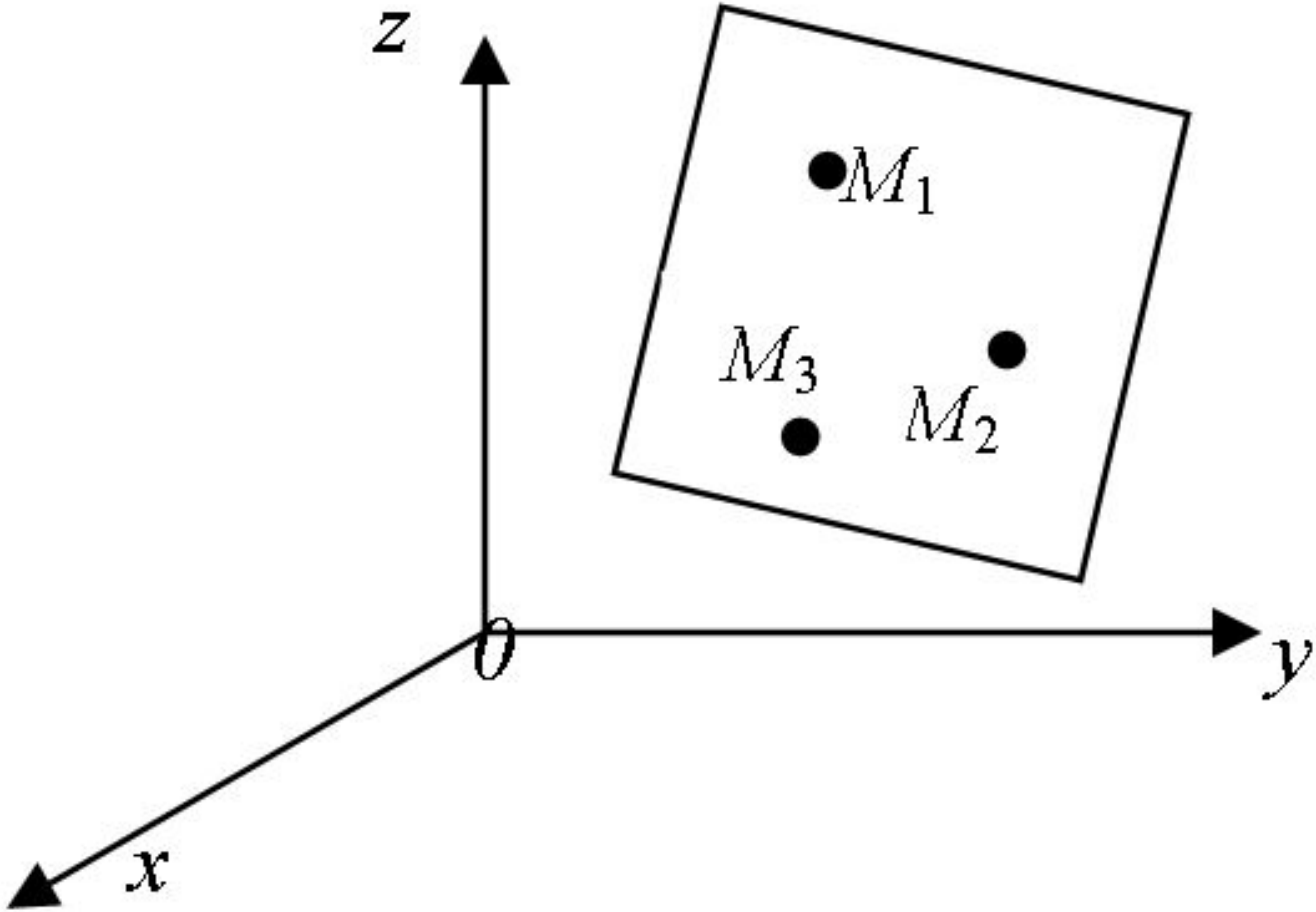
Получим *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

- где a, b, c – это величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат


z
c
0
b
y
a
x

- Если три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то через эти точки проходит единственная плоскость:


z
M_1
M_3
M_2
0
y
x

- *Уравнение плоскости, проходящей через три точки*, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Пусть даны две плоскости

$$P_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

и

$$P_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

- *Угол φ между двумя плоскостями* равен углу между их векторами нормали:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} =$$

$$= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- *Расстояние d от точки*

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

до плоскости

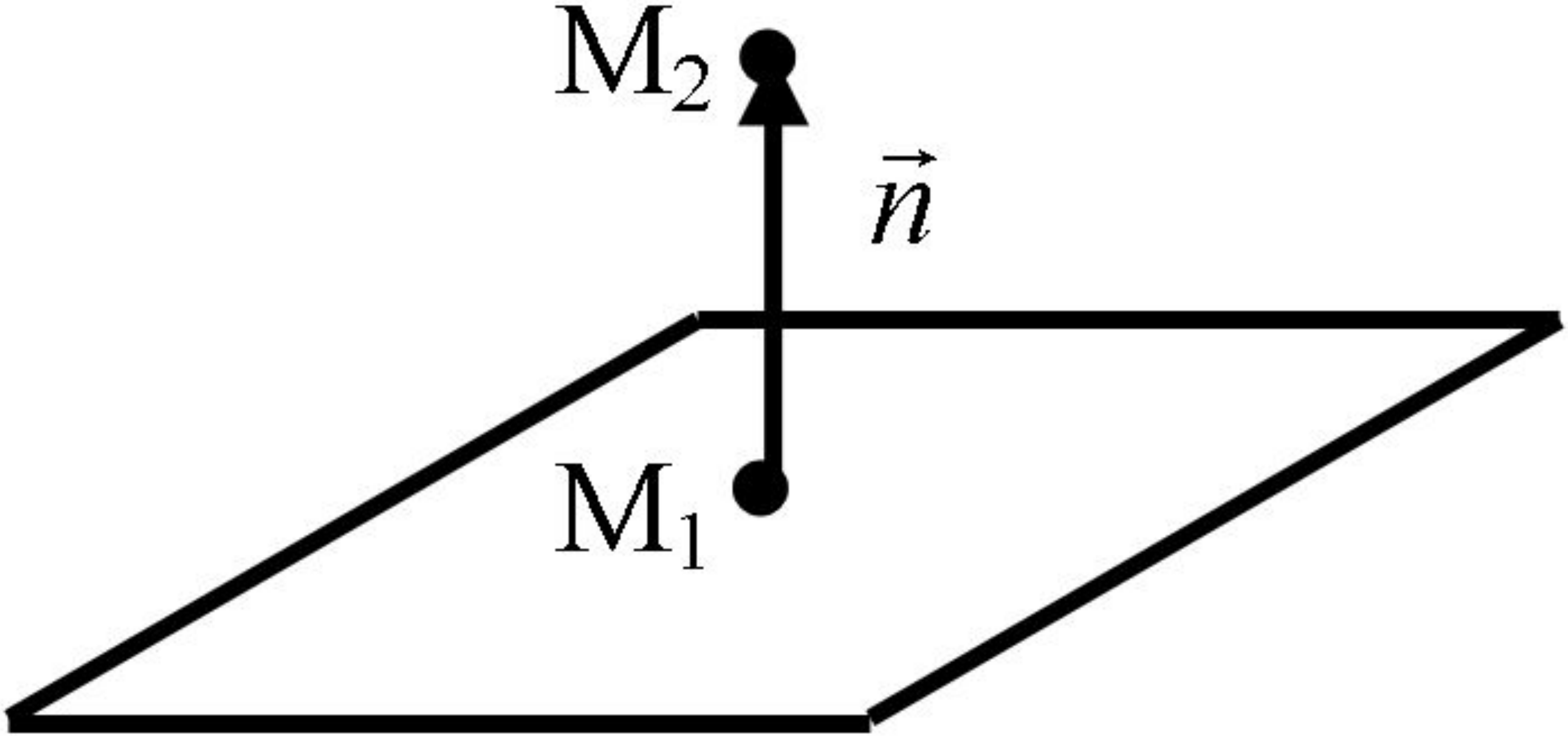
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- **Пример.** Даны две точки
$M_1(-2, 0, 1)$ $\qquad$ $M_2(1, 4, 2)$
Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

- **Решение.** Поскольку искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, то в качестве вектора нормали $\vec{n}$ возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 4, 1)$



M_2
$\vec{n}$
M_1

- Подставив теперь в уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$A = 3, \quad B = 4, \quad C = 1$$

а также координаты точки M_1:

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1$$

получим уравнение

$$3(x+2)+4(y-0)+1(z-1)=0$$

или

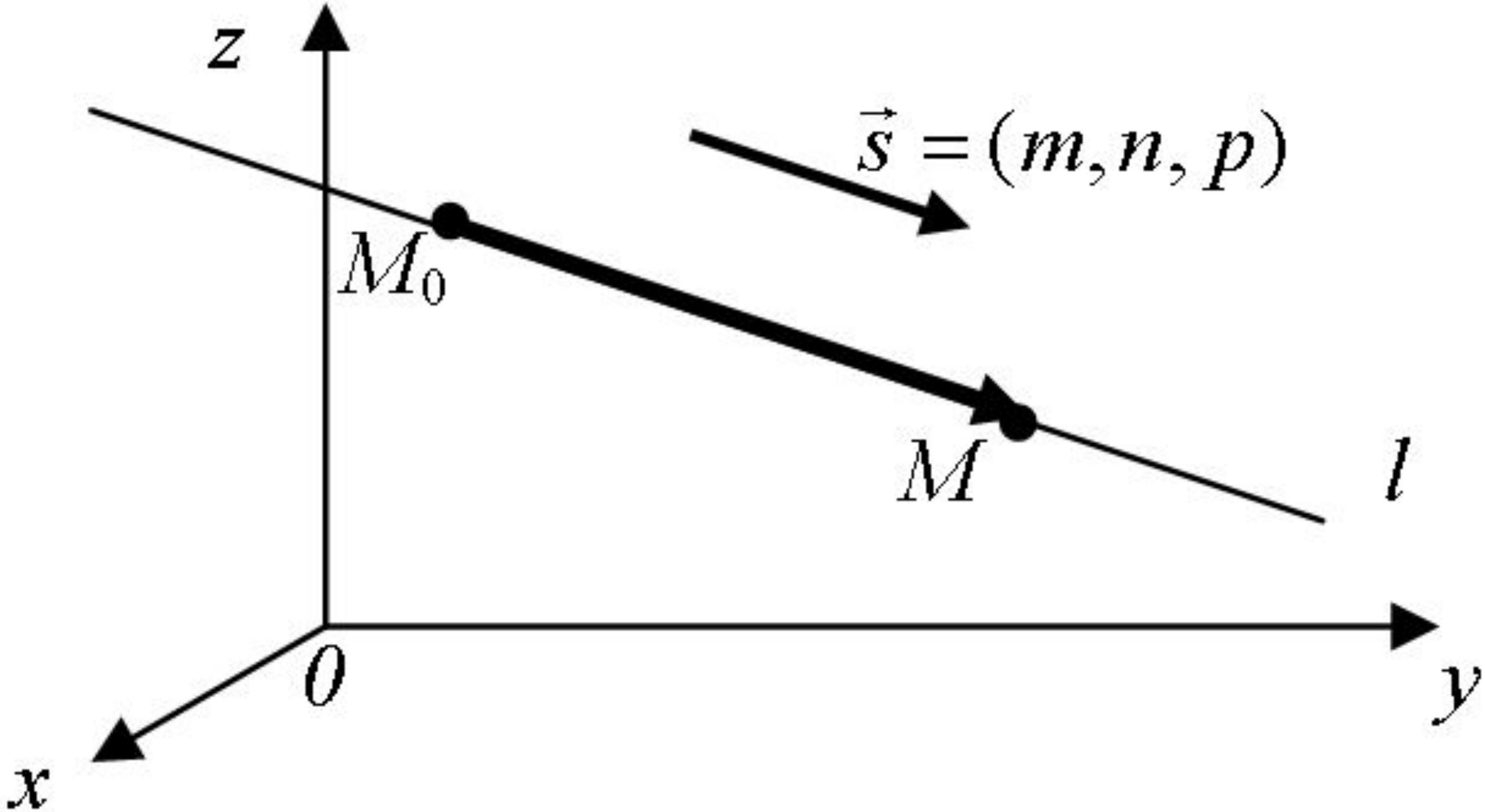
$$3x+4y+z+5=0$$

– это и есть искомое общее уравнение плоскости

Прямая в пространстве и её основные уравнения

- Рассмотрим прямую l в прямоугольной декартовой системе координат. Положение прямой в пространстве вполне определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и направляющим вектором

$$\vec{s} = (m, n, p) \parallel l$$



z
$\vec{s} = (m, n, p)$
M_0
M
l
0
y
x

- Возьмем любую точку $M(x, y, z) \in l$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, из условия коллинеарности этих векторов получим *канонические уравнения прямой в пространстве:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

- Обозначим коэффициент пропорциональности через параметр t и выразим через t переменные x, y, z. Приходим к *параметрическим уравнениям прямой в пространстве*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

- *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

- Рассмотрим две плоскости P_1 : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и P_2 : $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если эти плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой, задаваемой системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

- Эта система называется *общим уравнением прямой в пространстве*.

- *Угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2* равен углу между их направляющими векторами

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) \text{ и } \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

- *Угол ψ между прямой*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin\psi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

- **Пример.** Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3; 2; -1)$ и $M_2(4; 2; 1)$.

- **Решение.** Подставляем в формулу координаты точек $M_1(3; 2; -1)$ и $M_2(4; 2; 1)$:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z+1}{1+1}$$

- или

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{2}$$

– канонические уравнения прямой (нуль в знаменателе означает, что направляющий вектор $\vec{s}=(1,0,2)$ перпендикулярен оси Оу, т.е. прямая перпендикулярна оси Оу).

- Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{2}=t$$

$$\Rightarrow \quad x-3=t, \quad y-2=0, \quad z+1=2t,$$

$$x=3+t, \quad y=2, \quad z=-1+2t$$

Прямая на плоскости и её основные уравнения

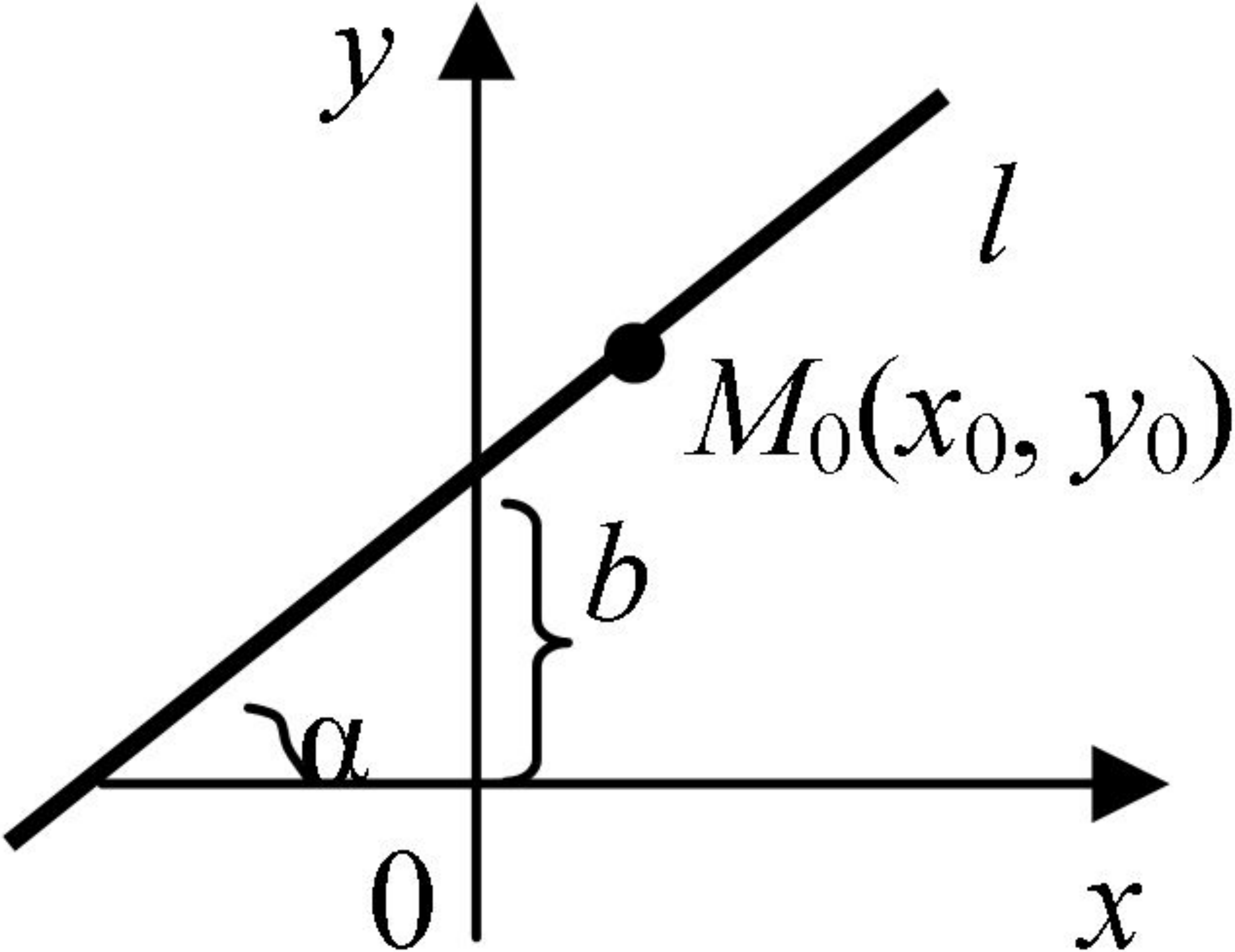
- *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* k имеет вид

$$y = kx + b$$

или

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого этой прямой на оси Oy, (x_0, y_0) – точка, лежащая на прямой.



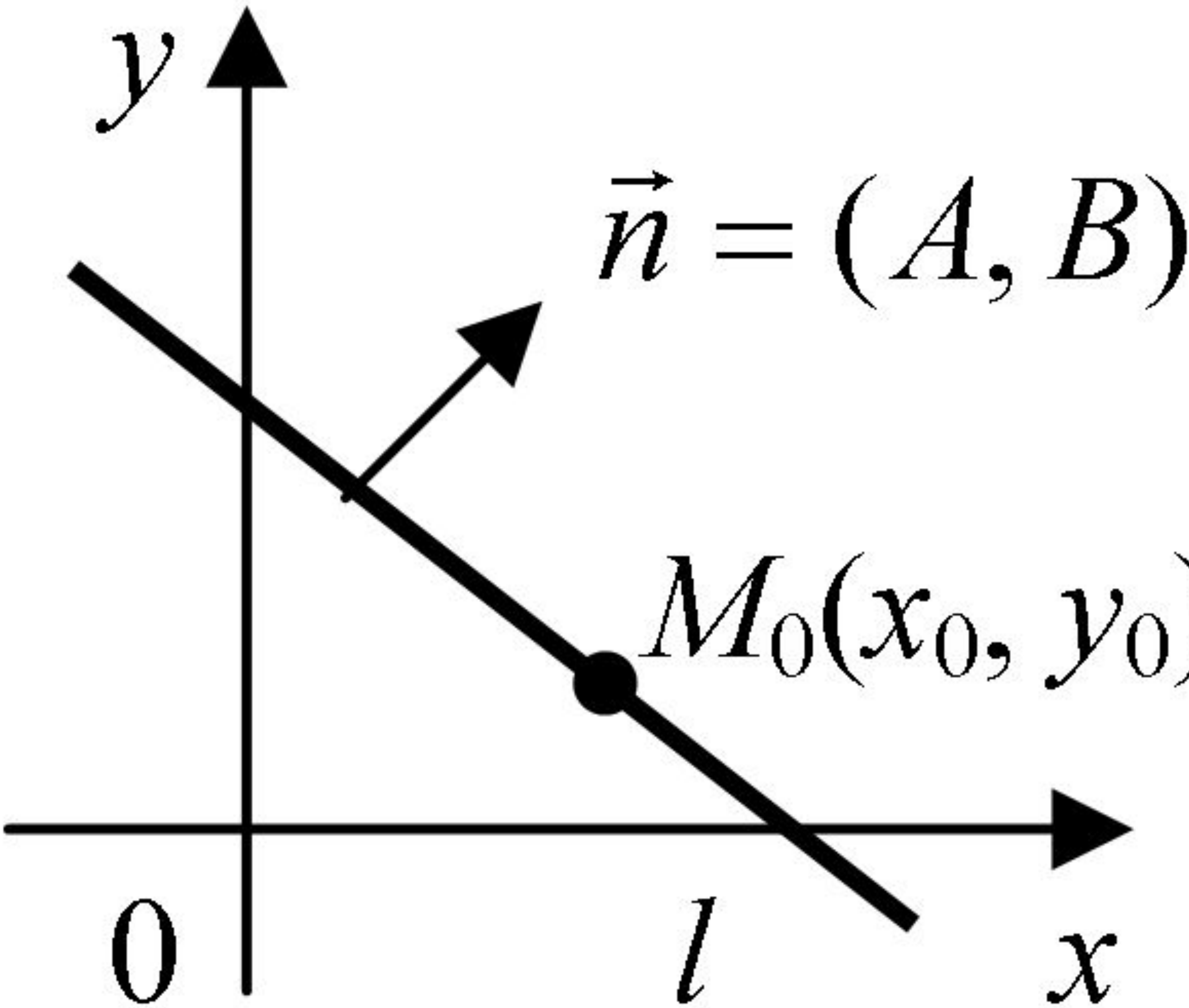
y
l
$M_0(x_0, y_0)$
b
α
0
x

- Кроме того, прямую l на плоскости можно задать вектором нормали

$$\vec{n} = (A, B) \perp l$$

и точкой

$$M_0(x_0, y_0) \in l$$



y
$\vec{n} = (A, B)$
$M_0(x_0, y_0)$
0
l
x

- Получим три уравнения, аналогичные уравнениям для плоскости:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

– *уравнение прямой*, *заданной точкой и вектором нормали*;

$$Ax + By + C = 0$$

– *общее уравнение прямой*;

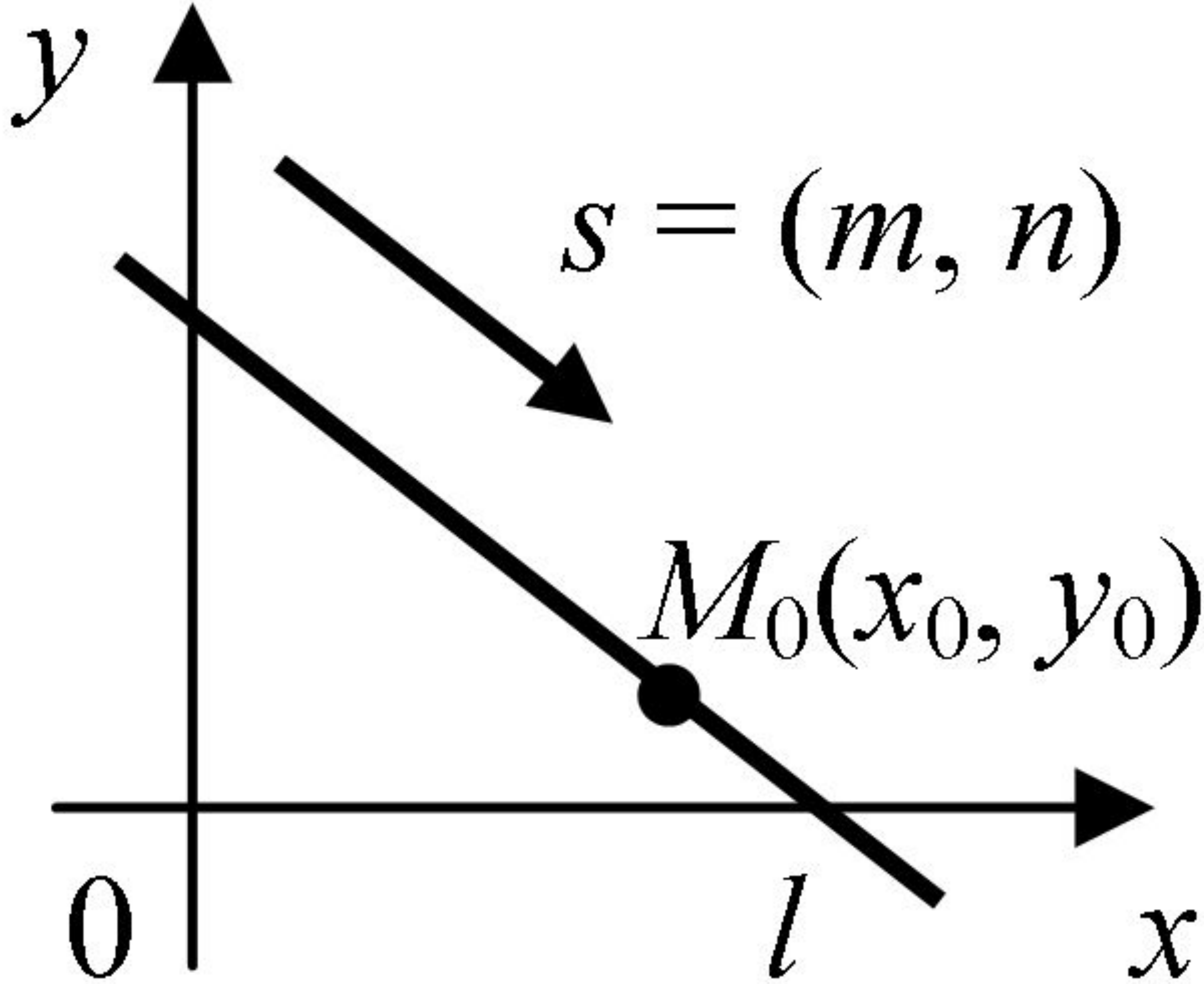
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

– *уравнение прямой в отрезках*.

- Прямая *l* на плоскости также определяется *направляющим вектором* $\vec{s} = (m, n) \parallel l$

и точкой

$$M_0(x_0, y_0) \in l$$



y
s = (m, n)
M0(x0, y0)
0
l
x

- Получим еще 3 уравнения, аналогичные уравнениям прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

– *каноническое уравнение прямой*;

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

– параметрические уравнения прямой;

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

– уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

- *Угол между двумя прямыми*, заданными уравнениями:

l_1: $y = k_1 x + b_1$ и

l_2: $y = k_2 x + b_2$

можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

- при этом

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1,$$

т.е. ,

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2 .$$

- Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- **Пример.** Записать уравнения прямых, проходящих через точку *M*(– 2, 1) параллельно и перпендикулярно прямой

$3x – 4y + 12 = 0.$

- **Решение.** Перепишем общее уравнение прямой 3x – 4y + 12 = 0, выразив из него переменную y:

$$l: \quad y = \frac{3}{4}x + 3$$

- Получили уравнение прямой с угловым коэффициентом k = 3/4. Запишем уравнение прямой $l_1 \| l$ и проходящей через точку $M(-2, 1)$. Поскольку для параллельных прямых угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k = \frac{3}{4}$$

- то

$$y-1=\frac{3}{4}(x+2)$$

или

$$4y-4=3x+6,$$

$$3x-4y+10=0.$$

- Составим уравнение прямой $l_2 \perp l$, проходящей через точку M(– 2,1). Так как угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением

$$k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{4}{3}$$

то

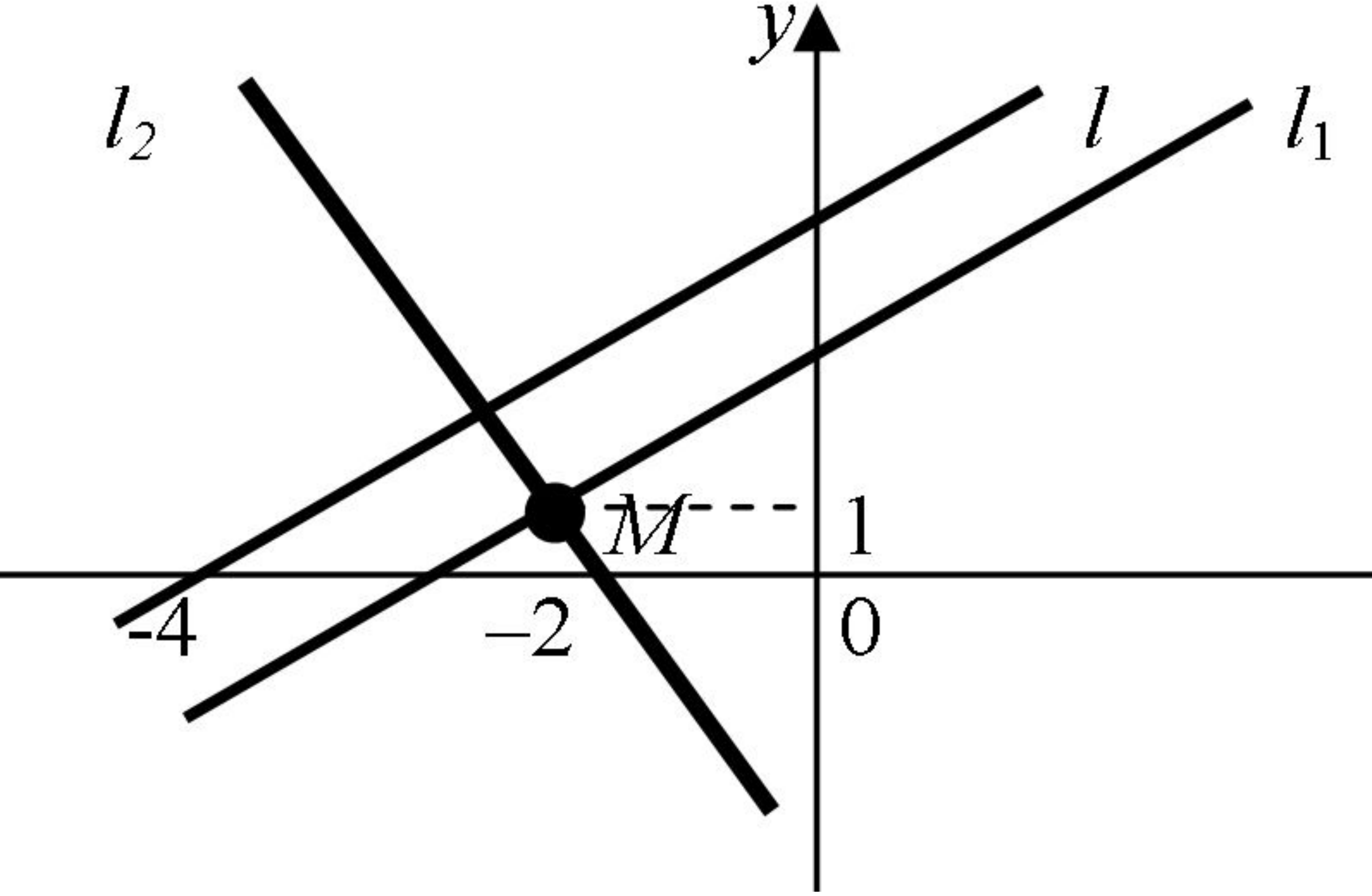
$$y-1=-\frac{4}{3}(x+2)$$

или

$$3y-3=-4x-8,$$

$$4x+3y+5=0.$$

- Прямые изображены на рис.


y
l_2
l
l_1
M
1
-4
−2
0