Преобразование иррациональных выражений

Тема урока

Цель обучения

11.2.1.5 - применять свойства корня n – ой степени для преобразования иррациональных выражений;

Актуализация знаний

Алгебраическое выражение, включающее операции извлечения корня и возведения в степень с рациональным показателем над переменными, называется иррациональным.

Основные методы преобразований иррациональных выражений, содержащих степени с рациональными показателями:

- *упрощение иррациональных алгебраических выражений;*
- *разложение многочленов на множители;*
- *освобождение от иррациональности в знаменателе дроби;*
- *преобразование иррациональных выражений, содержающих модуль;*
- *преобразование двойных радикалов.*

Если $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$, справедлива формула

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

*называемая **формулой сложного радикала**.*

Разложите на множители.

a. $a^{\frac{1}{16}} - 16$

b. $y^{0.4} - 9$

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби.

a. $$\frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$$

b. $$\frac{1}{\sqrt[3]{3^2\cdot 5}}$$

Упростите выражение.

$$x \cdot \sqrt[6]{x^6 \cdot y^2 \sqrt{7^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2}} \cdot \sqrt[6]{x^3 y \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$$

Задание 1.

Упростите: $a)\sqrt{75}+\sqrt{12}$; $b)$ $\sqrt{x}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}$.

Задание 2.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

Задание 3.

Найдите значение выражения $\sqrt[6]{\left(4-2\sqrt{3}\right)^6}-\sqrt[5]{\left(4+2\sqrt{3}\right)^5}$

Сравните выражения

- $$\sqrt[3]{15} \text{ и } 2\sqrt[3]{2}$$

- Как вы думаете, что нужно сделать, чтобы сравнить эти два выражения?
- Как внести множитель 2 под знак корня? В какой степени?

Преобразование иррациональных выражений с использованием свойств корней мы можем получить следующие результаты.

Первый результат:

Выражение x можно заменить выражением $\sqrt[n]{x^n}$, если n – нечетное. Если же n – четное, то выражение x можно заменить выражением

- $\sqrt[n]{x^n}$ для всех наборов значений переменных из ОДЗ, при которых значение выражения x неотрицательно (давайте условимся вместо последней фразы использовать запись $x \geq 0$);
- $\sqrt[n]{x^n}$ для всех наборов значений переменных из ОДЗ, при которых значение выражения x отрицательно ($x < 0$).

Кратко: если n – четное, то $x = \sqrt[n]{x^n}$, если n – нечетное, то $x = \begin{cases} \sqrt[n]{x^n}, x \geq 0, \\ -\sqrt[n]{x^n}, x < 0. \end{cases}$

Преобразование иррациональных выражений с использованием свойств корней мы можем получить следующие результаты.

Второй результат:

Для любого натурального n выражение $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ можно заменить выражением $\sqrt[n]{xy}$.

Эти результаты позволяют внести множитель под знак корня, так как дают право провести следующие преобразования:

если n – нечетное, то $y \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{y^n} \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{y^n \cdot z}$,

если n – четное, то $y \cdot \sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{y^n} \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{y^n \cdot z}, y \geq 0, \\ -\sqrt[n]{y^n} \cdot \sqrt[n]{z} = -\sqrt[n]{y^n \cdot z}, y < 0. \end{cases}$

В частности, если y – положительное число или значение выражения y неотрицательно для любого набора значений переменных из ОДЗ для исходного выражения, то

$y \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{y^n} \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{y^n \cdot z}$, а если y отрицателное число или значение выражения y положительно для любого набора значений переменных из ОДЗ для исходного выражения, то

$y \cdot \sqrt[n]{z} = - \sqrt[n]{y^n} \cdot \sqrt[n]{z} = - \sqrt[n]{y^n \cdot z}$.