

# Курс высшей математики

## Часть 1

УГТУ-УПИ  
2004г.

# Лекция 2

## Алгебра матриц

- I. Операции над матрицами.
2. Обратная матрица.
3. Решение матричных уравнений.
4. Невырожденные системы и линейных уравнений с  $n$  неизвестными.
5. Ранг матрицы и его вычисление методом элементарных преобразований.

# 1. Операции над матрицами.

Определим несколько операций над матрицами.

Пусть  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  - матрицы размера  $(m \times n)$ .

I. Равенство матриц .

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} , \quad \forall i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

II. Сложение матриц .

Результатом *сложения матриц*  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$ , элементы которой являются суммой соответствующих элементов исходных матриц :

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

### III. Умножение матрицы на число.

$$C = kA$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

### IV. Умножение матриц.

$$C = AB$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Здесь:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}),$$
$$(m \times p) \quad (p \times n)$$

$$C = (c_{ij}), \quad (m \times n)$$

Элемент, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы произведения  $C_{ij}$ , равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .

The diagram shows a row vector  $(\circ \quad \circ \quad \circ)$  multiplied by a column vector  $\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}$ . Blue lines connect each element of the row to its corresponding element in the column, with a multiplication symbol  $\times$  between the vectors. The result is an element  $\circ$  in a single-element vector  $(\circ)$ .

$$(\circ \quad \circ \quad \circ) \times \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} = (\circ)$$

**Число столбцов левой матрицы должно быть равно числу строк правой матрицы.**

## *Правило умножения матриц :*

1. Перемножать можно лишь матрицы определённых *размеров* (число столбцов матрицы левой равно числу строк матрицы правой ).
2. Размер матрицы **C** равен произведению числа строк матрицы **A** на число столбцов матрицы **B**, т.е. (**m x n**).
3. Чтобы получить элемент матрицы произведения  $C_{ij}$ , расположенный на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца следует перемножить соответствующие элементы *i*-ой строки матрицы **A** и *j*-го столбца матрицы **B** и найти сумму полученных произведений.

***Пример.***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{C} \rightarrow (3 \times 3)$$

$$c_{11} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

$$c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2$$

$$c_{13} = \dots$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 28 & 5 & 4 \\ 43 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

## *Свойства операции сложения:*

Рассмотрим матрицы размера  $(m \times n)$  :

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij})$$

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$

## *Свойства операций умножения на число и умножения матриц:*

1.  $AB \neq BA$  (В общем случае сомножители менять местами нельзя).

Если  $AB = BA$ , матрицы  $A$  и  $B$  называются *перестановочными*.

2.  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

3.  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

4.  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$

5.  $k \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (k \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (k \cdot \mathbf{B})$

6.  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

7.  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$

## 2. Обратная матрица.

Матрица  $A^{-1}$  называется *обратной* матрице  $A$ , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

( $A, A^{-1}$  – квадратные матрицы,  $E$  – единичная матрица).

Если  $\det A \neq 0$  матрица  $A$  называется *невырожденной*.

## Теорема существования и единственности обратной матрицы.

Для всякой невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица, вычисляемая по формуле :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times (A^{\Pi})^T,$$

где  $A^{\Pi}$  **присоединенная матрица** – матрица состоящая из алгебраических дополнений элементов матрицы  $A$ .

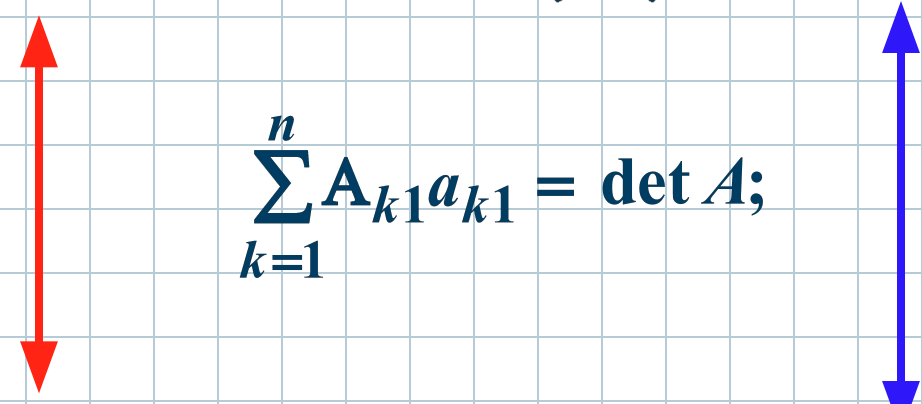
### *Доказательство*

а) *Существование.*

По условию  $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{\det A}$

Убедимся, что по указанной формуле находится именно обратная матрица.

Вычислим произведение

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\det A} \cdot (A^T)^T \right) \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \left( (A^T)^T \cdot A \right) = \\ & = \frac{1}{\det A} \cdot \left( \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) = \\ & \quad \quad \quad \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k1} = \det A; \end{aligned}$$


$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Точно также можно показать, что

$$A \cdot \left( \frac{1}{\det A} \cdot (A^T)^T \right) = E$$

Таким образом, действительно

$$\left( \frac{1}{\det A} \cdot (A^T)^T \right) = A^{-1}$$

б) Единственность (показать самостоятельно).

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} - ?$$

**Решение.**

1.  $\det A - ?$

$$\det A = -2 \implies \exists A^{-1}$$

2.  $A^{\Pi} - ? \quad A^{\Pi} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.  $(A^{\Pi})^T - ? \quad (A^{\Pi})^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

4.  $A^{-1} - ?$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. Решение матричных уравнений.

Пусть  $A$  – *известная* квадратная матрица порядка  $n$ ,  
 $B$  – *известная* матрица размера  $(n \times m)$ ,  
 $X$  – *неизвестная* матрица размера  $(n \times m)$ .

$AX=B$  – *матричное уравнение.*

Если  $A$  – *невыврожденная* матрица,  $\exists X$  – решение.

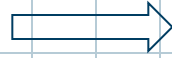
Умножим уравнение слева на  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \implies EX = A^{-1} \cdot B \implies$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Точно также решаются и другие типы уравнений :

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$$



$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$$

# $AXB = C$



$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1}$$

# 4.

# Невырожденные системы п линейных уравнений с п неизвестными .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right. (*)$$

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - (n \times 1) - \text{матрица столбец из неизвестных,}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - (n \times n) - \text{матрица из коэффициентов перед неизвестными,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - (n \times 1) - \text{матрица столбец из свободных членов.}$$

Систему (\*) тогда можно записать в виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

[illegible]

Если  $A$  — *невырожденная* матрица, то существует единственное решение этого матричного уравнения

$$(1) \quad X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow$$

или, в поэлементной записи

$$(2) \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Здесь  $\Delta = \det A$  - *определитель* системы,

$\Delta_i$  -определитель, полученный из определителя системы заменой  $i$ -столбца на столбец свободных членов.

Формулы (2) называются *формулами Крамера*.

Подробнее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$

## ***Вывод:***

Если определитель системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными отличен от нуля, то существует единственное решение такой системы.

Оно может быть найдено одним из *трёх способов*:

1. *матричным* способом.

2. по *формулам Крамера*.

3. *методом Гаусса* (приведение системы к треугольному виду).

## 5. Ранг матрицы и его вычисление методом элементарных преобразований.

Выделим в матрице размера  $(m \times n)$  произвольные  $k$  – строк и  $k$  - столбцов.

Элементы матрицы, стоящие на их пересечении, образуют определитель порядка  $k$ .

Такой определитель называется *минором  $k$ - порядка*, этой матрицы.

**Рангом** матрицы  $A$  называется такое целое число  $r$ , что среди миноров порядка  $r$  матрицы  $A$  есть хотя бы один отличный от нуля, а все миноры более высокого порядка равны нулю.

(Ранг матрицы – это наибольший порядок отличного от нуля её минора).

## Элементарные преобразования матриц:

- транспонирование;
- перестановка строк (столбцов);
- умножение строки (столбца) на число  $\alpha \neq 0$ ;
- прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число;

## Метод элементарных преобразований

! Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

Для определения ранга матрицы  $A$  методом элементарных преобразований следует:

1. Переставить строки так, чтобы в верхнем левом углу матрицы был ненулевой элемент.
2. Все элементы первого столбца, кроме  $a_{11}$ , обратить в ноль:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Повторить операцию со вторым столбцом: все элементы второго столбца, кроме  $a_{12}$  и  $a_{22}$ , обратить в ноль.
4. После  $m$ -кратного применения указанной процедуры и отбрасывания нулевых строк преобразованная матрица будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} & \dots & a_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = r(A) = r.$$

*Найдите ранг матрицы:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = 1 \quad M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$M_2^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$M_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

*Найдите ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix}$$

## МИКРОТЕСТ 2

1. Квадратную матрицу  $A$  4-го порядка ( $n$ -го) умножили на число  $k \neq 0$ . Во сколько раз увеличился определитель матрицы  $A$ ?
2. Размерность матрицы  $A$  -  $4 \times 1$ ,  $B$  -  $1 \times 4$ . Могут ли матрицы  $A$  и  $B$  быть перестановочными?
3. Выделите два требования к матрице  $A$  для того чтобы у неё существовала обратная матрица.
4. Дана система из 11 линейных уравнений с 11 неизвестными. Сколько определителей нужно будет вычислить при решении этой системы методом Крамера?

5.

1) Написать решение уравнения  $XA=B$ .

2) Можно ли использовать предложенный способ для решения матричного уравнения

$$A_{4 \times 2} * X_{2 \times 4} = B_{4 \times 4} \text{ (пояснить)?}$$

3) Какой размерности должна быть матрица  $A$  для того, чтобы существовало решение уравнения

$$A * X_{2 \times 4} = B_{2 \times 4}?$$