Глава 2
Кинематика твердого тела

§ 1. Поступательное движение твердого тела

§ 2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

2.1. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

§ 3. Плоско-параллельное движение твердого тела (ППД)

3.1. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Угловая скорость и угловое ускорение

3.2. Определение траекторий и скоростей точек плоской фигуры

3.3. Теорема о проекциях скоростей

3.4. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

3.5. Частные случаи определения МЦС

3.6. Определение ускорений точек при ППД

§ 4. Сферическое движение твердого тела

Кинематика твердого тела

Две основные задачи кинематики твердого тела

- Задание движения твердого тела и определение кинематических характеристик тела в целом
- Определение кинематических характеристик точек тела

Задать движение твердого тела – значит, *указать способ определения положения каждой точки в каждый момент времени*

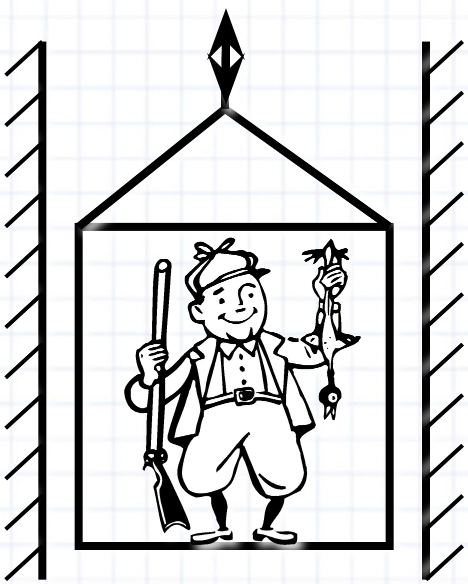
Число независимых параметров, определяющих положение точки тела или системы тел, называется ***числом степеней свободы*** точки, твердого тела или системы тел

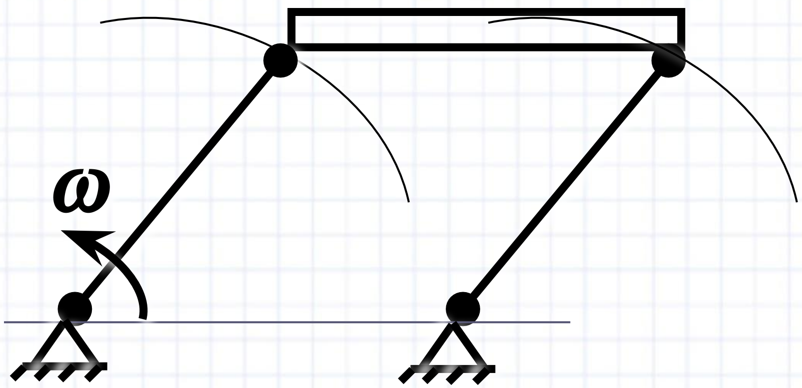
Виды движения твердого тела

- Поступательное движение
- Вращательное движение
- Плоско-параллельное движение
- Сферическое движение
- Общий случай движения твердого тела

§ 1. Поступательное движение твердого тела

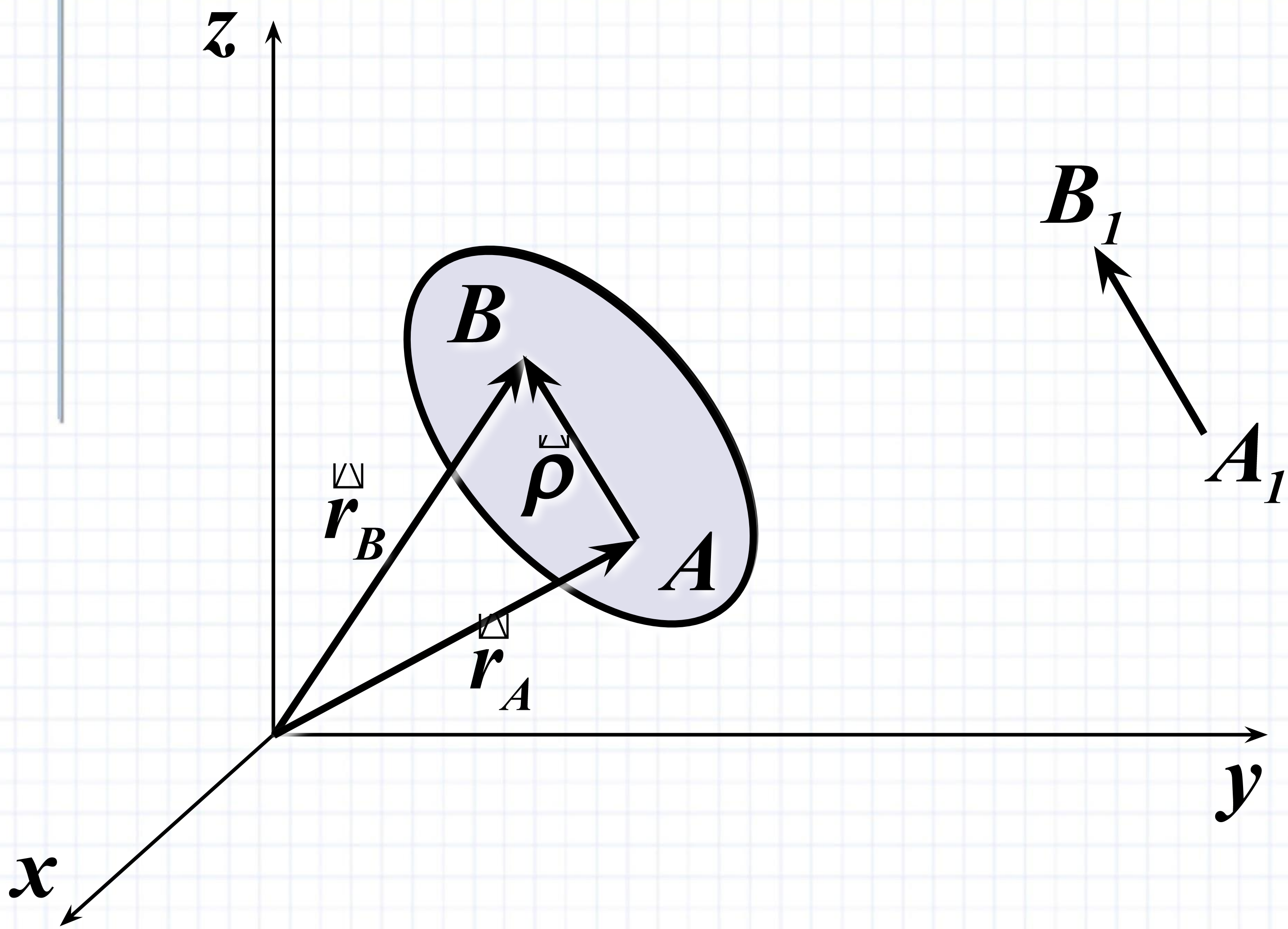
Тело совершает поступательное движение, если любая прямая, проведенная в теле во все время движения, остается параллельной своему первоначальному положению





Теорема, определяющая свойства поступательного движения

При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в любой момент времени одинаковые по величине и по направлению скорости и ускорения

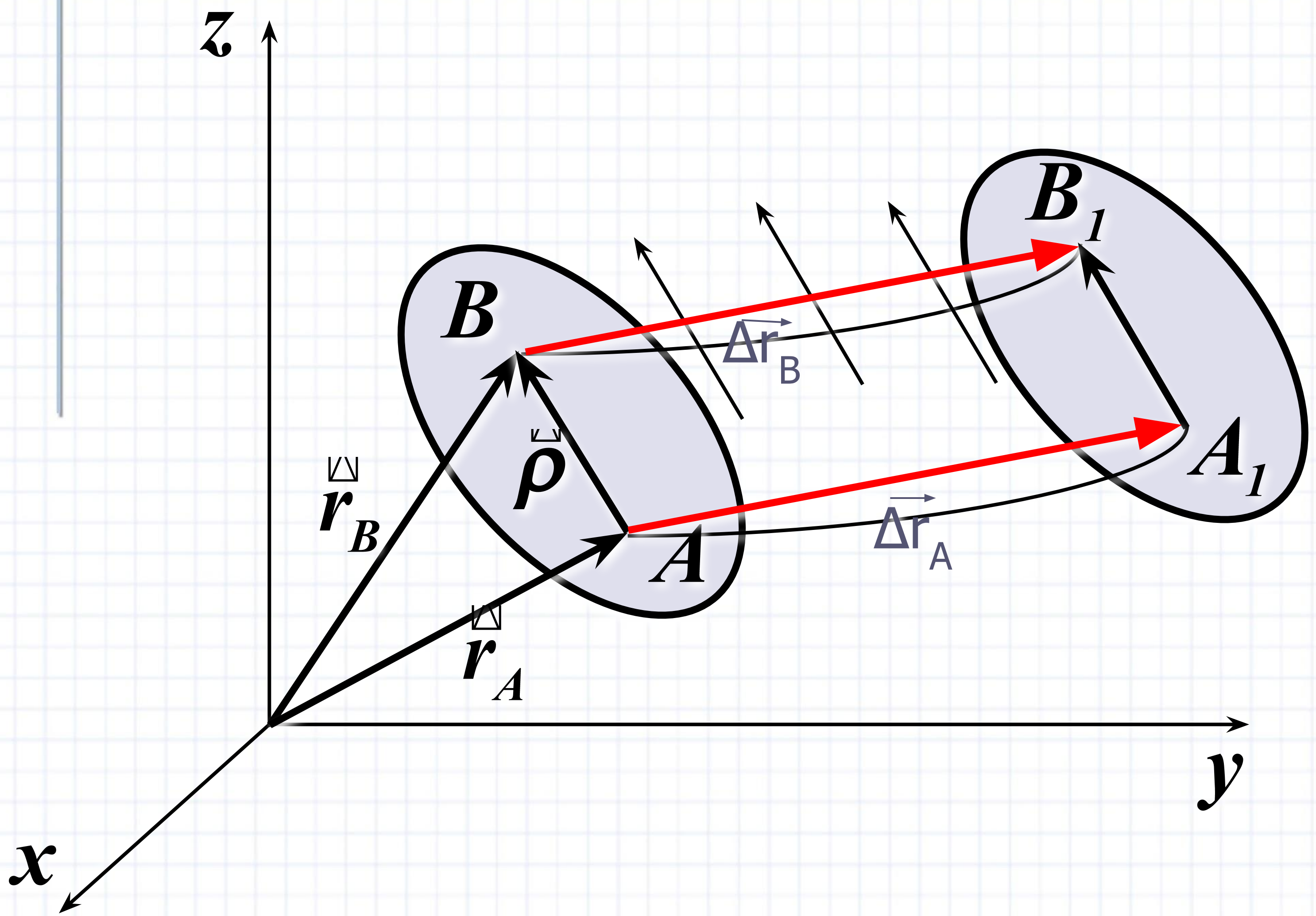


z
B
B_1
$\vec{\rho}$
$\vec{r}_B$
A
A_1
$\vec{r}_A$
y
x

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho}$$

$$\bar{\rho} = const$$

$$\overline{AB}\| \overline{A_1B_1}$$



z
y
x
B
A
B1
A1
rB
rA
ρ
Δr B
Δr A

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho} \qquad \bar{\rho} = const$$

$$\Delta\bar{r}_B = \Delta\bar{r}_A$$

Найдем скорости точек А и В

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}$$

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \underbrace{\cancel{\frac{d\bar{\rho}}{dt}}}_{=0} = \bar{V}_A$$

$$\bar{a}_B = \frac{d\bar{V}_B}{dt} = \frac{d\bar{V}_A}{dt} = \bar{a}_A$$

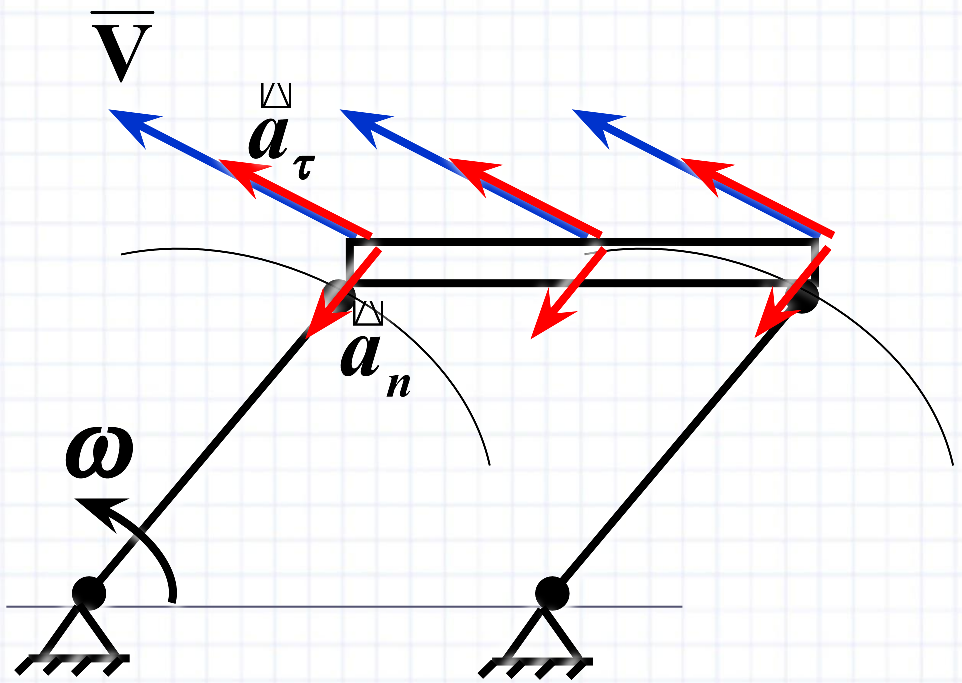
$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{\rho} \qquad \bar{\rho} = const$$

$$\bar{V}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{V}_A$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A, \;\; \bar{a}_B = \bar{a}_A$$

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость называют *скоростью поступательного движения*, а ускорение – *ускорением поступательного движения*

Скорости и ускорения точек движущегося тела образуют векторные поля, однородные, но не стационарные



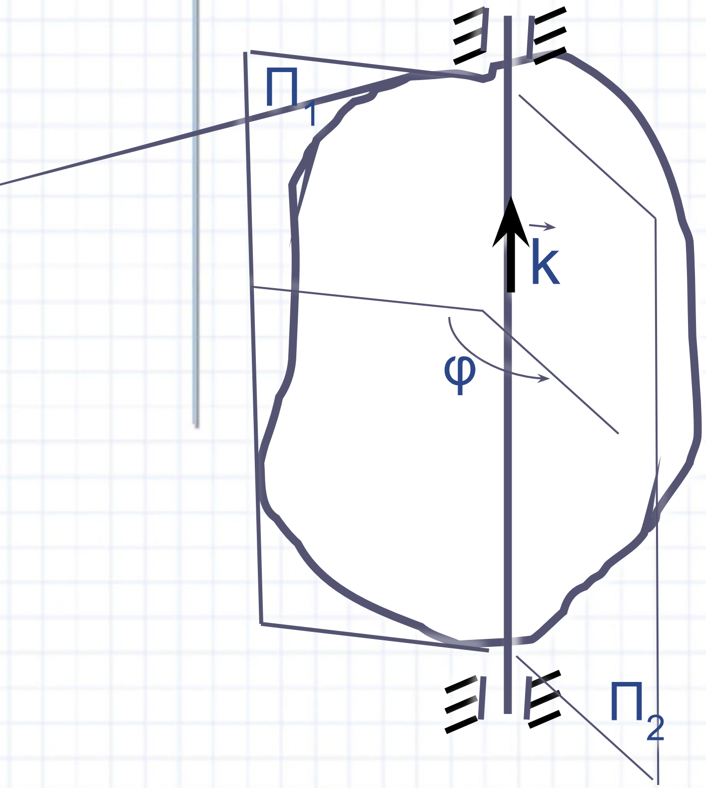
§ 2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела с двумя неподвижными точками называется *вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси*

Прямая, точки которой остаются неподвижными, называется ***осью вращения***

При вращении твердого тела все точки тела описывают окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения и с центрами на ней

Определим положение вращающегося тела



Положение тела однозначно определяется, если задан угол поворота φ = φ(t)

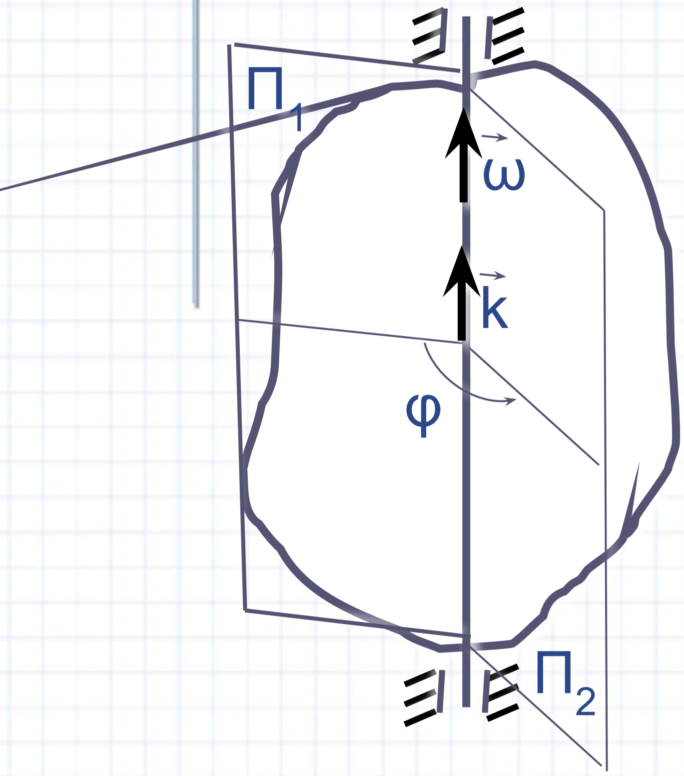
$\vec{k}$ – единичный вектор, направленный по оси вращения

Будем считать, что угол φ возрастает, если с конца положительного направления оси вращения видим вращение тела происходящим против хода часовой стрелки

В СИ [φ] = *рад, оборотах*

φ = φ(t) – уравнение движения твердого тела при его повороте вокруг оси

Определим угловую скорость твердого тела



Среднюю угловую скорость тела определяют

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Мгновенная угловая скорость – векторная величина, равная по модулю

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

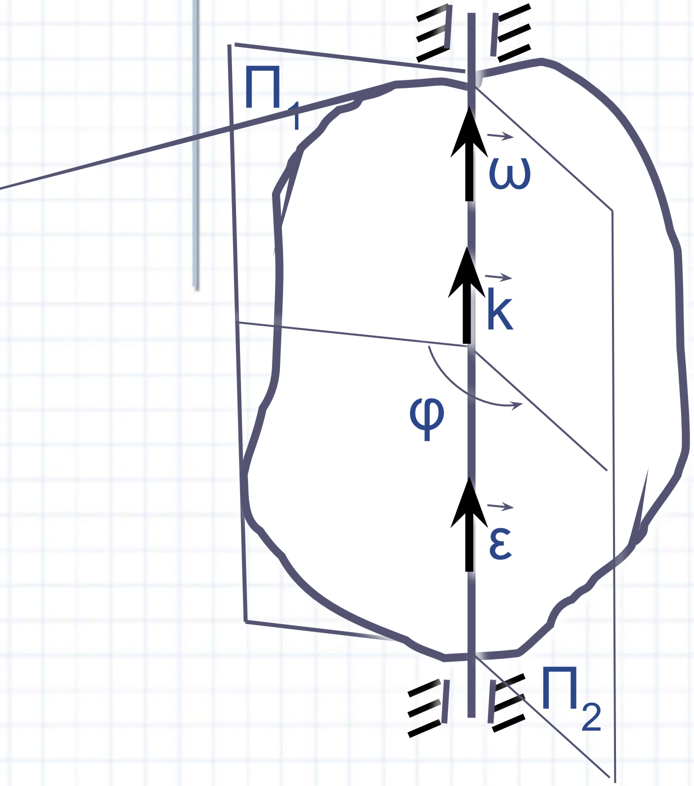
по направлению – вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки

В технике при равномерном вращении пользуются *n* – *числом оборотов в минуту*

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60\ c} = \frac{\pi \cdot n}{30} c^{-1} \approx 0.1 \cdot n \frac{рад}{c}$$

В системе СИ [ω] = рад/с, $с^{-1}$, в других единицах – оборот/с

Определим угловое ускорение твердого тела



Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости

$$\overline{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t}$$

Мгновенное угловое ускорение

$$\overline{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \dot{\overline{\omega}}$$

Если ε совпадает с ω, то движение ускоренное, если ε противоположно ω – движение замедленное

В системе СИ [ε] = рад/с^2, с$^{-2}$

Равномерное вращение

Если $\omega = const$,

то вращение называется ***равномерным***

Закон равномерного вращения твердого тела

$$d\varphi = \omega dt; \Rightarrow \; \varphi = \omega t + C,$$

C – константа интегрирования

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Равнопеременное вращение

Если $\varepsilon = const$,

то вращение называется ***равнопеременным***

Закон равнопеременного вращения твердого тела

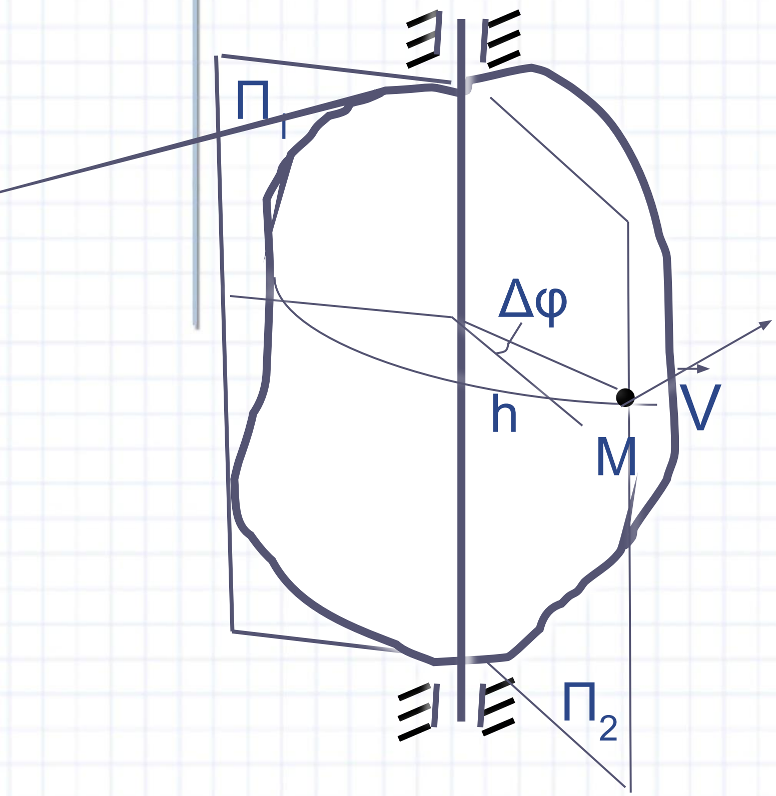
$$d\omega = \varepsilon dt; \Rightarrow \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

проинтегрируем еще раз, т.к. $\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{dt} \Rightarrow$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Если ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение равноускоренное, если разные – равнозамедленное

Скорости точек вращающегося твердого тела



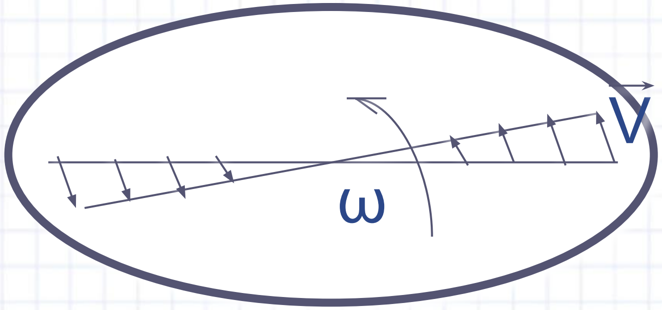
За dt точка М совершает вдоль траектории элементарное перемещение ds

$$ds = h \cdot d\varphi$$

Мгновенная скорость точки М по величине

$$V = \frac{ds}{dt} = \mathrm{h} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} = \mathrm{h} \cdot \omega, \ (1)$$

по направлению – по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения и точку М



Поле скоростей точек вращающегося тела

Ускорения точек вращающегося твердого тела

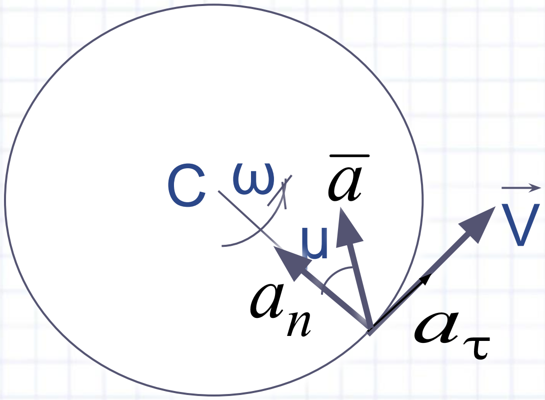
Вспомним, что $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$ и $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$

Здесь $\rho = h, \Rightarrow a_\tau = h\dfrac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon \; (2)$

и $a_n = \dfrac{(h \cdot \omega)^2}{h} = h \cdot \omega^2 \; (3)$

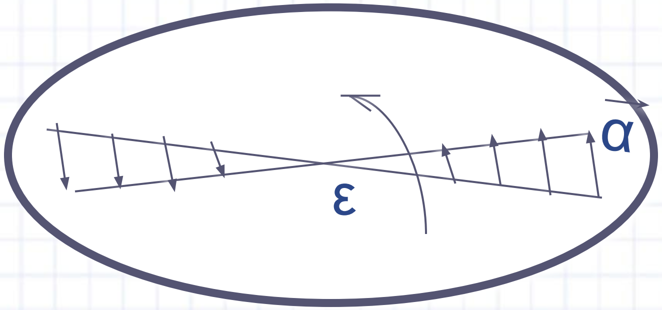
Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \; (4)$

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \; (5)$$



μ – угол отклонения вектора ускорения от радиуса окружности, описываемой точкой

Поле ускорений точек вращающегося тела



Формулы (1)–(5) позволяют определить скорость и ускорение любой точки вращающегося тела, если известен закон движения и расстояние данной точки от оси вращения

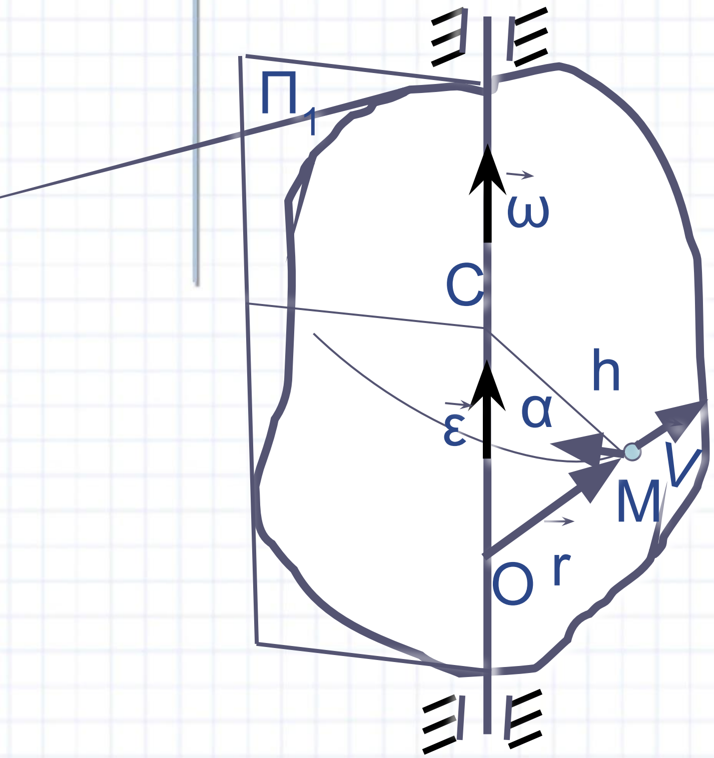
И наоборот, зная движение одной точки вращающегося тела, можно найти движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом

Леонард Эйлер (1707 –1783) показал, что скорость вращающейся точки тела можно определить из векторного произведения угловой скорости и радиуса-вектора этой точки.

В 19 лет он приехал в Россию, где в 26 лет стал академиком Российской Академии Наук, прожив 15 лет, уехал в Германию.

Вернулся опять в Россию при Екатерине II и создал великую русскую школу математиков

Векторы скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела



$$\left|\overline{\mathbf{V}}\right| = \left|\omega\right| \cdot h \quad = \left|\omega\right| \cdot r \sin\alpha, \qquad \overline{\mathbf{V}} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

Возьмем производные от обеих частей уравнения

$$\frac{d\overline{\mathbf{V}}}{dt} = \left(\frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}\right)$$

$$\overline{a} = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \overline{\mathbf{V}}\right)$$

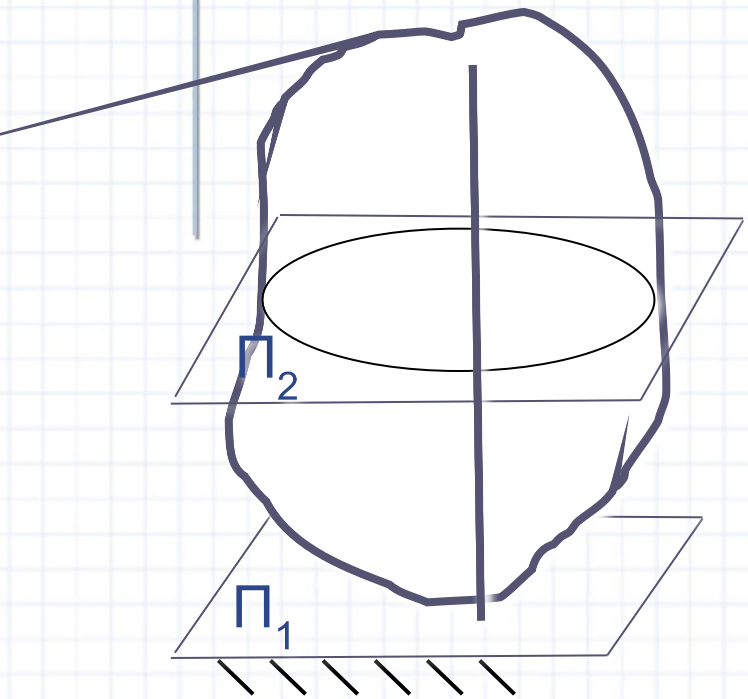
Проанализируем выражение

$$\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} \qquad \overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{\mathbf{V}}$$

§ 3. Плоско-параллельное движение твердого тела

Плоско-параллельным (или плоским) ***движением*** (ППД) твердого тела называется такое, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости

Как частный случай ППД можно рассматривать вращательное движение твёрдого тела вокруг оси; катящиеся колеса по прямолинейному участку пути; движение шатуна в кривошипно-шатунном механизме



При ППД все точки тела, лежащие на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости $П_1$, имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения, т.к. эта прямая движется поступательно, оставаясь всегда ⊥ к плоскости $П_1$

Достаточно исследовать движение точек этого тела, лежащих в какой-либо плоскости, || неподвижной $П_1$

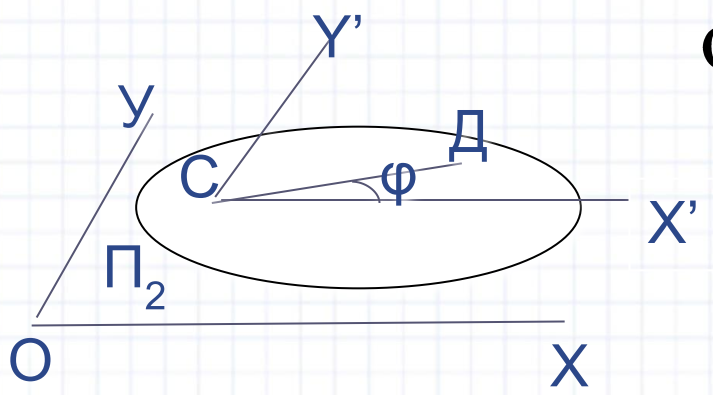
Другими словами, достаточно исследовать движение плоской фигуры, образуемой сечением тела плоскостью $П_2$

Положение фигуры в плоскости $П_2$ по отношению к неподвижной системе координат ОХУ определяется положением какого-либо отрезка СД, принадлежащим фигуре

Тогда достаточно исследовать движение точек этого отрезка. Пусть точка С – полюс

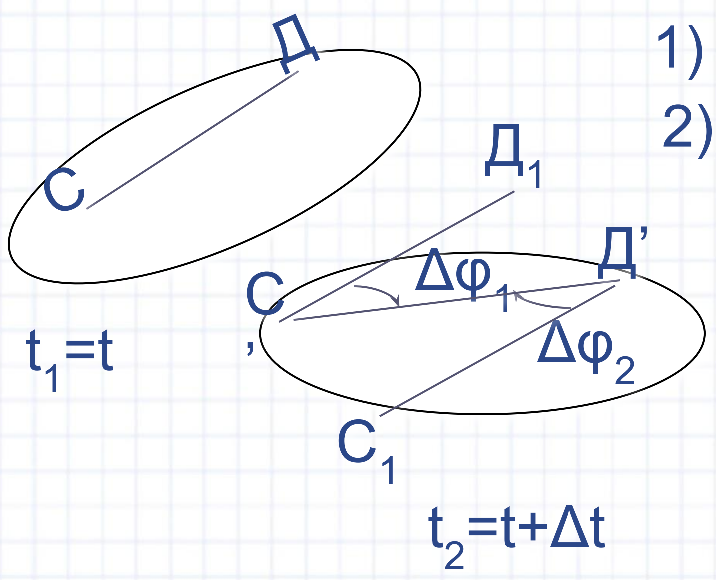
$$\left.\begin{aligned} x_C &= x_C(t) \\ y_C &= y_C(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

(1) - уравнения плоско-параллельного движения твердого тела



3.1. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Угловая скорость и угловое ускорение

Теорема. Всякое конечное перемещение плоской фигуры в её плоскости может быть составлено из поступательного перемещения вместе с полюсом и вращательного перемещения вокруг полюса



1) С – полюс, тогда СД—>С’Д$_1$⌒С’Д’

2) Д – полюс. тогда СД—>С$_1$Д’⌒С’Д’

$$\boxed{\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2}$$

Поступательное перемещение зависит от выбора полюса, вращательное не зависит от выбора полюса

Анализируя (1), имеем, что движение плоской фигуры в её плоскости можно представить как совокупность двух движений: поступательного вместе с точкой, выбранной за полюс, и вращательного вокруг этого полюса

Для характеристики вращательного движения вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, введем понятия угловой скорости ω и углового ускорения ε плоской фигуры

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

ω и ε не зависят от выбора полюса, т.к. Δφ не зависит от выбора полюса

Угловая скорость и угловое ускорение – векторы $\overline{\omega}, \ \overline{\varepsilon}$

3.2. Определение траекторий и скоростей точек плоской фигуры

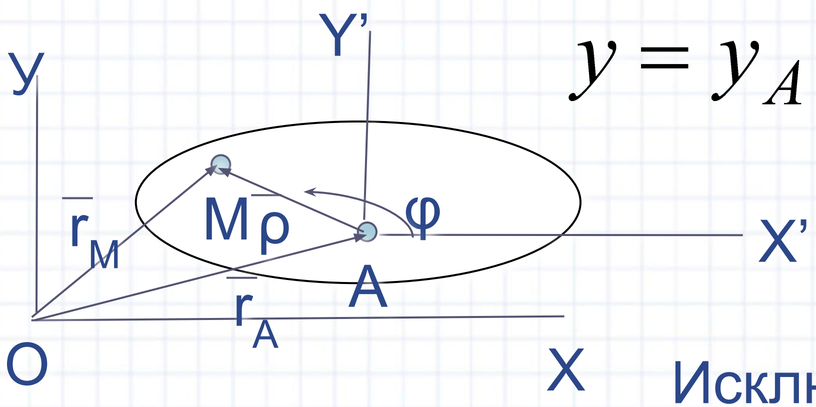
А – полюс; М – произвольная точка плоской фигуры;

АX'Y' – подвижная система координат, движется поступательно

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{\rho} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + \rho\cos\varphi \\ y &= y_A + \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

- уравнения траектории точки М в параметрическом виде



Исключив время, получим обычное уравнение траектории

Скорости точек плоской фигуры

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}; \qquad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\mathbf{V}}_A; \qquad \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{\mathbf{V}}_{MA};$$

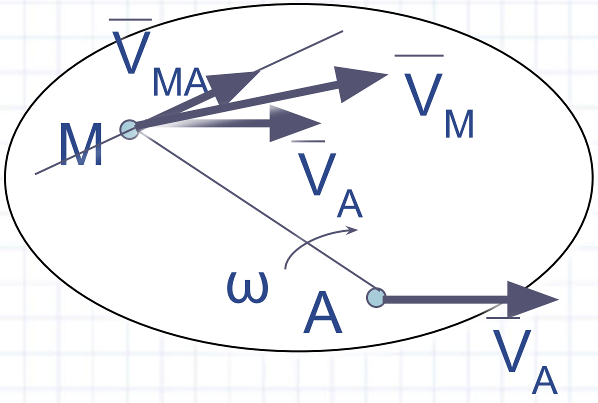
$$\boxed{\bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{M}} = \bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{A}} + \bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{MA}}} \qquad (3)$$

$$\left|\mathbf{V}_{MA}\right| = \omega \cdot MA; \qquad \bar{\mathbf{V}}_{\mathrm{MA}} \perp \overline{\mathrm{MA}} \qquad (4)$$

Скорость любой точки М плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей какой-либо т.А, принятой за полюс, и скорости т.М при её вращении вместе с телом вокруг полюса А.

Вращательная скорость V_{MA} определяется численно и по направлению так же, как если бы тело совершало вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку А перпендикулярно плоской фигуре

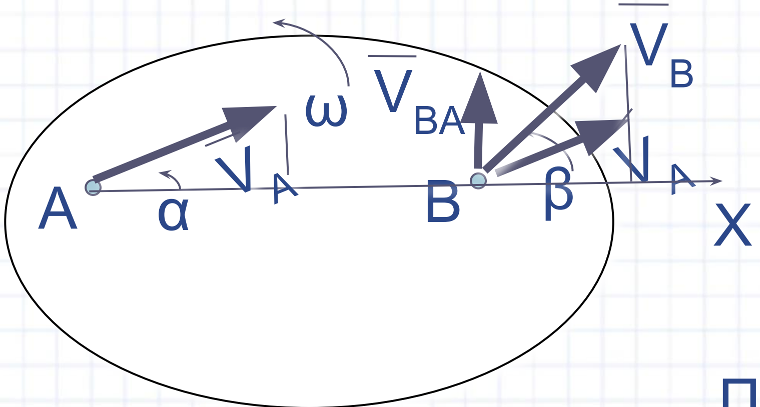
$$\mathbf{V}_M = \sqrt{\mathbf{V}_A^2 + \mathbf{V}_{MA}^2 + 2\mathbf{V}_A\mathbf{V}_{MA}\cos\left(\widehat{\overline{\mathbf{V}}_A, \overline{\mathbf{V}}_{MA}}\right)}; \quad (5)$$



3.3. Теорема о проекциях скоростей

Найдем скорость точки В. Пусть точка А – полюс

$$\overline{\mathbf{V}}_B = \overline{\mathbf{V}}_A + \overline{\mathbf{V}}_{BA}; \qquad np_{AB}\overline{\mathbf{V}}_B = np_{AB}\overline{\mathbf{V}}_A + \underbrace{\cancel{np_{AB}\overline{\mathbf{V}}_{BA}}}_{0}$$

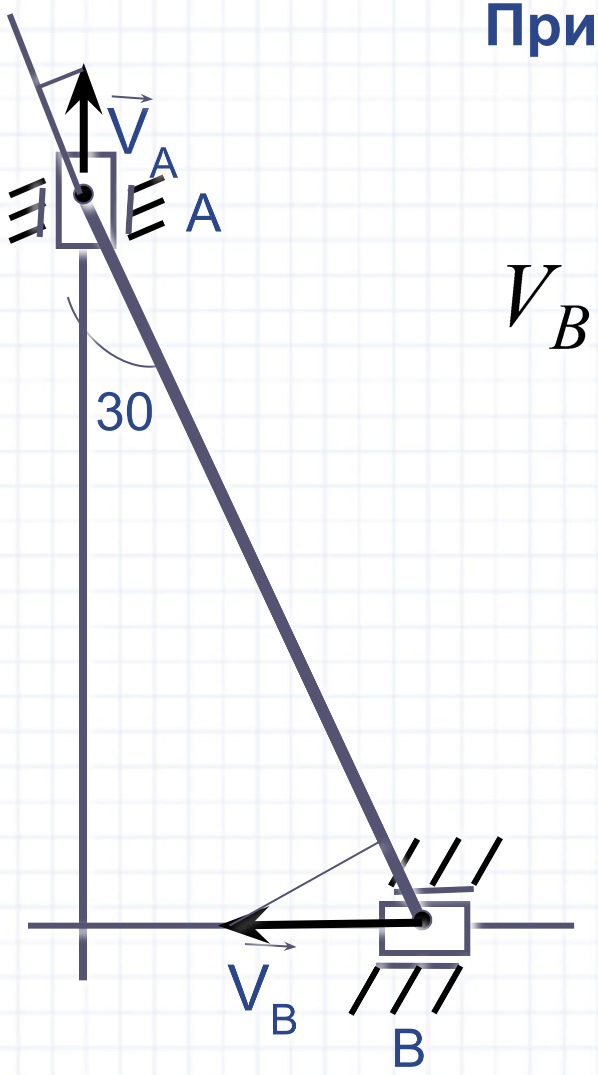


$$\boxed{np_{AB}\overline{\mathbf{V}}_B = np_{AB}\overline{\mathbf{V}}_A} \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_B \cos\beta = \mathbf{V}_A \cos\alpha$$

При плоском движении проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой

Пример



$$V_B \cos 60° = V_A \cos 30°$$

3.4. Мгновенный центр скоростей (мцс)

Мгновенный центр скоростей (мцс) – это такая точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

$(\cdot)P : V_P = 0$

Теорема (без доказательства)
При непоступательном движении плоской фигуры такая точка (мцс) существует и единственна

Выберем мцс за полюс $(\cdot)P$

$$\overline{\mathbf{V}}_M = \underbrace{\overline{\mathbf{V}}_P}_{0} + \overline{\mathbf{V}}_{MP}$$

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{MP};$$

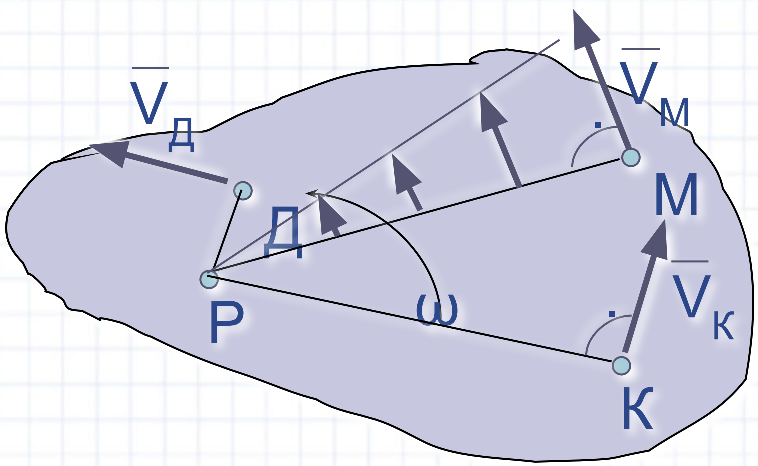
$$\boxed{\mathbf{V}_M = \omega \cdot MP}$$

$$\boxed{\overline{\mathbf{V}}_M \perp MP}$$

Теорема

Скорости всех точек при плоском движении фигуры можно определять точно так же, как при вращательном движении

Роль неподвижной оси выполняет мгновенная ось, проходящая через мцс перпендикулярно плоскости движения



$$V_M = \omega \cdot MP$$

$$V_Д = \omega \cdot ДP \quad ,\Rightarrow,$$

$$V_K = \omega \cdot KP$$

$$\omega = \frac{V_M}{MP} = \frac{V_Д}{ДP} = \frac{V_K}{KP}$$

Выводы

1. Для определения ***мцс*** надо знать только ***направление скоростей двух*** каких-нибудь ***точек*** плоской фигуры (или траектории этих точек)

   МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям (или касательным к траекториям)

2. Для определения ***скорости*** любой точки плоской фигуры надо знать ***модуль*** и ***направление скорости*** какой-нибудь одной точки и ***направление скорости*** другой

   Находят мцс (т. Р), затем величину скорости из формулы $\dfrac{\mathbf{V}_A}{PA} = \dfrac{\mathbf{V}_B}{PB}$, направление – в сторону поворота фигуры. Причём $\overline{\mathbf{V}}_B \perp BP$

3. ***Угловая скорость*** плоской фигуры в каждый момент времени равна отношению ***скорости*** какой-нибудь ***точки*** фигуры к её ***расстоянию от мцс***

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}$$

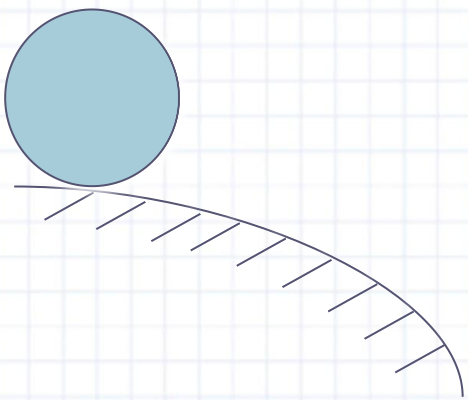
или

$$\omega = \frac{V_{AB}}{AB} = \frac{\left|\overline{V}_B - \overline{V}_A\right|}{AB}$$

т.к. $V_{AB} = \omega \cdot AB$

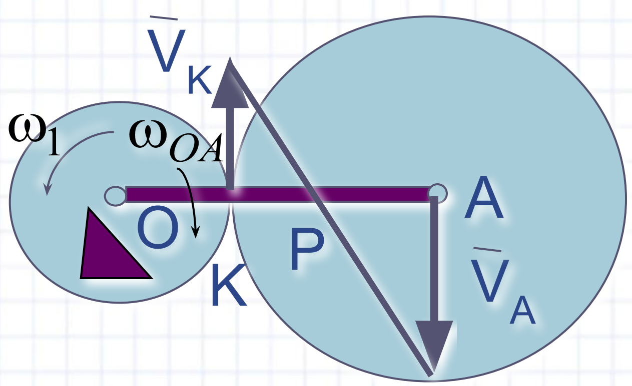
3.5. Частные случаи определения МЦС

1. Интуитивный



Точка соприкосновения неподвижной поверхности и катящегося без скольжения диска есть мцс

2. Из построения



Колесо с закрепленным центром

$$V_O = 0$$

$$\mathbf{V}_A = \omega_{OA} \cdot OA; \qquad \mathbf{V}_K = \omega_1 \cdot OK;$$

$$\mathbf{V}_A = \omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2); \qquad \mathbf{V}_K = \omega_1 R_1$$

$$\overline{\mathbf{V}}_A \perp OA \qquad \overline{\mathbf{V}}_K \perp OK$$

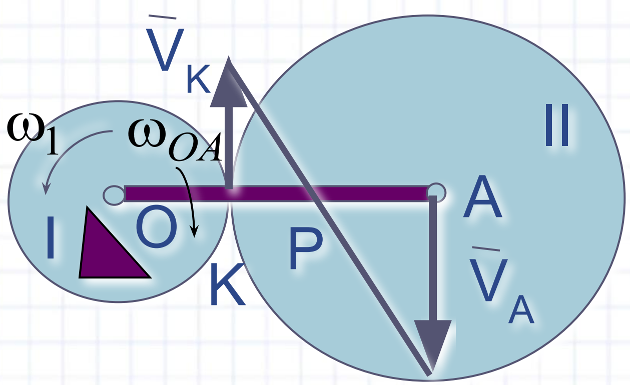
(·)Р – МЦС

(·)А и (·)К принадлежат II колесу, => $\omega_{II} = \dfrac{\mathbf{V}_A}{AP} = \dfrac{\mathbf{V}_K}{KP};$

Свойство пропорции $2 = \dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{4+8}{2+4} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{8-4}{4-2} = \dfrac{4}{2}$

$$\omega_{II} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{AP + KP} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{R_2};$$

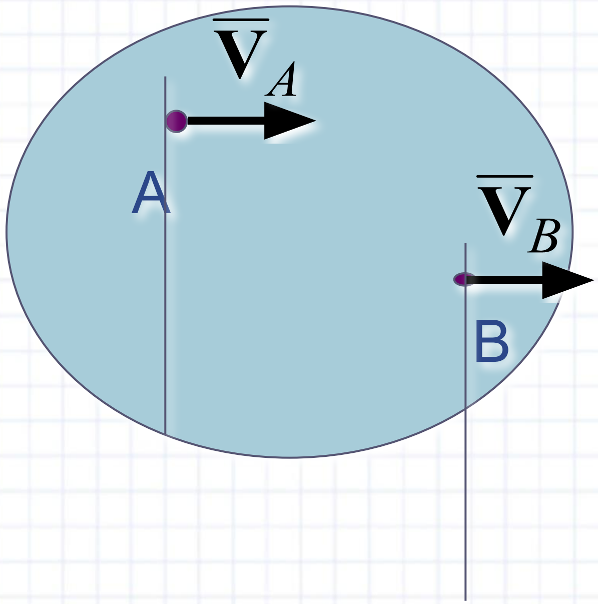
R_2 - радиус II колеса



Если $V_A \parallel V_K$ и АК $\perp$ V_A, то мцс находят из построения

3. Случай мгновенно поступательного движения

Если $V_A \parallel V_B$, но $AB \not\perp V_A$, то мцс в бесконечности



$$\omega = 0 = \frac{V_A}{\infty} = \frac{V_B}{\infty};$$

$$\overline{\mathbf{V}}_A = \overline{\mathbf{V}}_B$$

4. Если известна скорость какой-либо (·)B и угловая скорость тела, то мцс лежит на $\perp$ к V_B на расстоянии BP

$$BP = \frac{\mathbf{V}_B}{\omega}$$

3.6. Определение ускорений точек при ППД

$$\overline{\mathbf{V}}_B = \overline{\mathbf{V}}_A + \overline{\mathbf{V}}_{BA} \quad (7)$$ продифференцируем

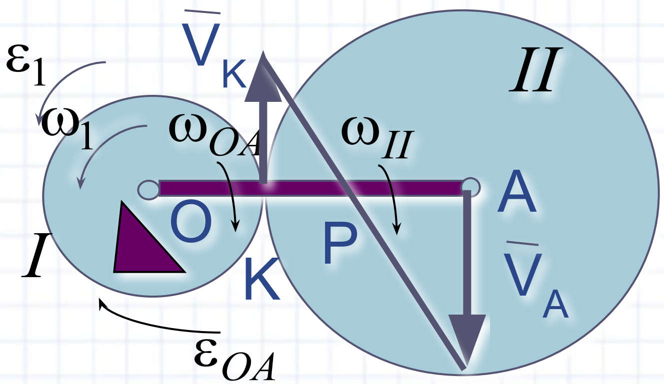
$$\frac{d\overline{\mathbf{V}}_B}{dt} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}_A}{dt} + \frac{d\overline{\mathbf{V}}_{BA}}{dt}, \quad \Rightarrow \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA};$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}; \quad a_{BA} = BA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Пример. Два колеса соединены водилом ОА. I-е колесо вращается с угловой скоростью ω_I относительно неподвижного шарнира О. Водило ОА имеет ω_{OA}, причем вращение в другую сторону. Найти ускорение II-го колеса, зная R_I, R_{II}, ω_I, ω_{OA}, ε_I, ε_{OA}

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_A &= \omega_{OA}\cdot OA; \\ \mathbf{V}_K &= \omega_1\cdot OK; \end{aligned}\right\} \quad \omega_{II} = \frac{\mathbf{V}_A}{AP} = \frac{\mathbf{V}_K}{KP}; \Rightarrow$$

$$\omega_{II} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{AP + KP} = \frac{\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_K}{R_{II}};$$



$$\dot{\omega}_{II} = \frac{\dot{\mathbf{V}}_A + \dot{\mathbf{V}}_K}{R_{II}}; \varepsilon_{II} = \frac{a_A^{\tau} + a_K^{\tau}}{R_{II}};$$

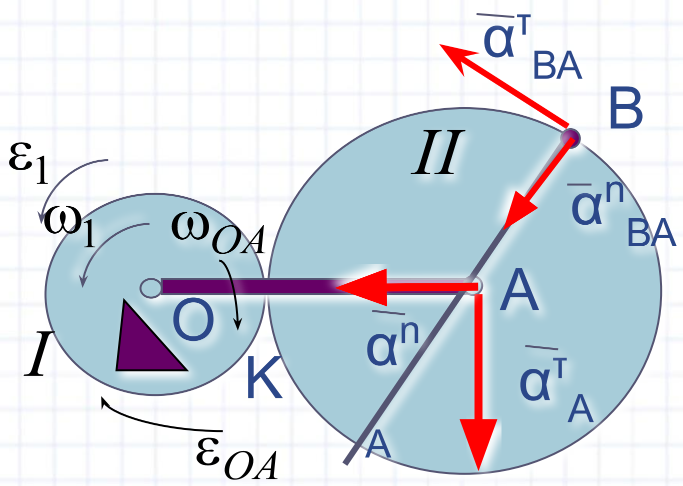
$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA}\left(R_I + R_{II}\right) \quad a_K^{\tau} = \varepsilon_I R_I$$

Можем найти линейное ускорение любой точки колеса II

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n};$$

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA}(R_I + R_{II}) \qquad a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{II} R_{II}$$

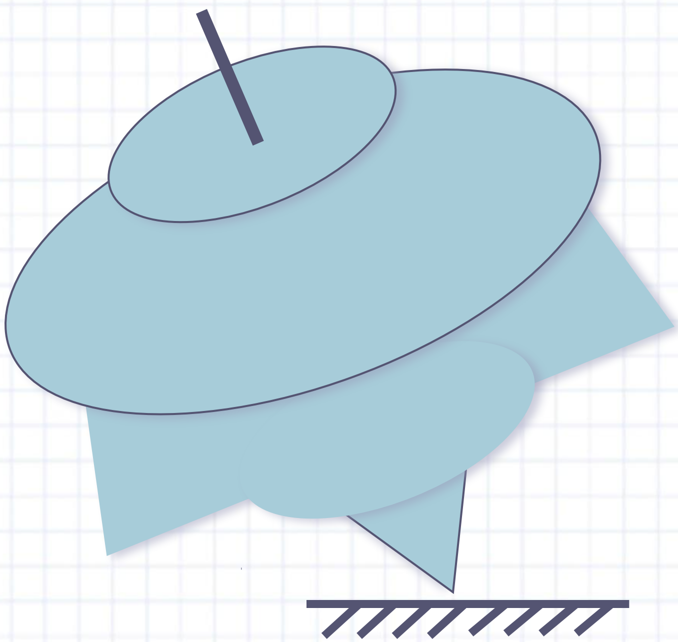
$$a_A^{n} = \omega_{OA}^2 (R_I + R_{II}) \qquad a_{BA}^{n} = \omega_{II}^2 R_{II}$$



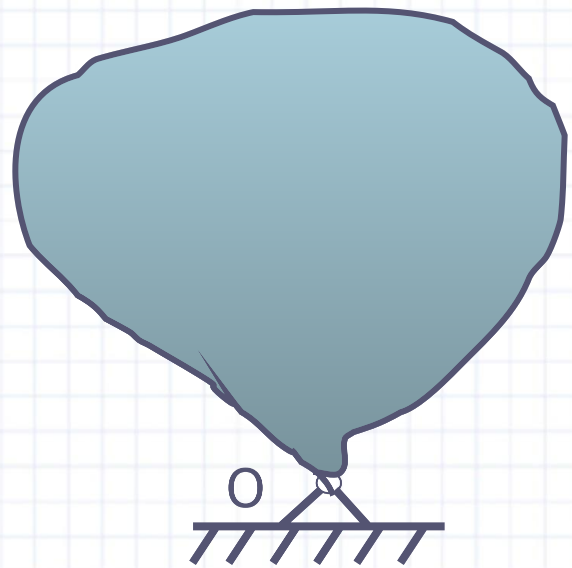
где $\varepsilon_{II} = \dfrac{a_A^{\tau} + a_K^{\tau}}{R_{II}}$

§ 4. Сферическое движение твердого тела

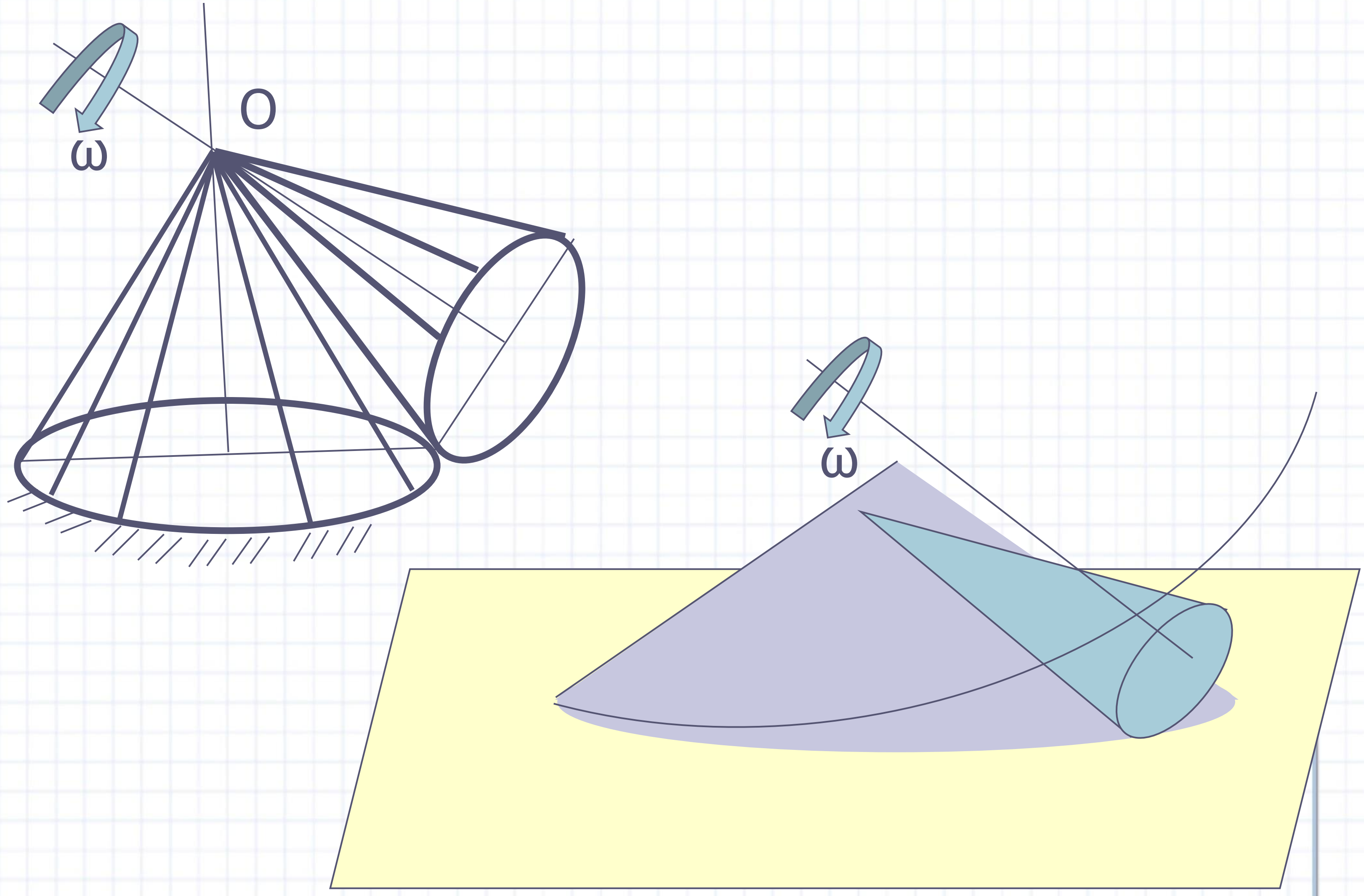
Движ-е тела, когда во все время движения одна его точка остается неподвижной наз-ся ***сферическим движением***



а) волчок;



б) тело, закрепленное шаровым шарниром;

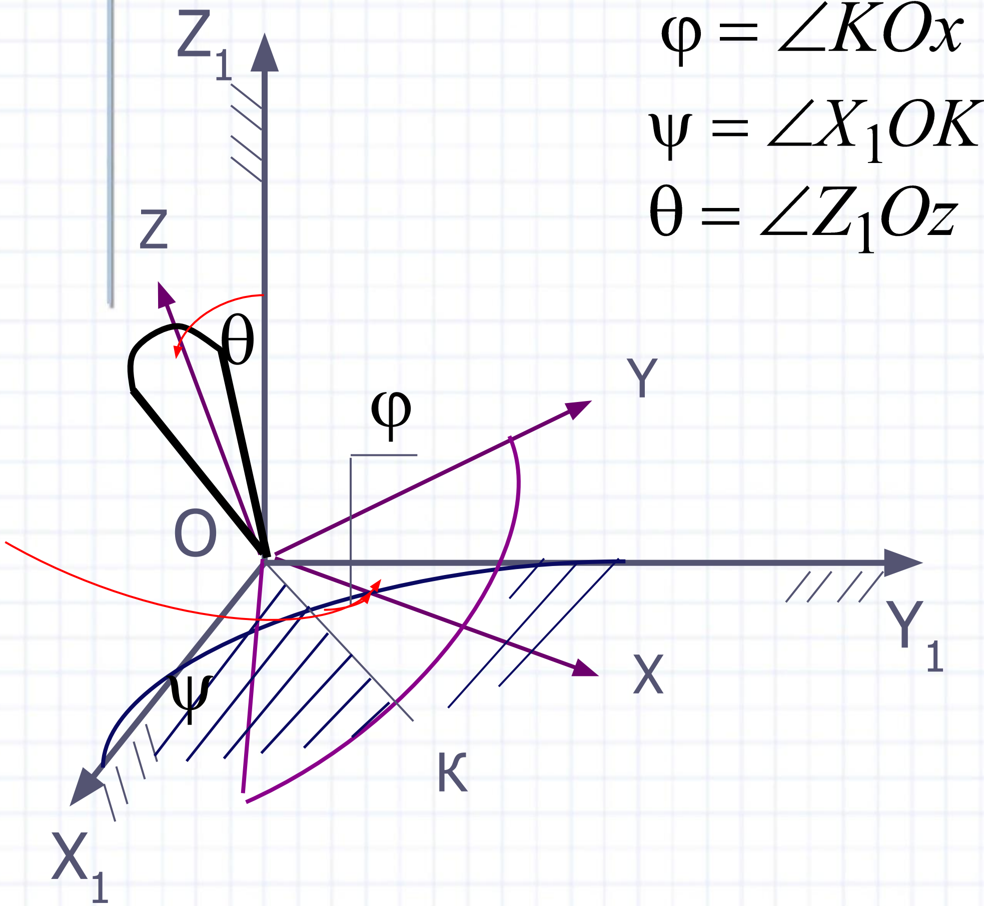


в) качение конуса по неподвижной поверхности

а) Уравнения движения:

Линия ОК – *линия узлов.*

Положение тела отн-но неподви-жных осей $OX_1Y_1Z_1$ можно определить углами Эйлера:



$\varphi = \angle KOx$ - угол собственного вращения

$\psi = \angle X_1OK$ - угол прецессии

$\theta = \angle Z_1Oz$ - угол нутации

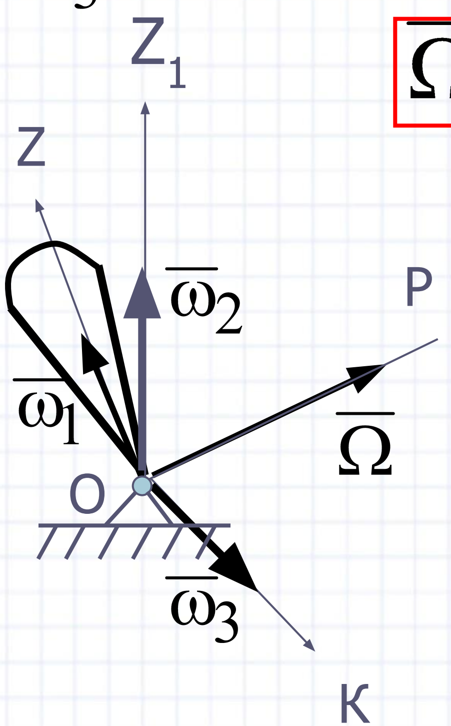
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= f_1(t) \\ \psi &= f_2(t) \\ \theta &= f_3(t) \end{aligned}\right\}$$ - уравнения сферич. дв-ния тв. тела

б) угловая скорость тела: Линия ОК – *линия узлов.*

$\omega_1 = \dot{\varphi}$ - собственное вращение вокруг оси z

$\omega_2 = \dot{\psi}$ - вращение вокруг оси Z_1 (прецессия)

$\omega_3 = \dot{\theta}$ - вращение вокруг линии узлов ОК (нутация)



$$\boxed{\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3}$$

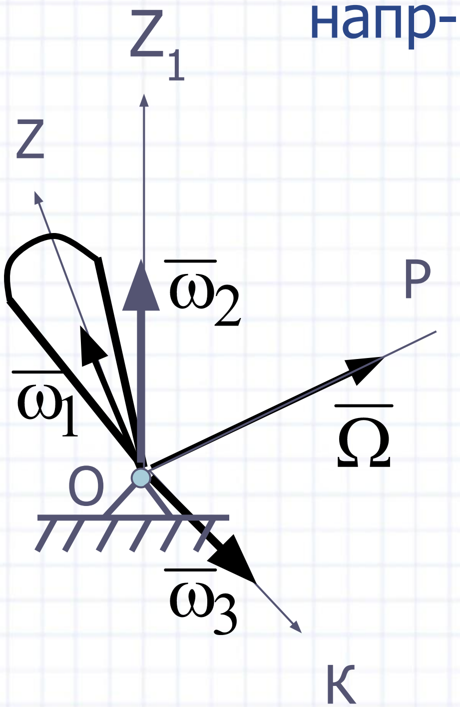
изменяется как по величине так и по направлению, т.к. меняются все три вектора угловых скоростей

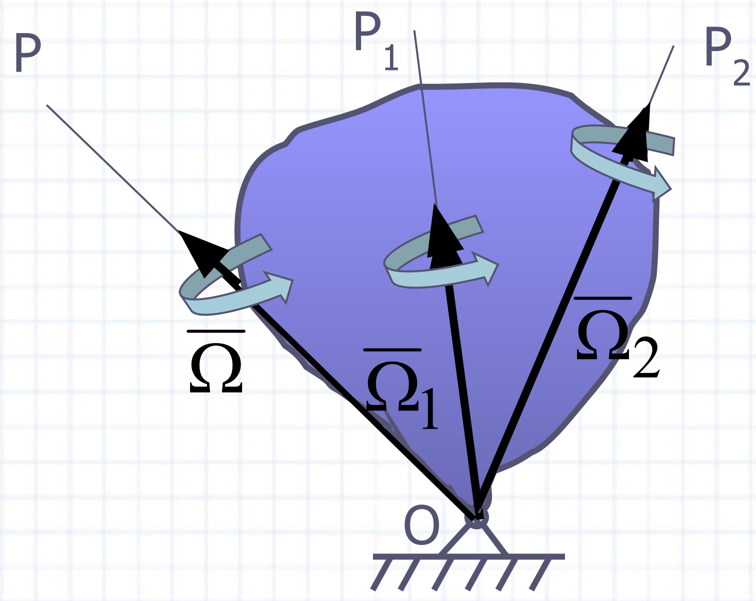
$\overline{\Omega}$ - называют *мгновенной угловой скоростью тела* в) движение тела:

Элементарное перемещение dΘ за время dt – *элементарный поворот* вокруг оси OP, вдоль кот. направлен вектор $\overline{\Omega}$

$$d\Theta = \Omega dt$$

OP называют *мгновенной осью вращения*, её напр-ние постоянно меняется со временем





Дв-ние складывается из ряда последователь-ных элемент. поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через т.О

г) угловое ускорение тела:

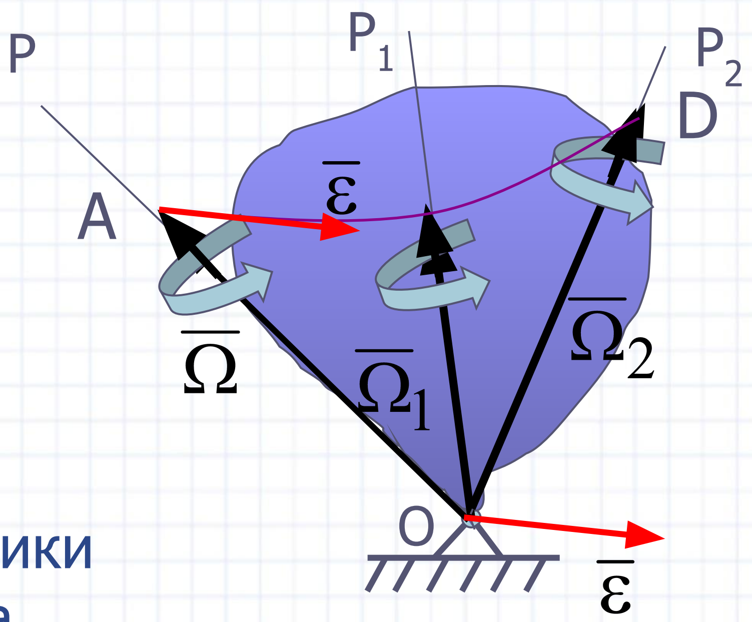
Векторная величина, характеризующая изменение с течением времени угловой скорости по модулю и по направлению – *мгновенное угловое ускорение тела*

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = d\bar{\Omega}/dt}$$

AD – годограф вектора $\bar{\Omega}$

Направление ε совпадает с касательной к кривой AD в соответствующей точке

Векторы $\bar{\Omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ - основные кинематические характеристики сферического движения тела



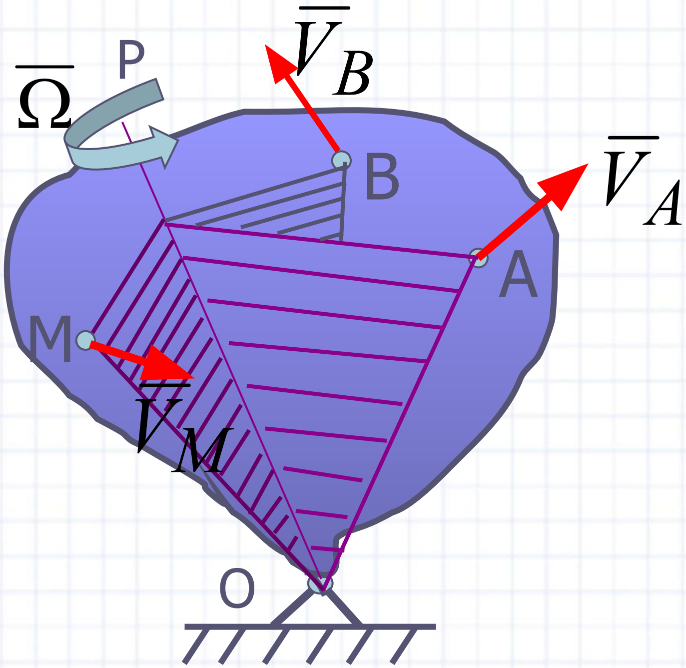
д) линейные скорости точек тв. тела:

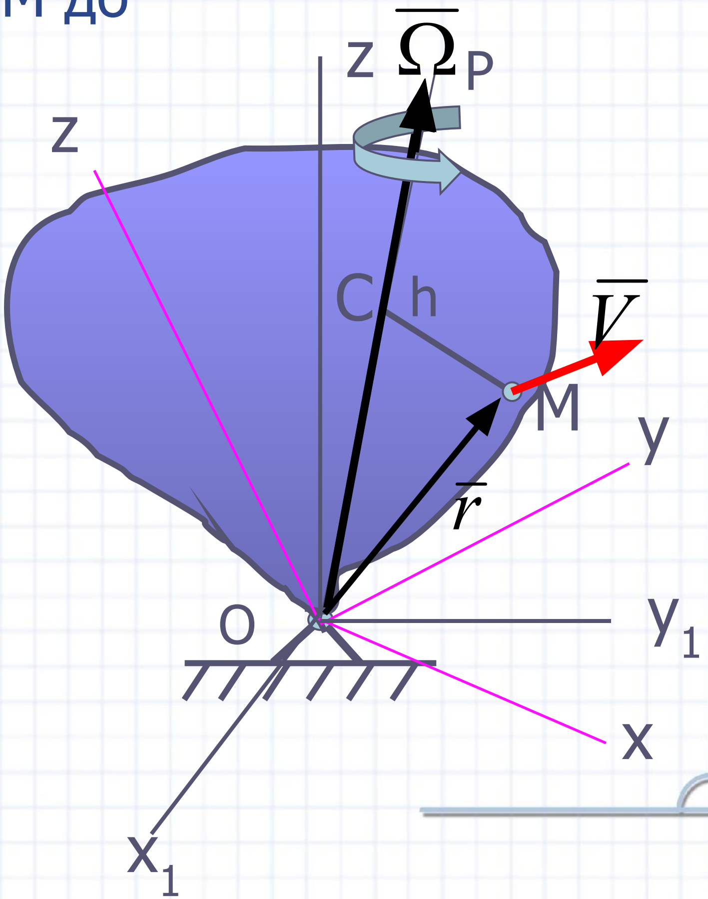
Скорость какой-нибудь т.М тела - $\overline{V} = \overline{\Omega} \times \overline{r}$, где $\overline{r}$ - радиус-вектор от т.О до т.М, $\overline{\Omega}$- вектор мгн. угловой ск-ти *тела*

Направлен $\overline{V}$ ⊥ пл-ти МОР в сторону поворота тела

$$V = \Omega \cdot h,$$

где $h = MC$ - расстояние от т.М до мгновенной оси вращения



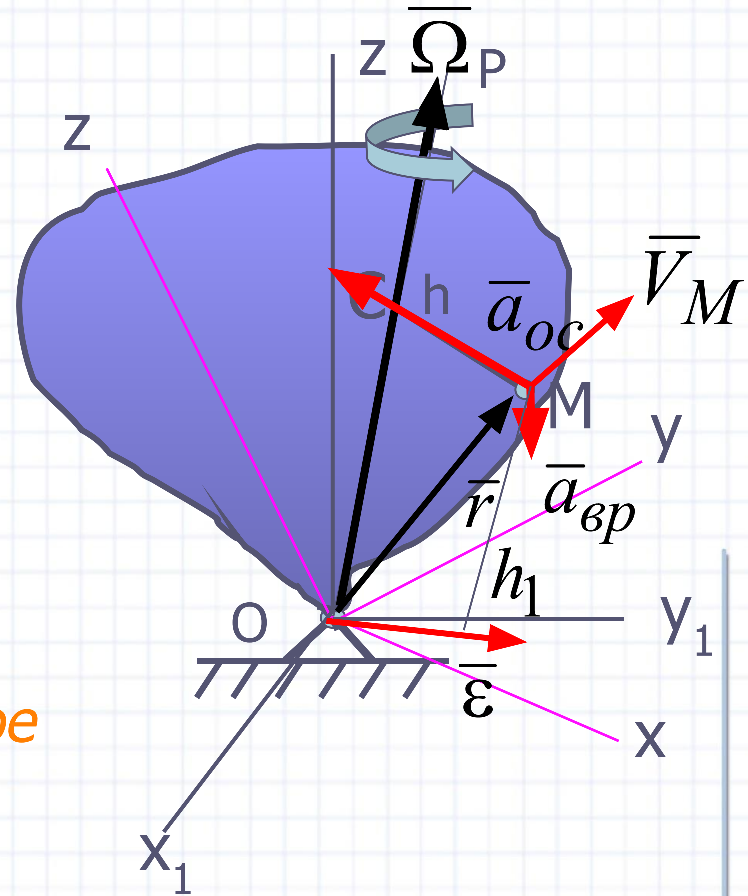


е) линейные ускорения точек тв. тела:

Ускорение какой-нибудь т.М тела -

$$\overline{a} = \dot{\overline{V}} = \left(\dot{\overline{\Omega}} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\Omega} \times \dot{\overline{r}}\right)$$

или $$\overline{a} = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\Omega} \times \overline{V}\right)$$

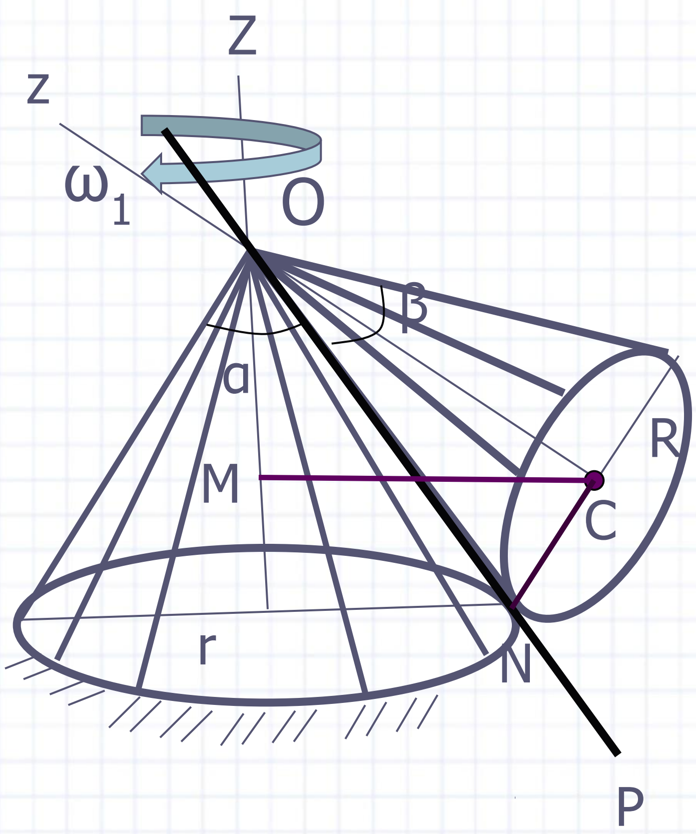


$$\overline{a}_{вр} = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right)$$ - *вращательное ускорение*

$$\overline{a}_{oc} = \left(\overline{\Omega} \times \overline{V}\right)$$ - *осестремительное ускорение*

Пример:

Подвижный конус катится без проскальзывания по неподвижному так, что угл. ск-ть вращения оси OC вокруг оси Z неподв. конуса постоянна и равна ω1. Чему равна мгновенная угловая скорость тела, если известны углы и радиус основания R



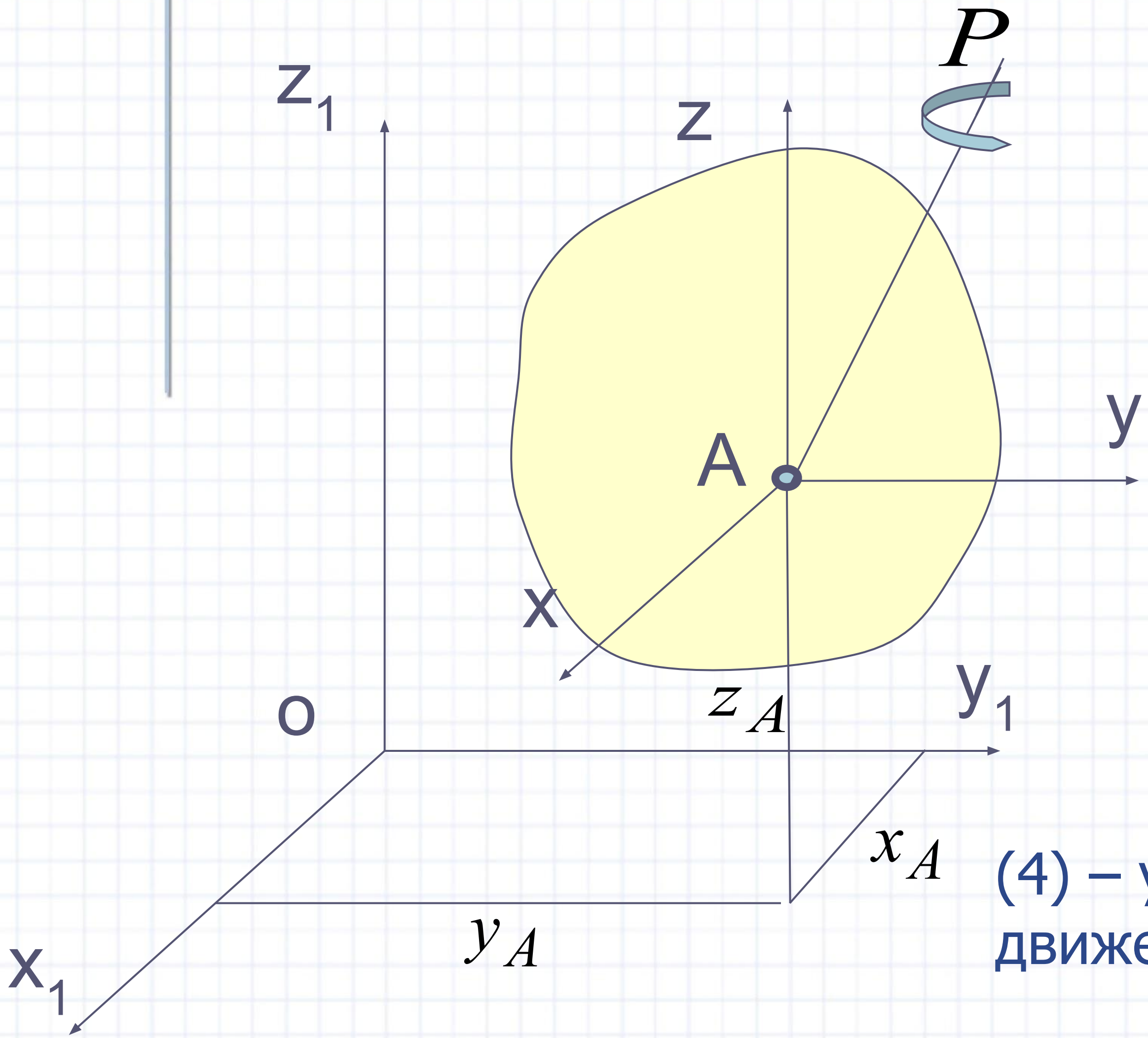
$$V_C = \omega_1 \cdot CM \qquad V_C = \Omega \cdot CN$$

$$CM = OC \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}; \quad CN = OC \cdot \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\omega_1 \cdot OC \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \Omega \cdot OC \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\Omega = \omega_1 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \Big/ \sin\frac{\beta}{2}$$

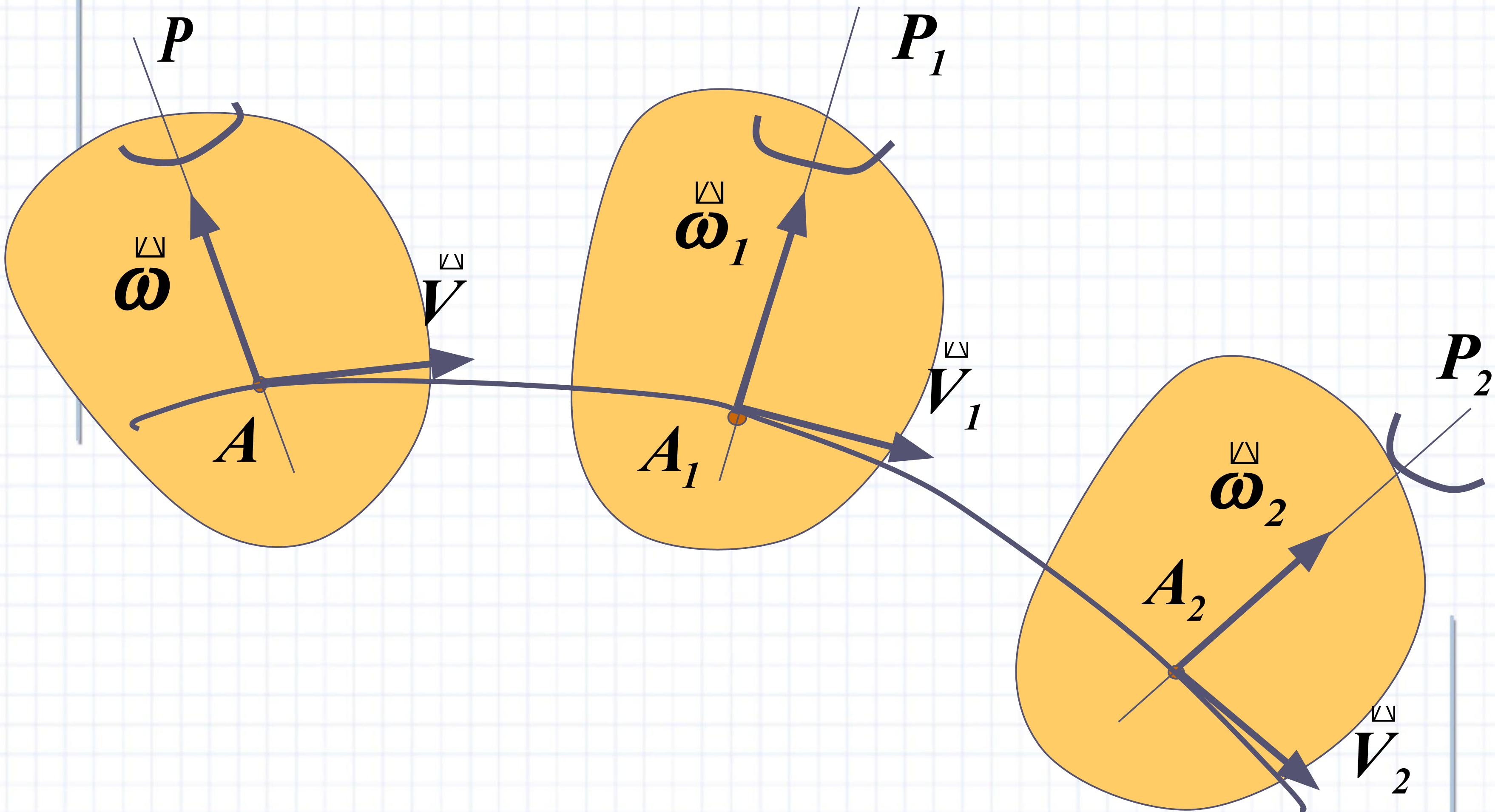
§ 5. Общий случай движения свободного твердого тела



$$\begin{cases} x_A = x_A(t); \\ y_A = y_A(t); \\ z_A = z_A(t); \\ \varphi = \varphi(t); \\ \psi = \psi(t); \\ \theta = \theta(t); \end{cases} \qquad (4)$$

(4) – уравнения свободного движения твёрдого тела

- Движение свободного твердого тела в общем случае можно рассматривать как совокупность поступательного движения вместе с точкой А, принятой за плюс, и серии элементарных поворотов вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку А



P
$\vec{\omega}$
$\vec{V}$
A
P_1
$\vec{\omega}_1$
$\vec{V}_1$
A_1
P_2
$\vec{\omega}_2$
A_2
$\vec{V}_2$