Лекция 3: Основные законы распределения, применяемые при обработке данных научного эксперимента

1. Нормальное распределение
2. Равномерное распределение
3. Логарифмически нормальное распределение
4. Экспоненциальное распределение
5. Распределение Вейбулла

1 Нормальное распределение $N(\mu, \sigma)$

Один из основных законов распределения в прикладной математической статистике. Во многом это следствие ЦПТ.

ЦПТ: *распределение суммы независимых случайных величин с любым исходным распределением будет нормальным, если число слагаемых достаточно велико, а вклад каждого в сумму – мал.*

ЦПТ соответствует многим реальным физическим процессам.

При возрастании объема выборки большинство распределений стремится к нормальному => $N(\mu, \sigma)$ может быть использовано для аппроксимации таких распределений.

Примеры применения $N(\mu, \sigma)$:

- распределение погрешности измерений (кроме приборной погрешности);

- в теории распространения радиоволн для описания ***мерцания*** - *флуктуаций параметра относительно его среднего значения*;

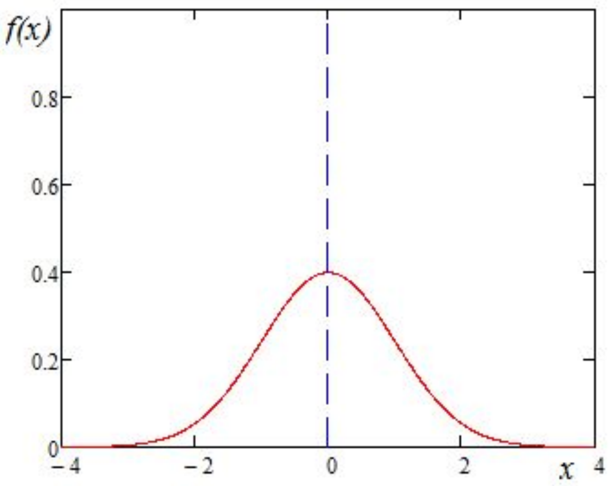
- в неявном виде для описания параметра, представленного в логарифмическом масштабе (заменяя явный вид логнормального распределения);

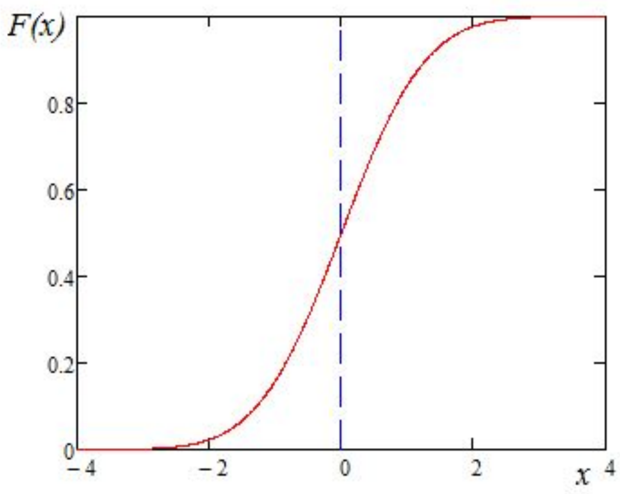
- в теории надежности для описания износовых отказов, интенсивность которых со временем возрастает (обычно)

Свойства *N*(μ, σ):

Обозначение	N(μ, σ)
Параметры	μ, σ
Плотность	$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
Функция распределения	$F(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dt$
Мат. ожидание	$M(x)=\mu$
Дисперсия	$D(x)=\sigma^2$
Коэффициент асимметрии	$a_3=0$
Коэффициент эксцесса	$a_4=0$ («сдвинутый» на 3)
Мода	Mo=μ
Медиана	Me=μ

Графики $N(0,1)$ – стандартизированного нормального распределения:





Штрихпунктиром – *Mo* и *Me*

плотность вероятности функция распределения

$N(\mu, \sigma)$ симметрично относительно точки $x=\mu$, оба параметра совпадают со средним значением и стандартным отклонением.

μ – коэффициент сдвига;

σ – коэффициент масштаба.

Значения $F(x)$ распределения $N(0,1)$ приводятся в справочниках виде таблиц.

Также приводятся таблицы значений функции (интеграла) Лапласа

$$\Phi(z) = 2F(z) - 1, \qquad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Для $N(0,1)$

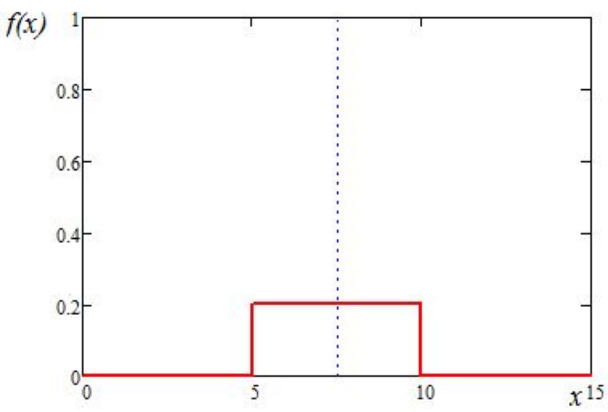
$$F(-z) = 1 - F(z)$$

Квантиль u_p нормально распределенной случайной величины $N(\mu, \sigma)$ связан с квантилью случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, u_p^c, соотношением $u_p = \mu + u_p^c$. Значения квантиля u_p^c задается таблично.

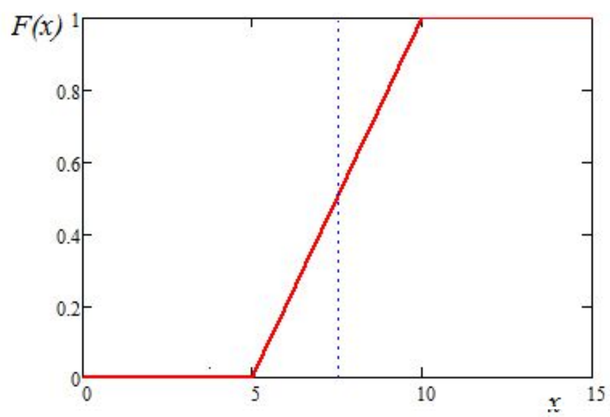
2 Равномерное распределение *U*(*a*, *b*)

Равномерному распределению подчиняются случайные величины, имеющие одинаковую вероятность появления (например, погрешность измерений с округлением).

Сумма *n* независимых равномерно распределенных случайных величин описывается нормальным распределением уже при $n \geq 5$. Функция распределения любой случайной величины y-$F(y)$ сама распределена равномерно на отрезке [0,1].



плотность вероятности



функция распределения

Штрихпунктиром – *Mo*

Свойства *U*(*a*, *b*):

Обозначение	*U*(*a*, *b*)
Параметры	*a*, *b*
Плотность	$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & x<a;x>b\end{cases}$
Функция распределения	$F(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$
Мат. ожидание	$M(x)=0{,}5\cdot(b+a)$
Дисперсия	$D(x)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
К-т асимметрии	$a_3=0$
К-т эксцесса	$a_4=-1{,}2$
Мода	$Mo=\dfrac{b+a}{2}=M(x)$
Медиана	не определена

3 Логарифмически нормальное распределение $LN(\mu, \sigma)$

Если сл.в. Y распределена нормально, то сл.в. $x=\ln(Y)$ подчинена логарифмически нормальному (логнормальному) закону распределения.

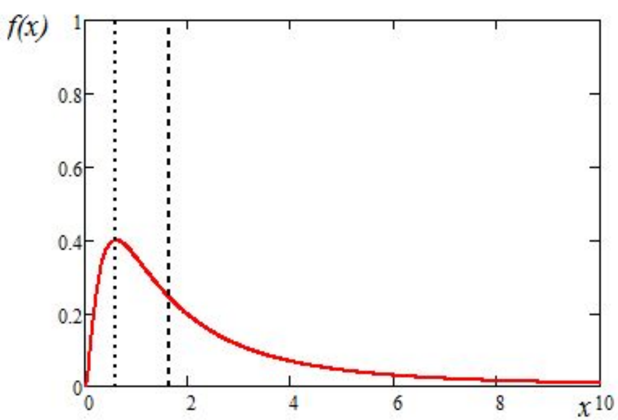
Значения логнормальной случайной величины формируются под воздействием очень большого числа взаимно независимых факторов:

- воздействие каждого отдельного фактора «равномерно незначительно» и равновероятно по знаку;
- прирост, вызываемый действием каждого следующего фактора, пропорционален уже достигнутому к этому моменту значению исследуемой величины.

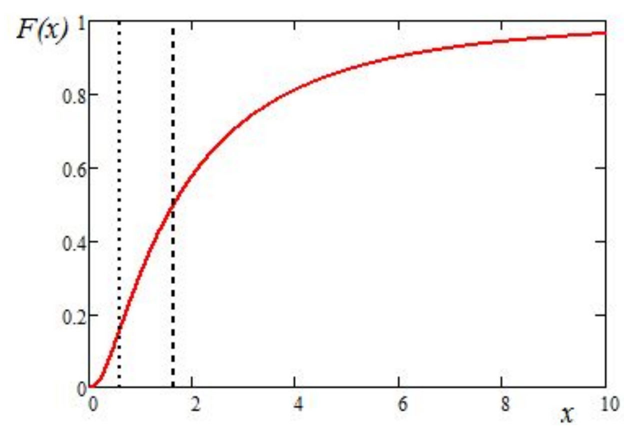
Примеры применения $LN(\mu, \sigma)$:

- в распространении радиоволн: описание параметров, связанных с мощностью, напряженностью поля, или со временем (длительность замираний);

- описание износовых отказов. У многих невосстанавливаемых электронных приборов (некоторые типы электронных ламп, полупроводниковые приборы) наработка на отказ распределена логнормально.



плотность вероятности



функция распределения

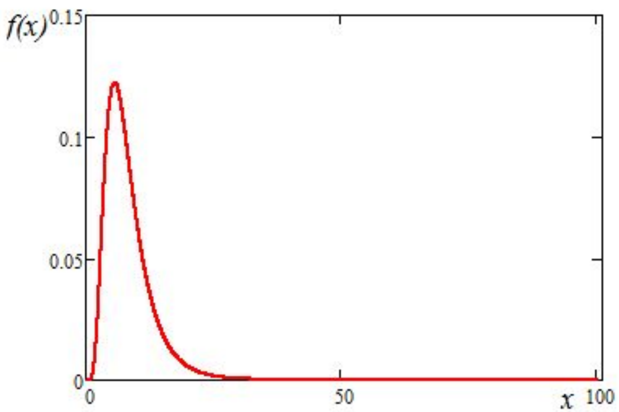
Пунктиром – Mo, штрихпунктиром – Me

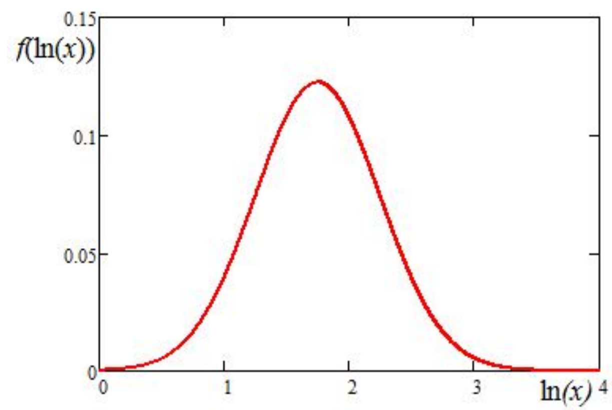
Свойства $LN(\mu, \sigma)$:

Обозначение	$LN(\mu, \sigma)$
Параметры	μ, σ
Плотность	$f(x;\mu,\sigma)=\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
Функция распределения	$F(x;\mu,\sigma)=\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dt$
Мат. ожидание	$M(x)=\exp\left(\mu+0{,}5\cdot\sigma^2\right)$ $D(x)=\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left(e^{\sigma^2}-1\right)$
Дисперсия	$a_3=\left(e^{\sigma^2}-1\right)^{0{,}5}\left(e^{\sigma^2}+2\right)$
Коэффициент асимметрии	$a_4=3+\left(e^{\sigma^2}-1\right)\left(e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}+6\right)-3$
Коэффициент эксцесса	$Mo=\exp\left(\mu-\sigma^2\right)$ $Me=e^{\mu}$
Мода	
Медиана	

График плотности вероятности *LN*(μ, σ) может быть преобразован в график плотности вероятности для *N*(μ, σ), если в качестве значений случайной величины взять натуральный логарифм ее значений:

LN(2, 0,5):





Асимметрия положительна.
Произведение независимых сл.в., подчиняющихся логнормальному закону, также логнормально.

4 Экспоненциальное распределение Exp(b)

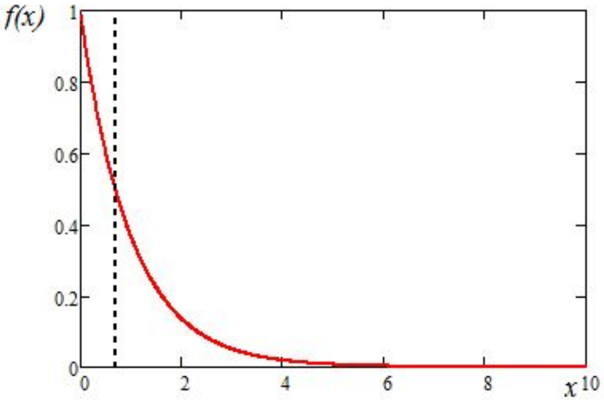
Одно из наиболее часто встречающихся распределений в теории надежности.

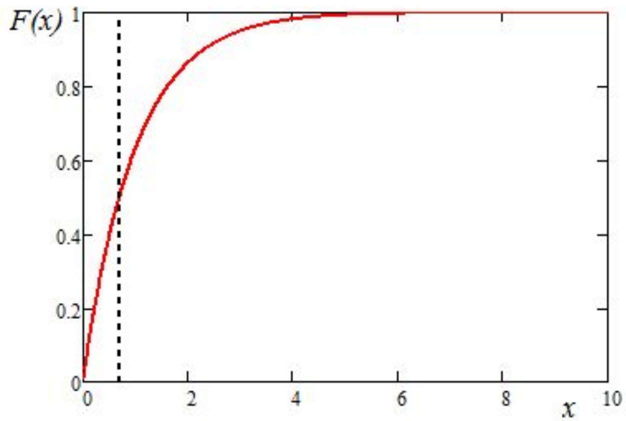
Примеры использования:

- описание внезапных отказов, когда износом изделия можно пренебречь;
- наработка на отказ многих невосстанавливаемых изделий;
- наработка на отказ между соседними отказами у восстанавливаемых изделий в случае простейшего потока;
- наработка на отказ большой многокомпонентной системы при любом распределении наработки на отказ компонентов системы.

Свойства *Exp*(*b*):

Обозначение	*Exp*(*b*)
Параметры	*b*
Плотность	$f(x;b)=\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{x}{b}\right),\ x\geq 0$
Функция распределения	$F(x;b)=1-\exp\left(-\frac{x}{b}\right),\ x\geq 0$
Мат. ожидание	b
Дисперсия	b^2
Коэффициент асимметрии	2
Коэффициент эксцесса	9
Мода	0
Медиана	$b\ln 2$





Штрихпунктиром – Ме

плотность вероятности функция распределения

b – коэффициент масштаба.

Экспоненциальное распределение – частный случай распределения Вейбулла. Отличительная особенность – постоянство интенсивности отказов $\lambda=1/b=\mathrm{const}$ – в теории надежности интерпретируется как независимость вероятности отказа от наработки, что эквивалентно отсутствию износа.

5 Распределение Вейбулла $W(\alpha, \beta, \mu)$

Используется при многих расчетах надежности.

Распределению Вейбулла подчиняется наработка на отказ многих невосстанавливаемых электронных приборов, например, электронных ламп, полупроводниковых приборов, некоторых приборов СВЧ.

Имеет три параметра, однако часто говорят либо о двух (μ=0), либо об одном – параметре β.

Смысл параметров:
α – параметр масштаба;
β – параметр формы;
μ – параметр сдвига.

Свойства $W(\alpha, \beta, \mu)$:

Плотность вероятности

$$f(x;\alpha,\beta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}}(x-\mu)^{\beta-1}\exp\left(-\left(\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta}\right), & x\geq\mu;\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x;\alpha,\beta,\mu)=\begin{cases}1-\exp\left(-\left(\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta}\right), & x\geq\mu;\\ 0, & x<\mu.\end{cases}$$

Влияние параметра формы на график плотности вероятности:

$0<\beta<1$	плотность похожа на экспоненциальный закон
$\beta=1$	вырождение в экспоненциальный закон
$1<\beta<2,6$	положительная асимметрия графика
$\beta=2$	вырождение в закон Рэлея
$2,6<\beta<3,7$	график практически симметричен
$\beta>3,7$	отрицательная асимметрия графика