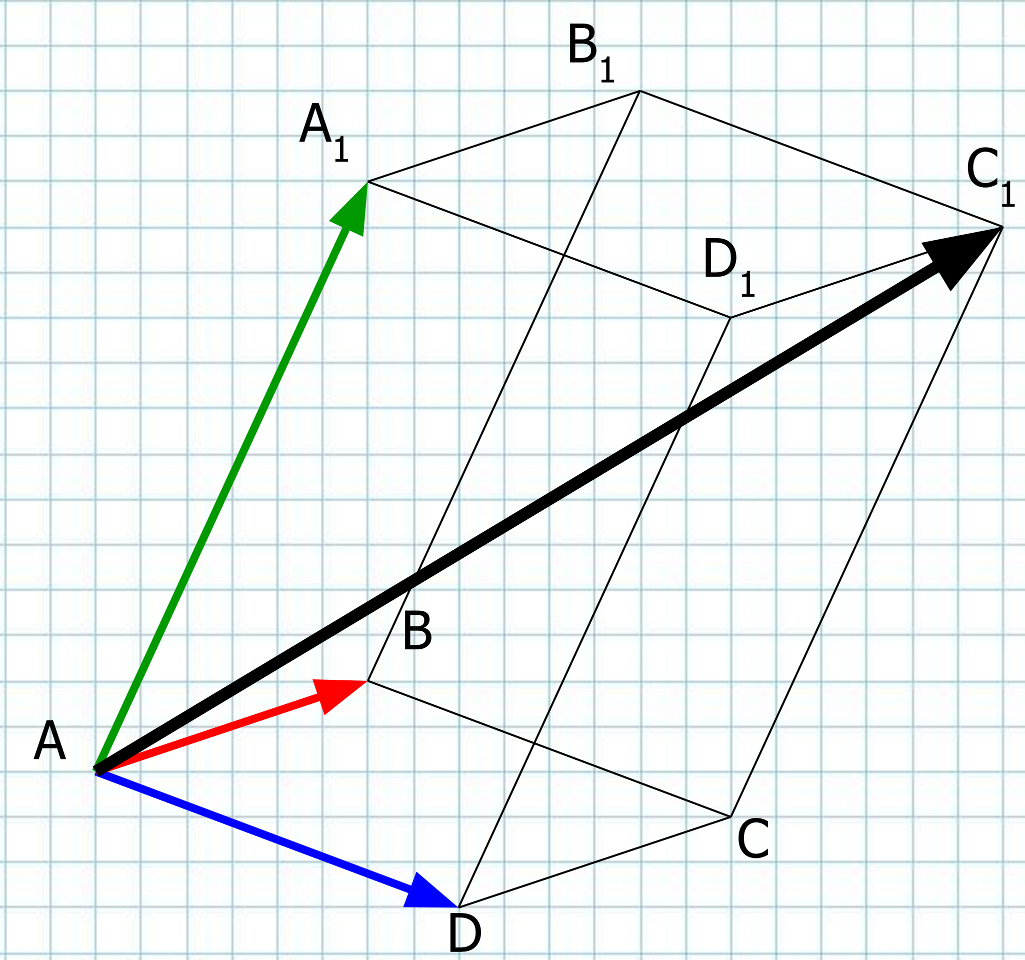
Тема 5. Координаты и векторы



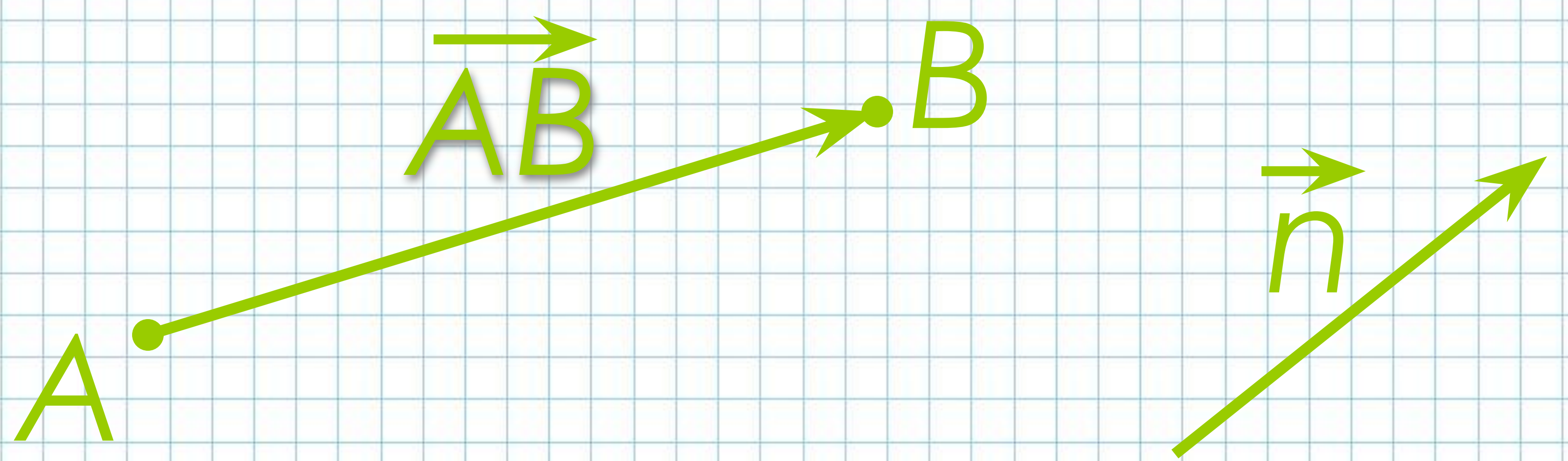
$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$$

Тема 5. Координаты и векторы

I. Определение вектора. Основные понятия, связанные с векторами.

Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется **вектором**.



Нулевой вектор

Любая точка на плоскости может рассматриваться как вектор.

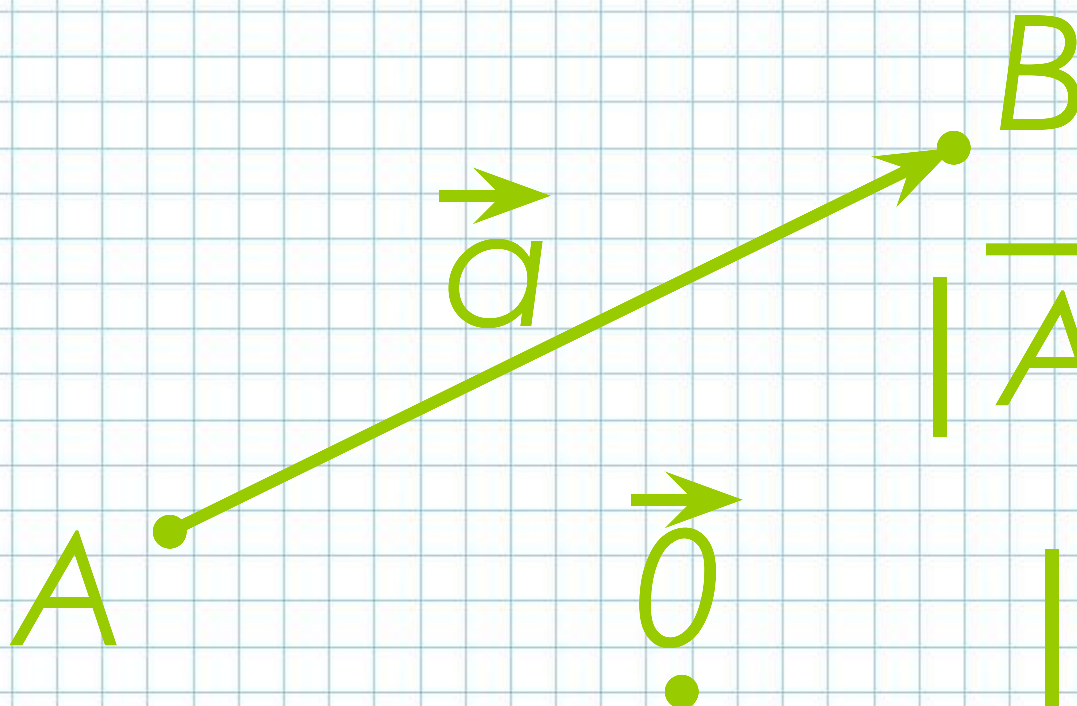
Такой вектор называется **нулевым**.

M

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Длина вектора

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.



$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$$

$$|\vec{0}| = 0$$

ДЛИНОЙ или МОДУЛЕМ ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ **называется длина отрезка AB**

$\overrightarrow{AB}$ $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right|$

$\vec{a}$ $\quad \left|\vec{a}\right|$

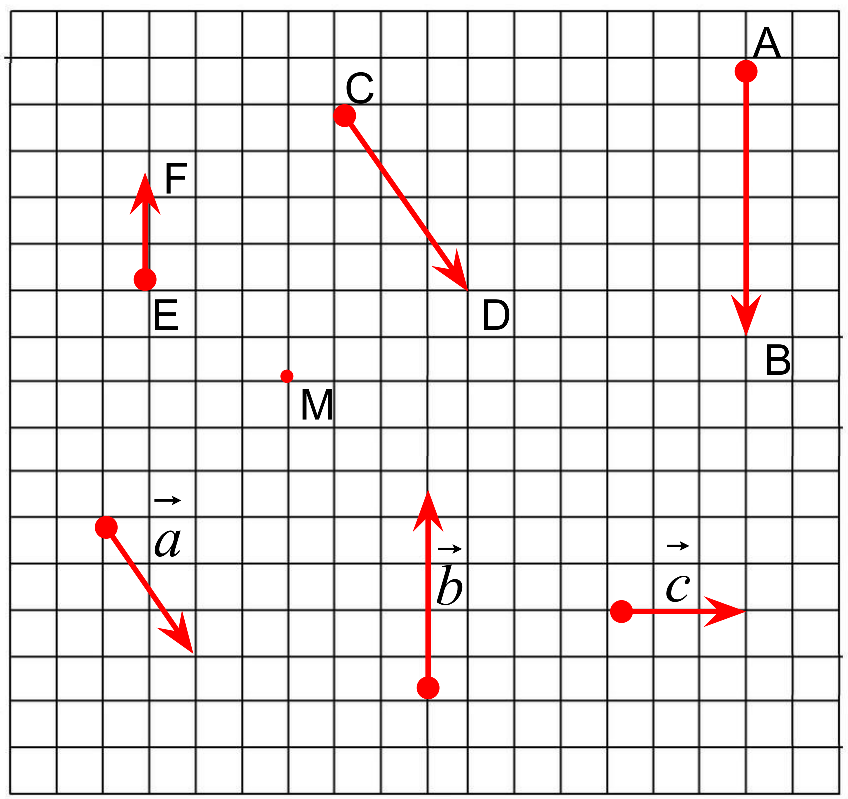
$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6 \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = 5$$

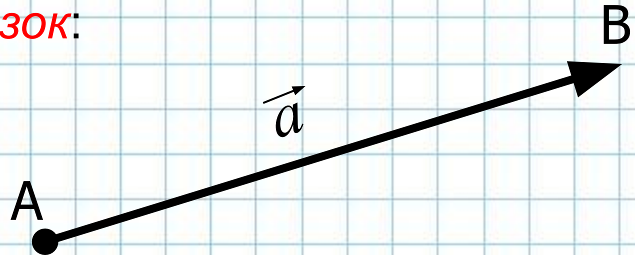
$$\left|\overrightarrow{EF}\right| = 2{,}5 \quad \left|\overrightarrow{MM}\right| = 0$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{13} \quad \left|\vec{b}\right| = 4{,}5$$

$$\left|\vec{c}\right| = 3$$

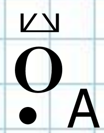


Как и в плоскости, в пространстве **ВЕКТОР** определяется как *направленный отрезок*:



Точка А – *начало вектора*, В – *конец вектора*. Записывают: $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Обычную точку в пространстве мы также можем считать вектором, у которого начало совпадает с конечной точкой. Такой вектор называется *нулевым* и обозначается: $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$.



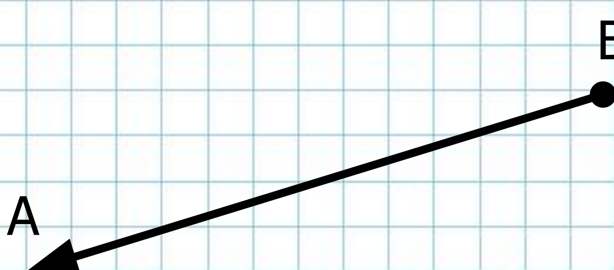
Длина отрезка, изображающего вектор, называется *модулем* (или абсолютной величиной) вектора, т.е.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB\ (\text{åä.î ò ð.}).$$

Естественно, что $\left|\overrightarrow{AA}\right| = 0.$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ являются *противоположными*. Очевидно, что:

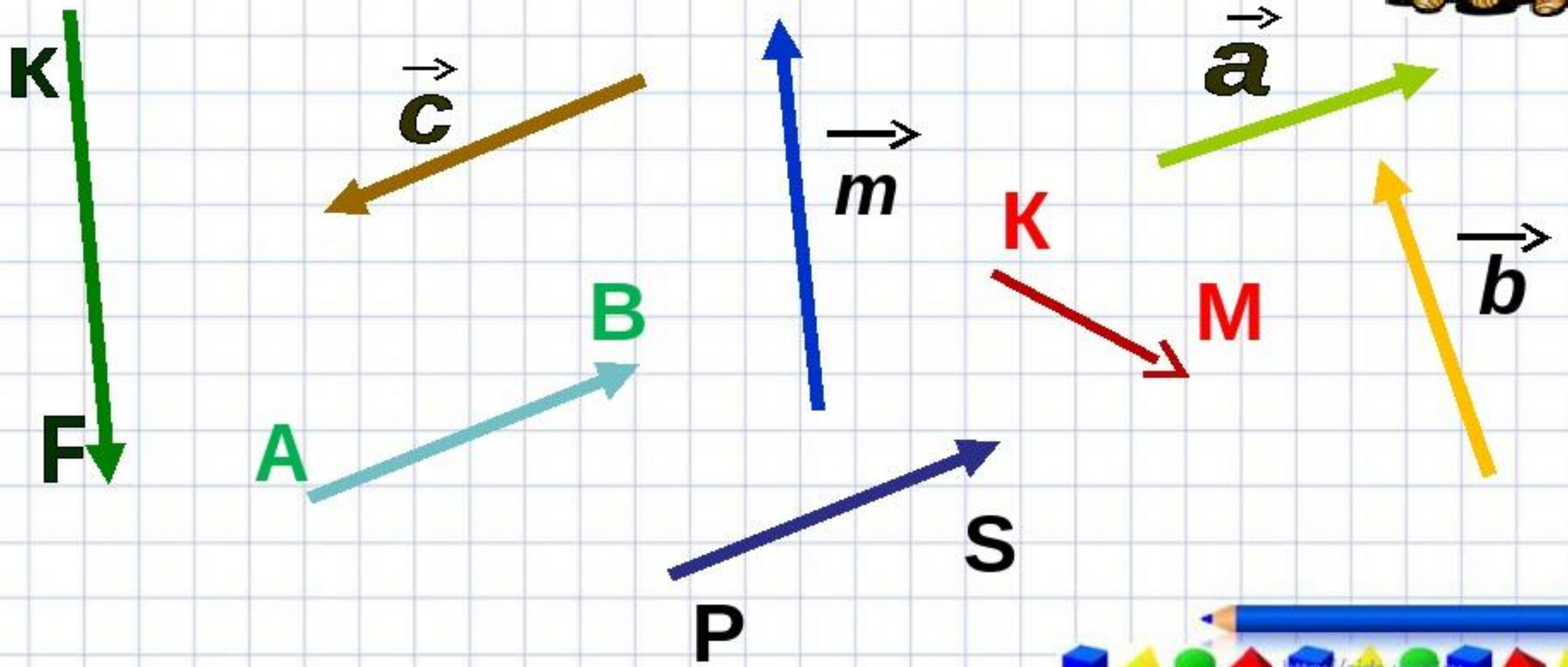
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|.$$



ЗАДАНИЕ

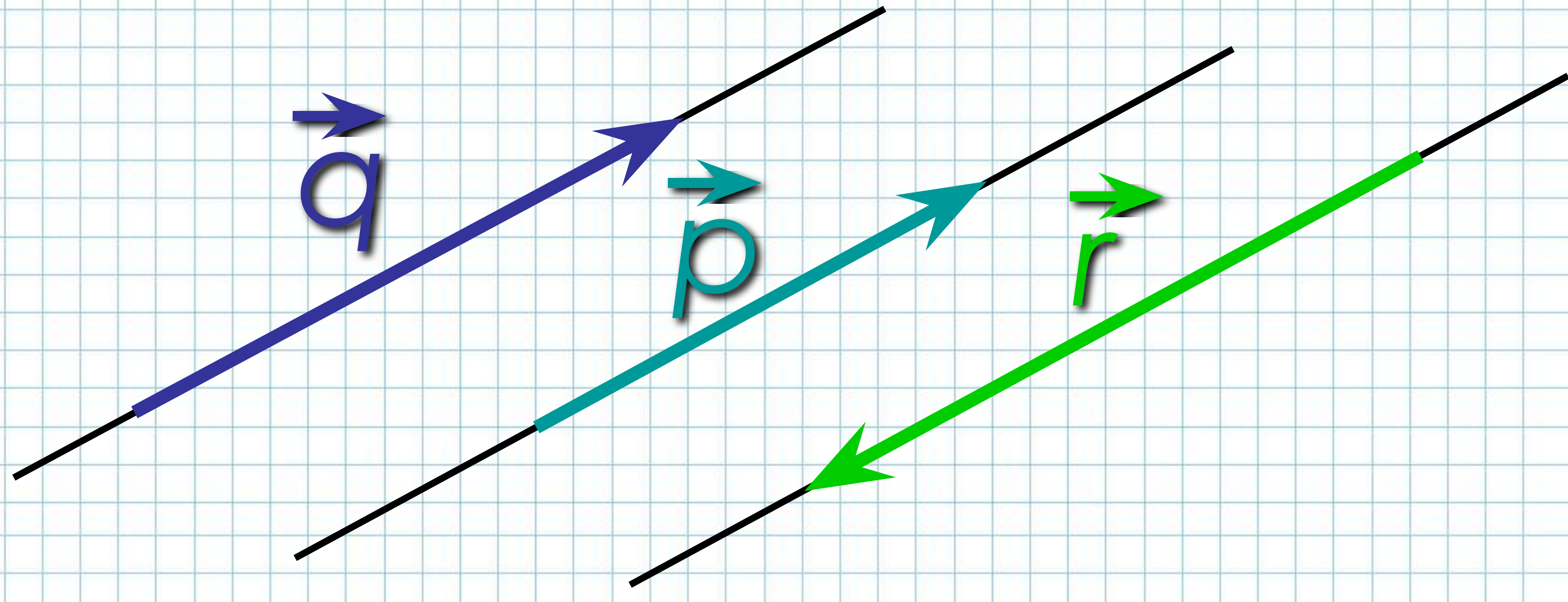
Назвать все изображенные векторы

(векторы можно изображать двумя заглавными латинскими буквами или одной строчной со стрелочкой)



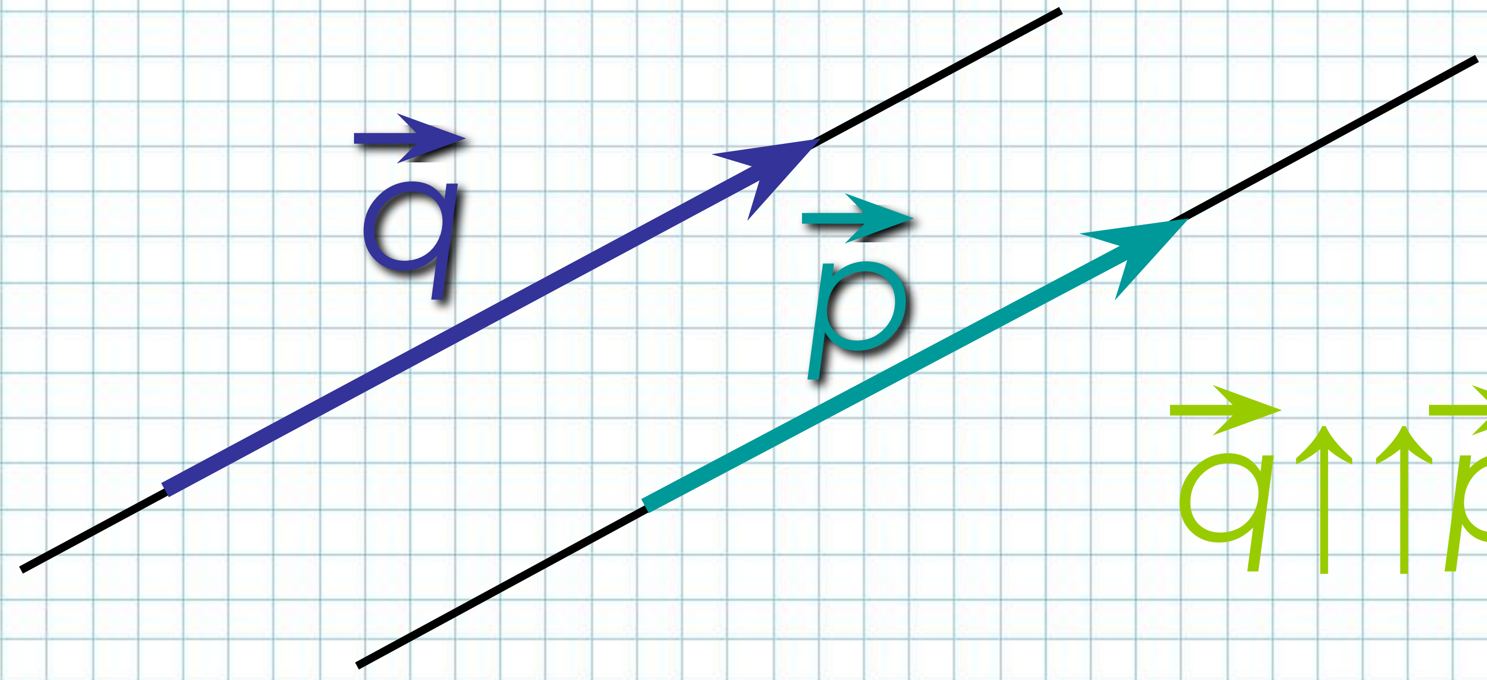
Коллинеарность векторов

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Сонаправленные векторы

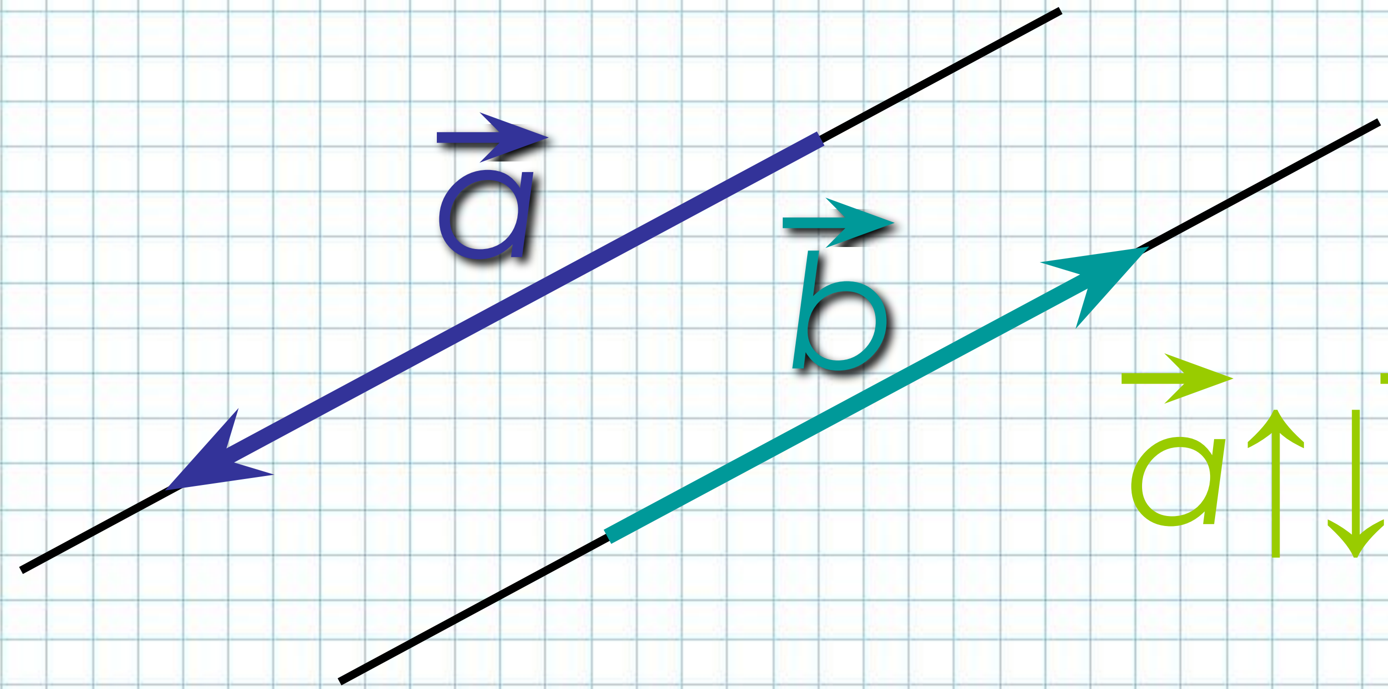
Два коллинеарных вектора называются сонаправленными, если у них совпадают направления.



$\vec{q} \uparrow\uparrow \vec{p}$

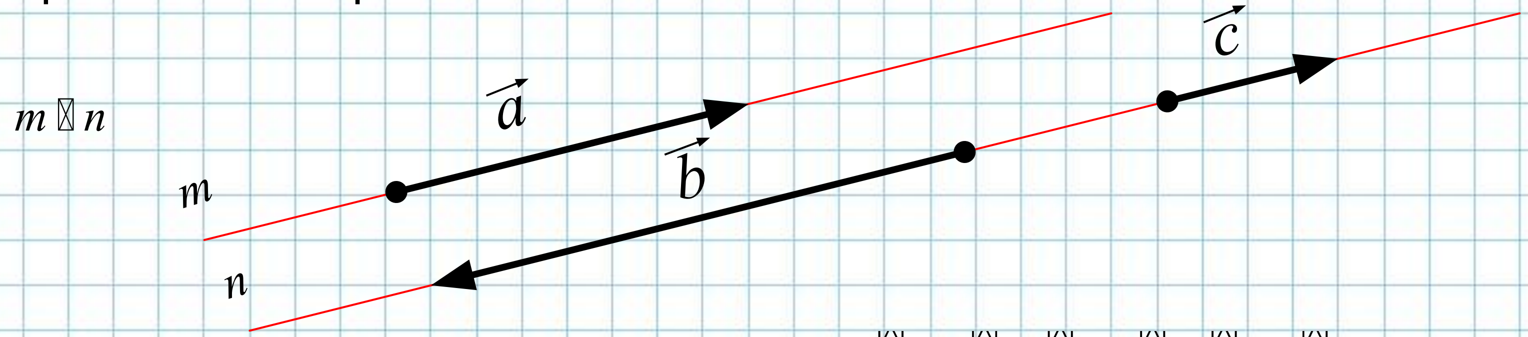
Противоположно направленные векторы

Два коллинеарных вектора называются **противоположно направленными**, если они не сонаправлены.



$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых:



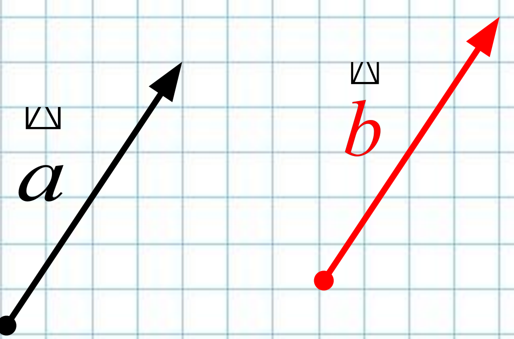
Обозначение коллинеарных векторов: $\vec{a} \parallel \vec{b},\ \vec{a} \parallel \vec{c},\ \vec{c} \parallel \vec{b}.$

Коллинеарные векторы, в свою очередь, бывают одинаково направленными (или сонаправленными) и противоположно направленными. В нашем случае:

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ – *сонаправленные* векторы, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – *противоположно направленные* векторы.

Два вектора называются *равными*, если: 1) они сонаправлены; и 2) их модули равны, т.е.

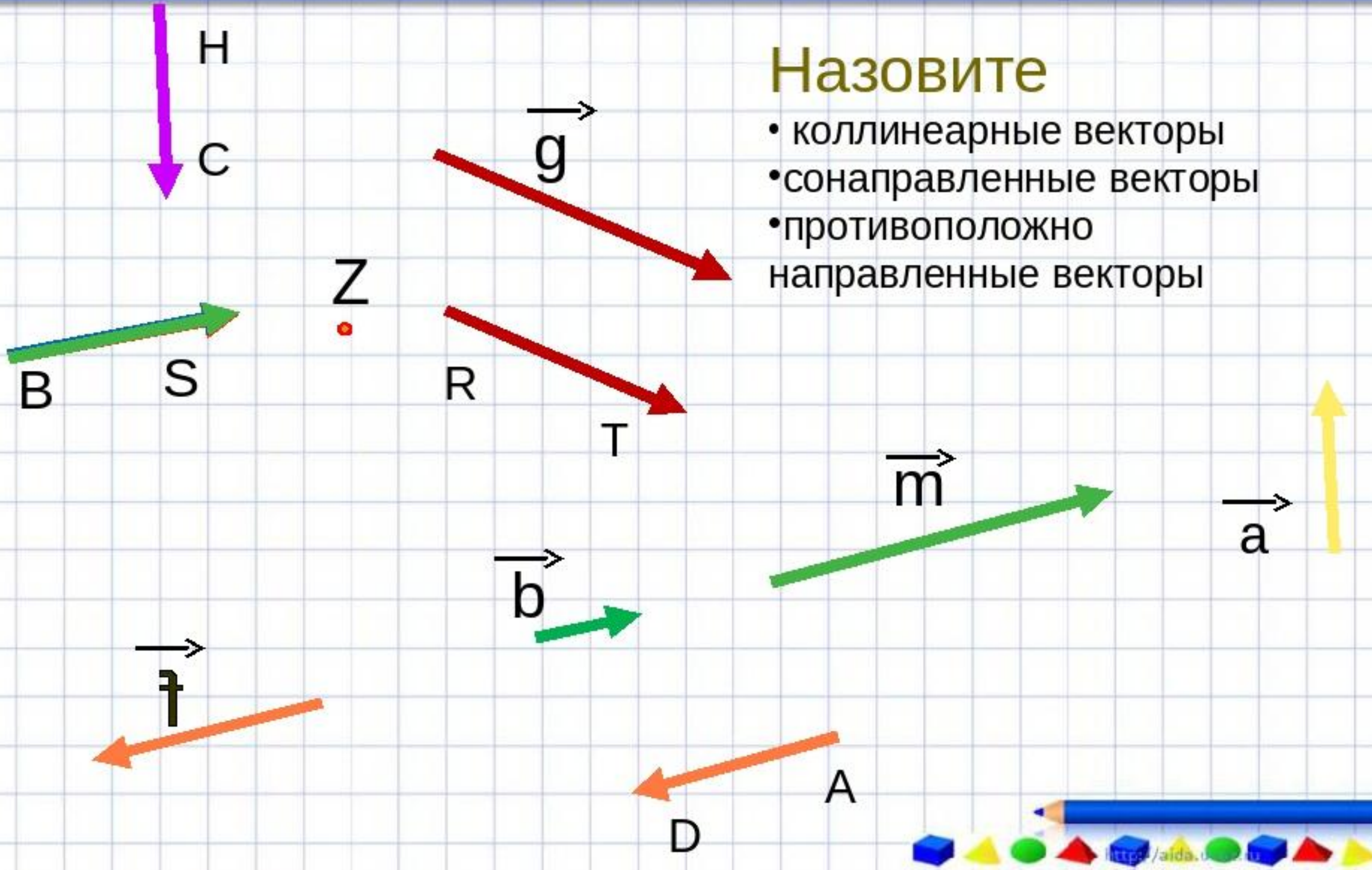
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|$$



Задание

Назовите

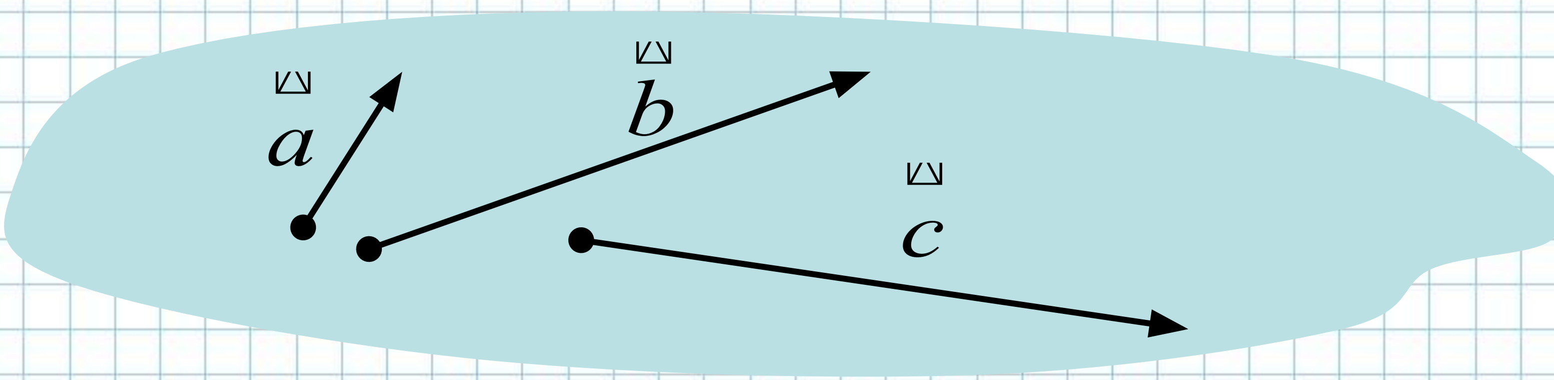
- коллинеарные векторы
- сонаправленные векторы
- противоположно направленные векторы



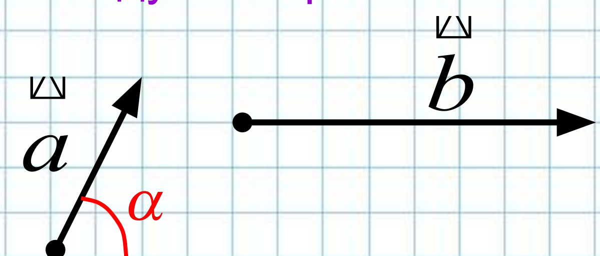
От произвольной точки пространства можно отложить <u>единственный</u> вектор, равный данному:

$$\vec{a} = \overrightarrow{MN}$$

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости:



Углом между векторами называется угол между их направлениями:



$$\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \alpha$$

Величина угла между векторами может изменятся от 0^0 до 180^0. Подумайте, когда:

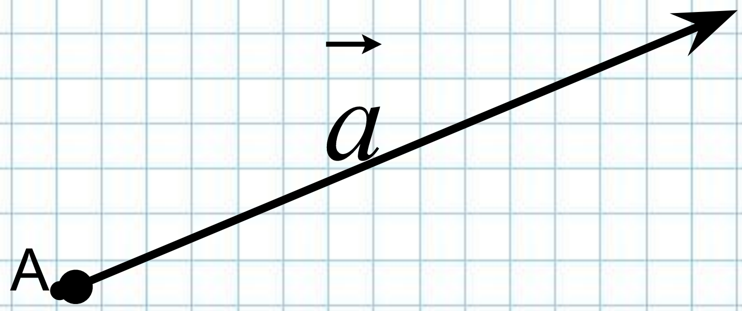
а) $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 0^0$ и б) $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 180^0$?

Ответ: а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Тема 5. Координаты и векторы

II. Действия с векторами

ОТКЛАДЫВАЕНИЕ ВЕКТОРА ОТ ДАННОЙ ТОЧКИ



вектор $\vec{a}$ ***отложен от точки А***

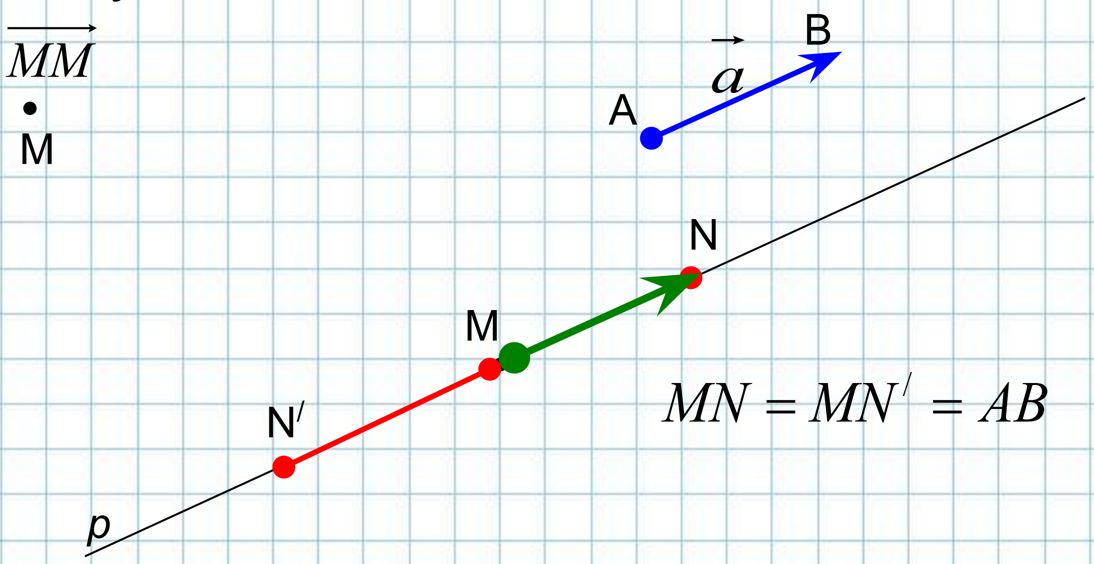
https://youtu.be/DlLM97OvqsA

от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и при том только один

$\vec{a}$ – *нулевой*

$\overrightarrow{MM}$

$\vec{a}$ – *ненулевой*

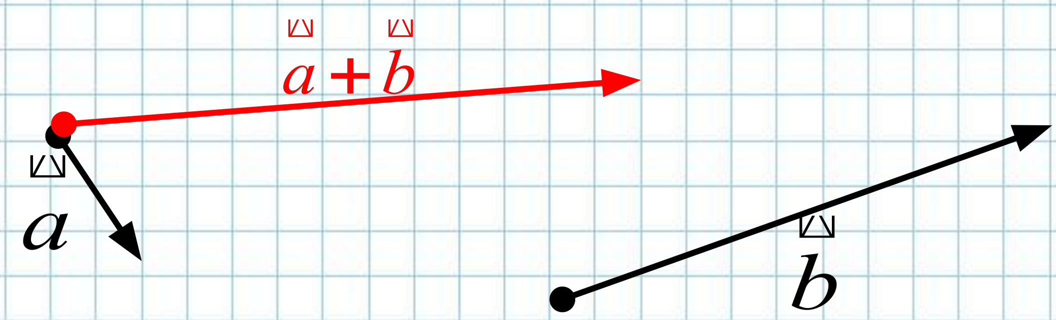


$$MN = MN' = AB$$

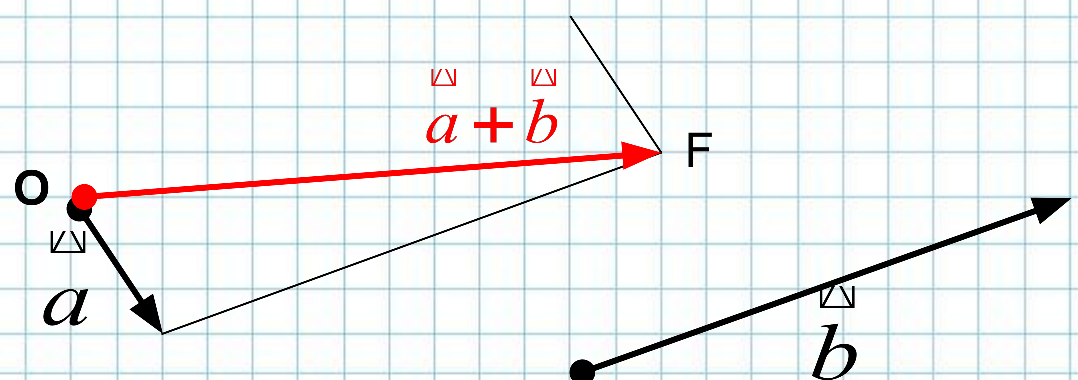
Векторы можно складывать – в результате получается ***вектор***. При сложении двух векторов применяются

Правило *треугольника*:

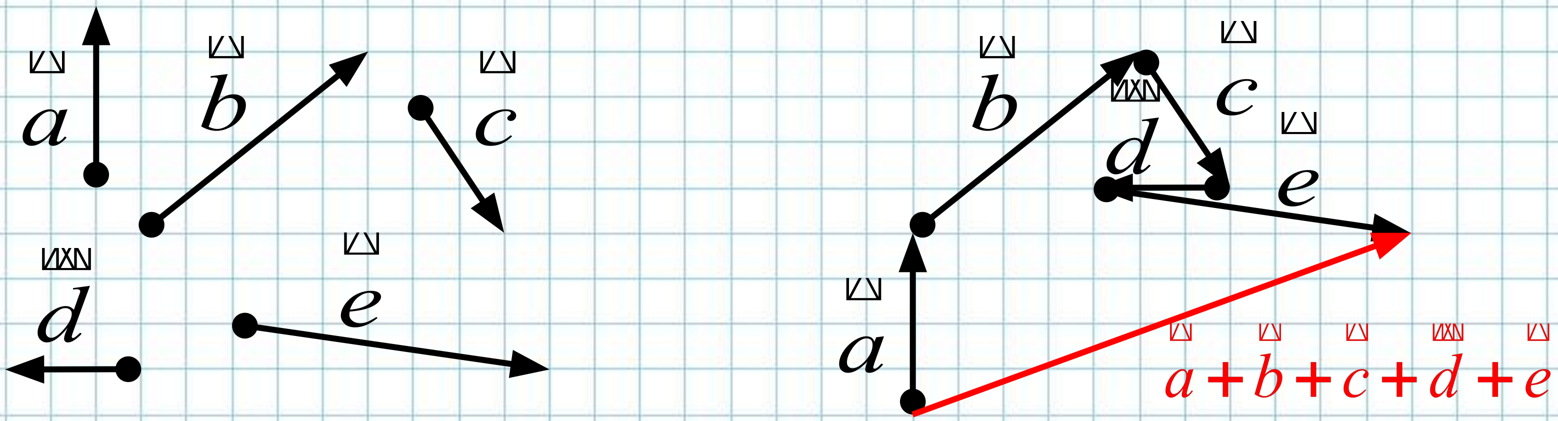
1) *От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;*
2) *От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;*
3) *Соединить начало 1-го и конец 2-го* - ***получаем сумму векторов*** = $\vec{a}+\vec{b}$



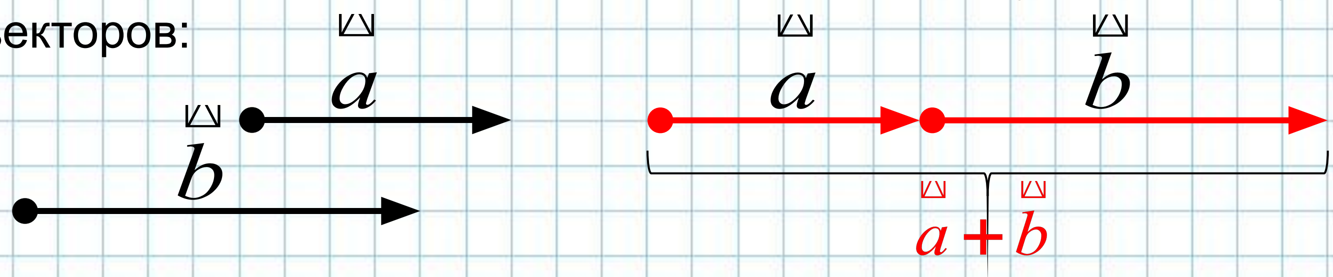
1) *От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;*
2) *От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;*
3) *Соединить начало 1-го и конец 2-го* - ***получаем сумму векторов*** = $\vec{a}+\vec{b}$



При сложении трех и более векторов применяют *правило многоугольника*:



Обратим внимание, что при сложении сонаправленных векторов получается вектор, сонаправленный с данными и его модуль равен сумме модулей слагаемых векторов:



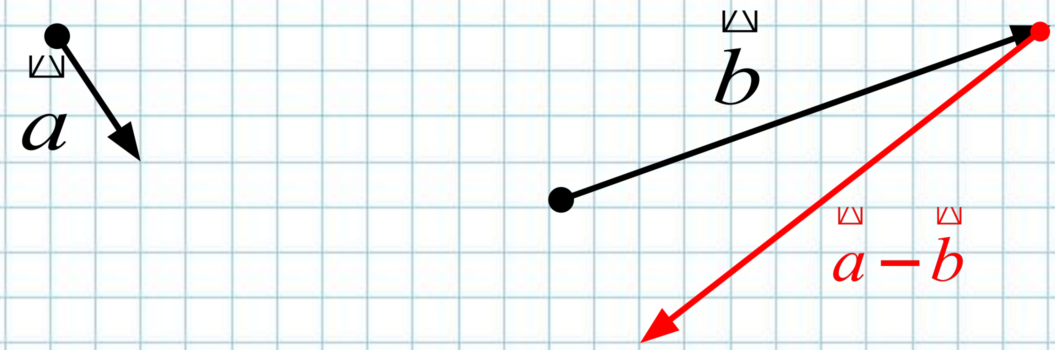
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

При сложении противоположно направленных векторов получается вектор, сонаправленный с вектором, имеющим бóльшую длину и его модуль равен … (подумайте, чему?):

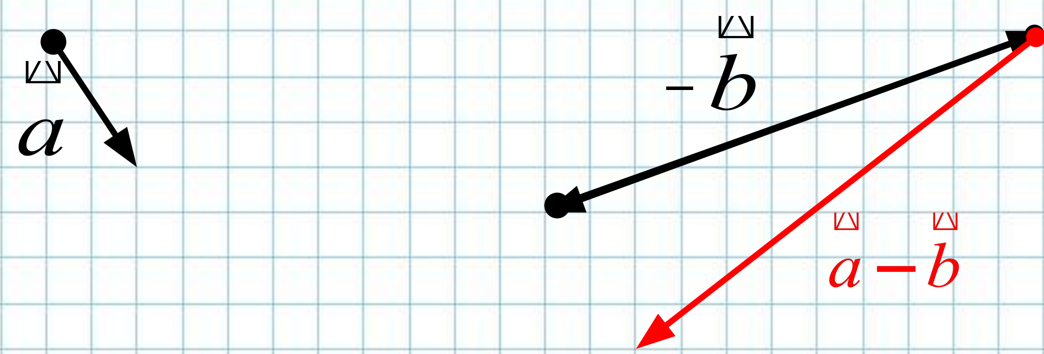
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$$

$$\left|\vec{b}\right| > \left|\vec{a}\right|$$

Также можно найти разность двух векторов – в результате получается **_вектор_**. При вычитании двух векторов применяется видоизмененное *правило треугольника* – вначале оба вектора строятся с общей начальной точкой, затем соединяются концы этих векторов с выбором направления к «уменьшаемому» вектору:



Или: т.к. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, то можно вначале построить вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, а затем оба вектора сложить по правилу треугольника.



Задача 1.

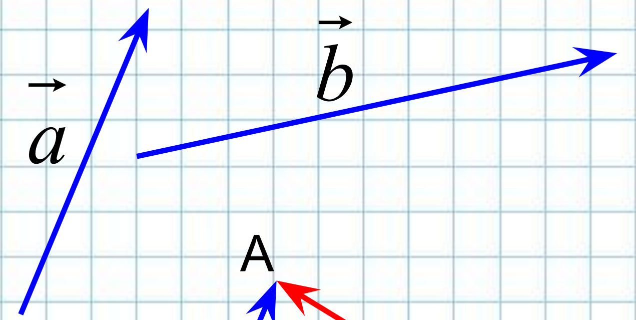
•

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;

2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;

3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов =** $\vec{a}+\vec{b}$

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a}-\vec{b}$



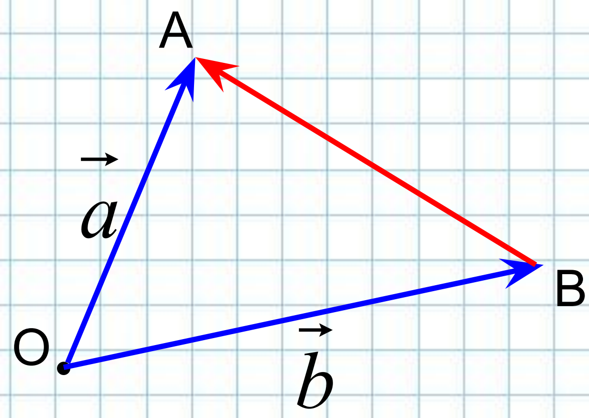
$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$

$$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$$



Сложение векторов, как и сложение чисел подчиняется законам:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – переместительный закон сложения;

2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ – сочетательный закон сложения;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

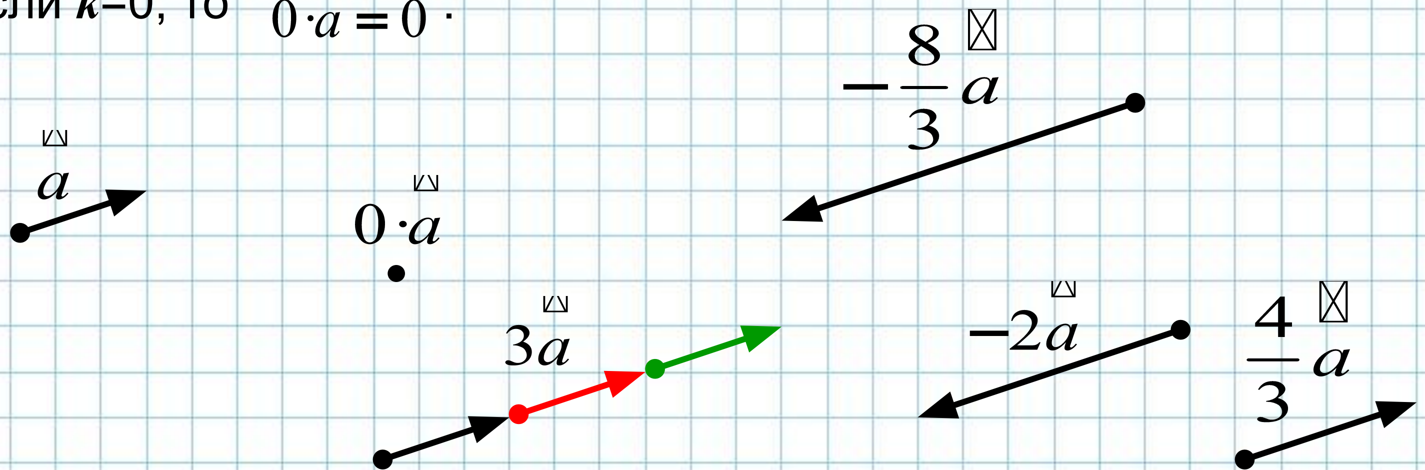
4) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Следующее действие с векторами – умножение вектора на число k. В результате этого действия получается **вектор**, причем:

1) если k>0, то $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и $\left|k\vec{a}\right|=\left|k\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

2) если k<0, то $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $\left|k\vec{a}\right|=\left|k\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

3) если k=0, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

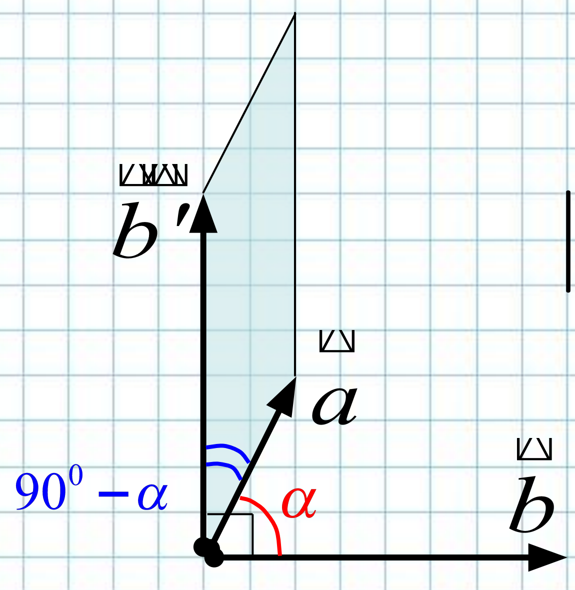


И еще одно действие с векторами – умножение двух векторов. В школьном курсе геометрии изучается *скалярное произведение* векторов. В результате этого действия (в отличии от предыдущих действий с векторами) получается **число**, равное произведению модулей двух данных векторов на косинус угла между этими векторами, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}}.$$

Геометрически скалярное произведение векторов можно понимать как площадь параллелограмма (или противоположная ей величина), стороны которого образуются одним из данных векторов и вектором, перпендикулярным второму с таким же модулем:

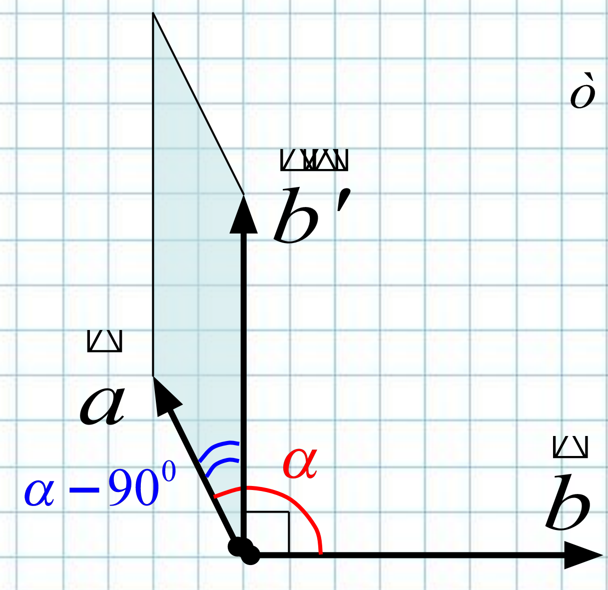
$$S = |\vec{a}|\cdot|\vec{b'}|\cdot\sin(90^0-\alpha) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b};\qquad S = |\vec{a}|\cdot|\vec{b'}|\cdot\sin(\alpha-90^0) = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = -\vec{a}\cdot\vec{b}.$$



α – острый угол

$$|\vec{b}| = |\vec{b'}|$$

т.е. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = S$

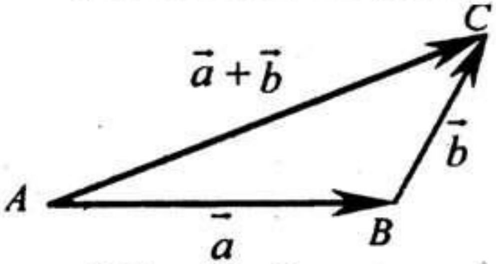


α – тупой угол

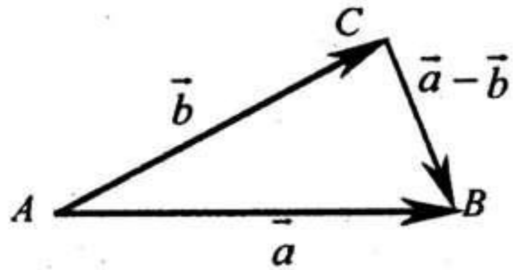
1. Сумма и разность векторов:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

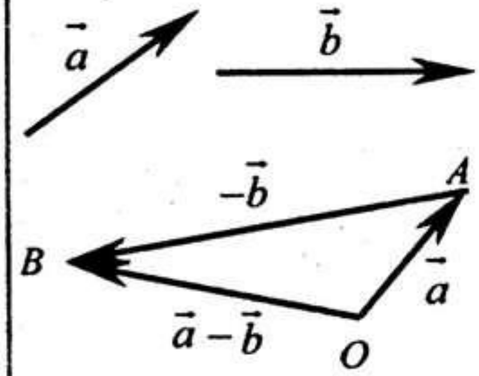
$$\boxed{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}}$$



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



$\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$

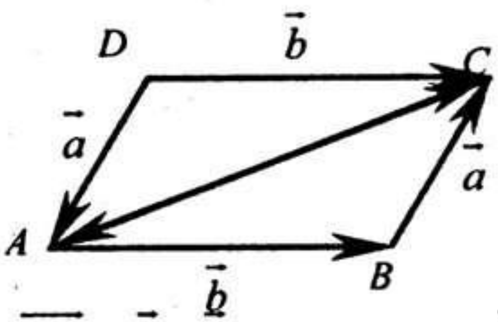


$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

а)

2. Законы сложения векторов:

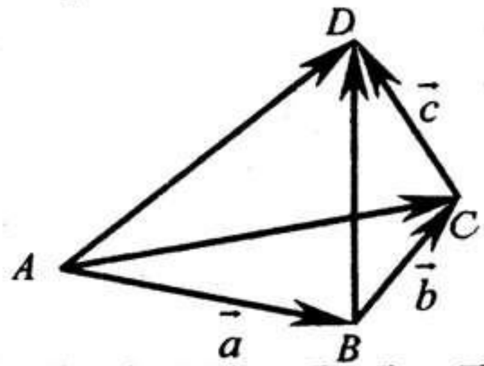


$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a}$,

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Переместительный закон

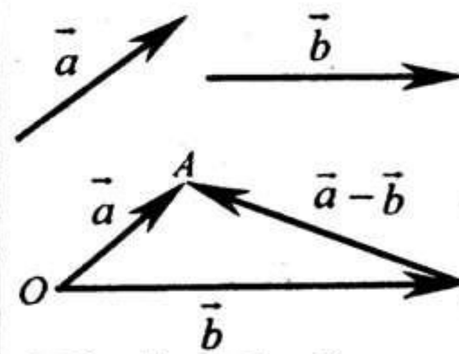


$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Сочетательный закон



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

Задача 2.

Упростить выражение:

1) *От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;*
2) *От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;*
3) *Соединить начало 1-го и конец 2-го* - ***получаем сумму векторов =*** $\vec{a}+\vec{b}$

Решение:

1) *От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;*
2) *От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;*
3) *Соединить начало 1-го и конец 2-го* - ***получаем сумму векторов =*** $\vec{a}+\vec{b}$

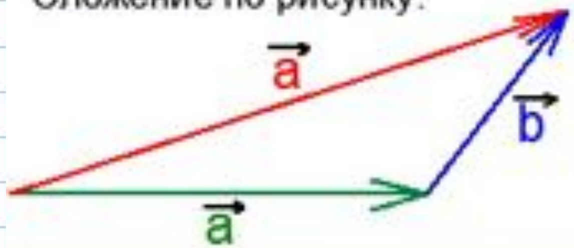
1) *От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;*
2) *От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;*
3) *Соединить начало 1-го и конец 2-го* - ***получаем сумму векторов =*** $\vec{a}+\vec{b}$

) *От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;*
) *От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;*
) *Соединить начало 1-го и конец 2-го* - ***получаем сумму векторов =*** $\vec{a}+\vec{b}$

Первый распределительный закон позволяет нам раскрыть скобки.
А переместительное свойство сложения векторов – привести подобные.

Действия с векторами:

Сложение по рисунку:

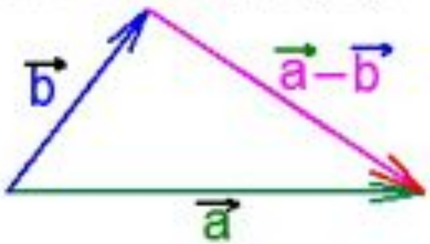


По координатам:

$\vec{a}(a_1;\ a_2)$

$\vec{b}(b_1;\ b_2)$ $\Longrightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}(a_1+b_1;a_2+b_2)$

Вычитание по рисунку:



По координатам:

$\vec{a}(a_1;\ a_2)$

$\vec{b}(b_1;\ b_2)$ $\Longrightarrow$ $\vec{a}-\vec{b}(a_1-b_1;a_2-b_2)$

Умножение на число по рисунку:

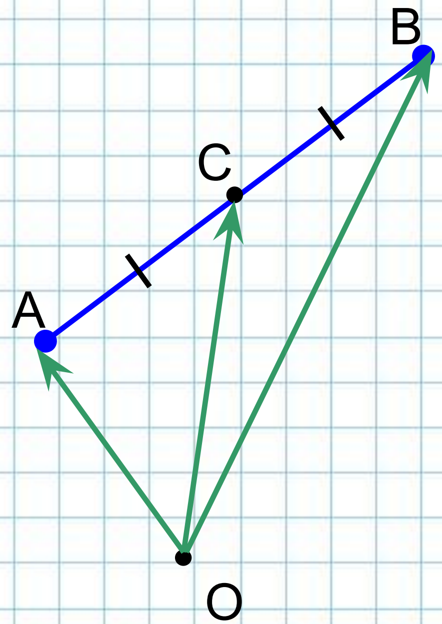
По координатам:

$\vec{b}(b_1;\ b_2)$ $\Longrightarrow$ $k\vec{b}(kb_1;kb_2)$

ЗАДАЧА 3:

Точка С – середина отрезка АВ, а О – произвольная точка плоскости. Доказать, что

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$



$$+\begin{array}{l} \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \end{array}$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$$

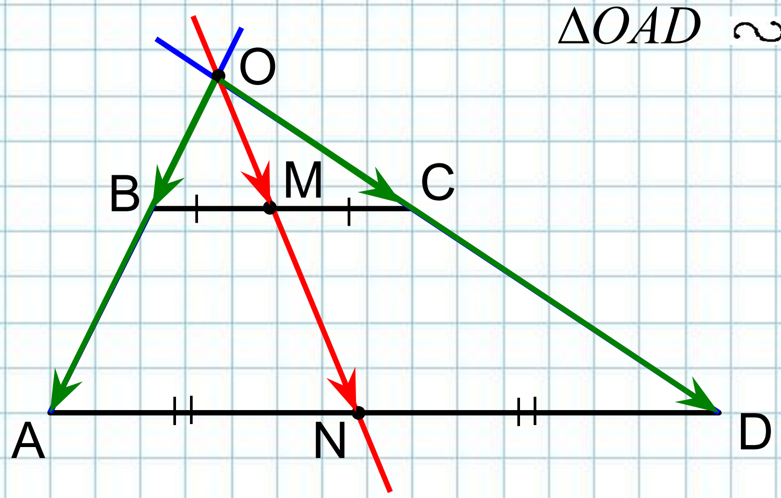
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

ЗАДАЧА 4:

Доказать, что прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон



$\Delta OAD \sim \Delta OBC$ - по первому признаку

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = k$$

$$\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$$

$$\overrightarrow{ON} = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ - коллинеарны

Задача 5

Дано: ABCD — тетраэдр

AB = AD = DC = BC = DD = AC

M ∈ AB, AM = MB

N ∈ AD, AN = ND

P ∈ CD, CP = PD

Q ∈ BC, BQ = QC

Задание:

а) выписать пары равных векторов

б) определить вид четырехугольника MNHQ

Решение:

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

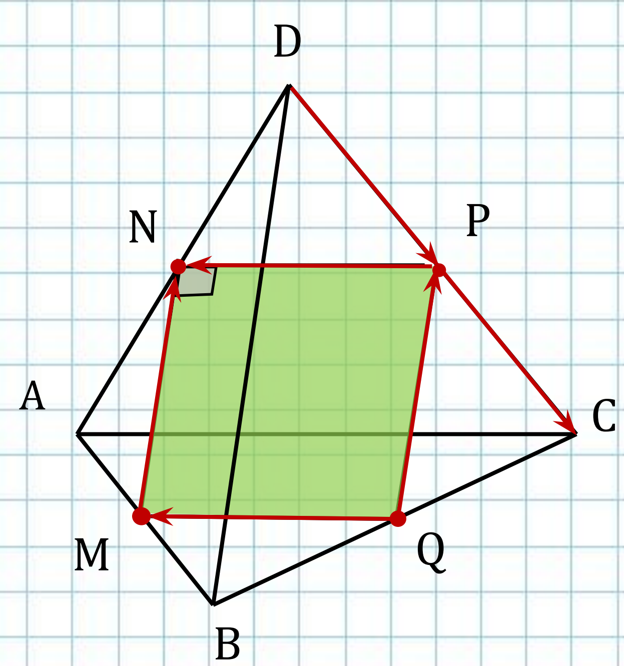
1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a} + \vec{b}$**



б) NP ∥ AC, QM ∥ AC

MN ∥ DB, QP ∥ DB

MN = DB = PN = QM,

DB ⊥ AC ⇒ MN ⊥ NP ⇒

⇒ MNPQ — квадрат

Задача 6

Упростить выражение:

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a}+\vec{b}$**

Решение:

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a}+\vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a}+\vec{b}$**

1) От произвольной точки отложить вектор (методом параллельного переноса), равный первому;
2) От конца полученного вектора отложить вектор, равный второму;
3) Соединить начало 1-го и конец 2-го - **получаем сумму векторов = $\vec{a}+\vec{b}$**

- Заменим в выражении на сумму.

- Для этого заменим отрицательные векторы на противоположные.

Вектор – BC = вектор CB,
вектор – PM = вектор MP.
Вектор – AP = вектор PA.
Вектор AC + вектором CB = вектор AB.
Векторы MP + PA = вектор MA.

Затем, складывая векторы AB и BM, получаем вектор AM.
В итоге сумма векторов AM и MA дают нулевой вектор. **Выражение упрощено.**