Семинар 1:

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка задачи

- Имеется **m** поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и **n** потребителей $B_1, B_2, \ldots, B_n$ некоторого груза.
- Для каждого поставщика и потребителя заданы запасы $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и объем потребления $b_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
- Известна **стоимость перевозки** единицы груза $c_{ij} \geq 0$ от i-го поставщика к j-му потребителю.
- **Требуется найти объемы** всех **перевозок** x_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю, при которых **общая стоимость минимальна**.

Математическая постановка задачи

- Пусть $\mathbf{X} = (x_{ij})$ – m×n матрица, где x_{ij} – объем перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю.
- Общие затраты на перевозку груза определяются функцией:

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Математическая постановка транспортной задачи определяется **задачей линейного программирования**:

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

- Решение **$X = (x_{ij})$** транспортной задачи, удовлетворяющее условиям и имеющее не более $m+n-1$ занятой клетки , будем называть **опорным планом** транспортной задачи.
- **Закрытая модель**: суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- **Открытая модель**:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Задача 1

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	**140**
A_2	12	4	8	2	**160**
A_3	3	5	14	6	**100**
b_j	**80**	**40**	**150**	**130**	$\boxed{400}$

400

400

1. Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **80**	11 **40**	3 **20**	13	**140**
A_2	12	4	8 **130**	2 **30**	**160**
A_3	3	5	14	6 **100**	**100**
b_j	**80**	**40**	**150**	**130**	400

Начальный опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$z(X) = 1\cdot 80 + 11\cdot 40 + 3\cdot 20 + 8\cdot 130 + 2\cdot 30 + 6\cdot 100 = 2280$$

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **80**	11	3 **60**	13	**140**
A_2	12	4 **30**	8	2 **130**	**160**
A_3	3	5 **10**	14	6	**100**
b_j	**80**	**40**	**150**	**130**	400

Начальный опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 130 \\ 0 & 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(X) = 1 \cdot 80 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 14 \cdot 90 + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 130 = 1950 < 2280$$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

- **Теорема**

Если опорный план $\mathbf{X = (x_{ij})}$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков u_i, $i = 1,\ldots, m$ и потребителей v_j, $j = 1,\ldots, n$, удовлетворяющие условиям:

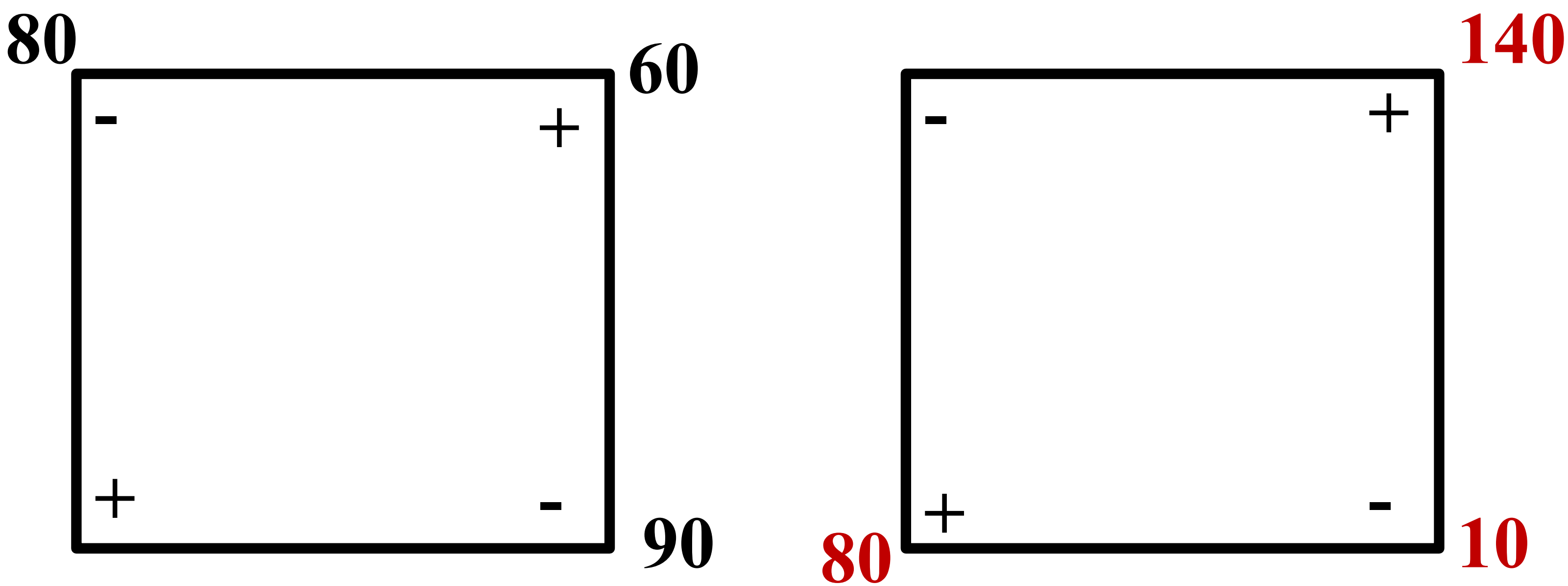
$u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$ (*для занятых клеток*),

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ при $x_{ij} = 0$ (*для свободных клеток*).

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 **80**	11 - 17	3 **60**	13 - 21	**140**	**0**
A_2	12 - 1	4 **30**	8 5	2 **130**	**160**	**10**
A_3	3 9	5 **10**	14 **90**	6 - 3	**100**	**11**
b_j	**80**	**40**	**150**	**130**	400	
v_j	**1**	**– 6**	**3**	**– 8**		

Цикл



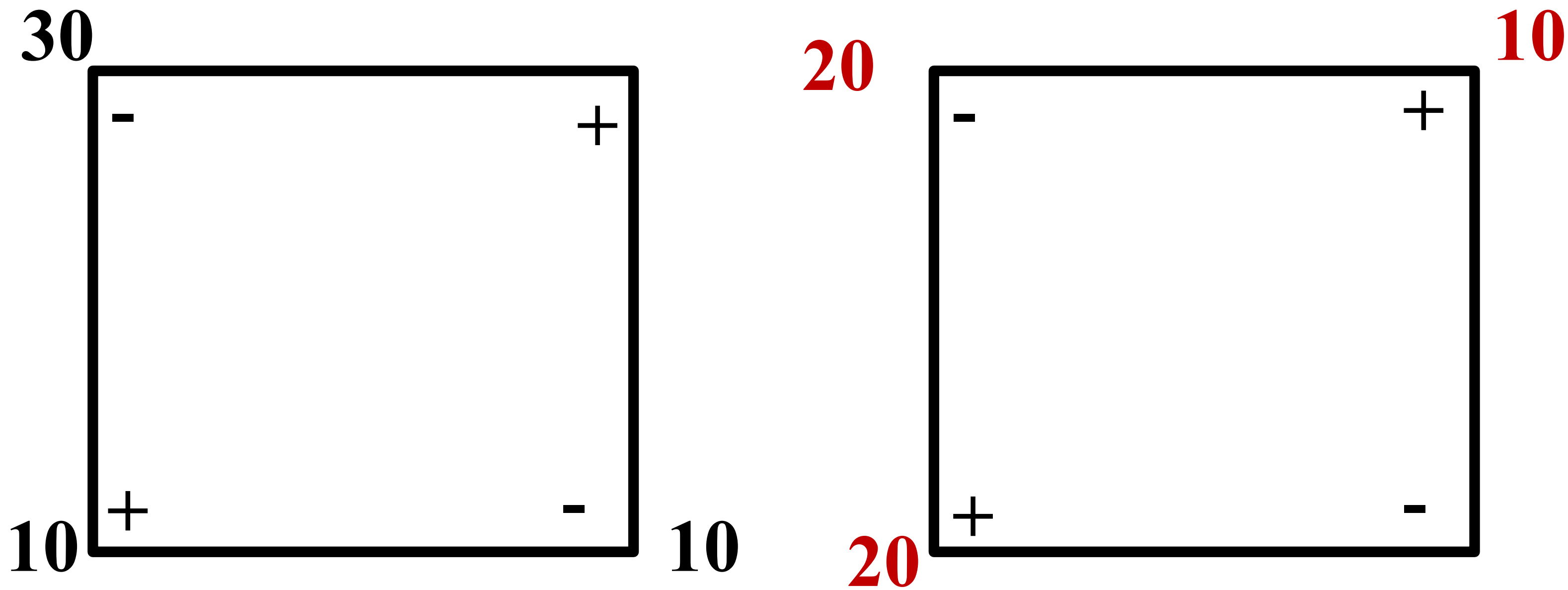
$$\Delta = \min(80, 90) = 80$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 $\boxed{-9}$	11 $\boxed{-17}$	3 **140**	13 $\boxed{-21}$	**140**	**-11**
A_2	12 $\boxed{-10}$	4 **30**	8 $\boxed{5}$	2 **130**	**160**	**- 1**
A_3	3 **80**	5 **10**	14 **10**	6 $\boxed{-3}$	**100**	**0**
b_j	**80**	**40**	**150**	**130**	400	
v_j	**3**	**5**	**14**	**3**		

$z(X) = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 14 \cdot 10 + 3 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 1230 < 1950$

Цикл



$$\Delta = \min(10, 30) = 10$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 $\boxed{-4}$	11 $\boxed{-12}$	3 **140**	13 $\boxed{-16}$	**140**	**- 5**
A_2	12 $\boxed{-10}$			2	**160**	**0**
A_3	3 **80**	**20**	$\boxed{-5}$	6 $\boxed{-3}$	**100**	**1**
b_j	**80**	**40**	**150**	**130**	400	
v_j	**2**	**4**	**8**	**2**		

План оптимален!

$z(X) = 3\cdot80 + 5\cdot20 + 4\cdot20 + 8\cdot10 + 3\cdot140 + 2\cdot130 = 1180 < 1230$

Открытая модель транспортной задачи

- **Модель** транспортной задачи называется **открытой**, если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ (суммарные запасы не равны суммарным потребностям).

Открытая модель транспортной задачи

Открытую модель можно свести к закрытой:

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного потребителя B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и нулевыми тарифами перевозок в столбце.

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$,то вводят фиктивного поставщика A_{m+1} с запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми тарифами перевозок в строке.

Задача 2

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	7	4	7	**100**
A_2	10	13	24	7	**100**
A_3	8	19	12	18	**200**
b_j	**90**	**80**	**30**	**170**	

400

370

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Метод «северо-западного угла»

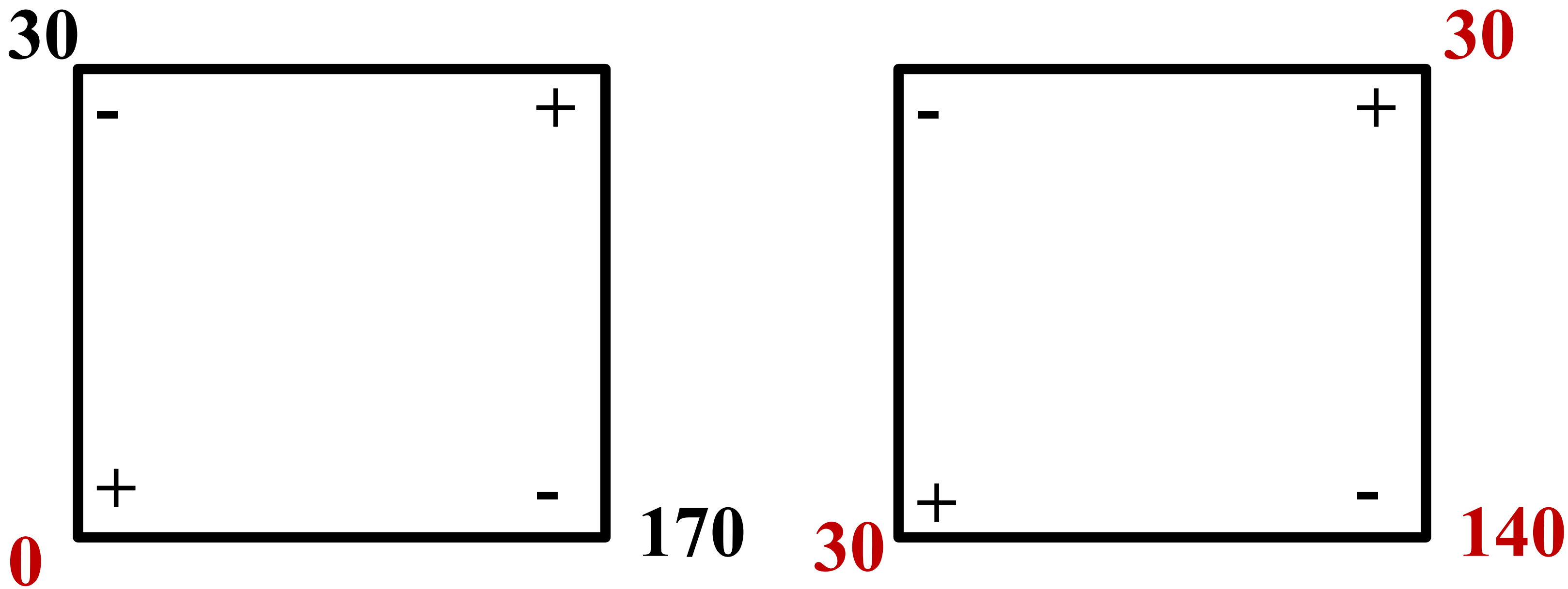
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	3 **90**	7 **10**	4	7	0	**100**
A_2	10	13 **70**	24 **30**	7	0	**100**
A_3	8	19	12	18 **170**	0 **30**	**200**
b_j	**90**	**80**	**30**	**170**	**30**	400

$$z(X) = 3 \cdot 90 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 70 + 24 \cdot 30 + 18 \cdot 170 = 5030$$

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 **90**	7 **10**	4 $\boxed{14}$	7 $\boxed{17}$	0 $\boxed{6}$	**100**	**0**
A_2	10 $\boxed{-1}$	13 **70**	24 **30**	7 $\boxed{23}$	0 $\boxed{12}$	**100**	**6**
A_3	8 $\boxed{-11}$	19 $\boxed{-18}$	12	18 **170**	0 **30**	**200**	**- 6**
b_j	**90**	**80**	**30**	**170**	**30**	400	
v_j	**3**	**7**	**18**	**24**	**6**		

Цикл



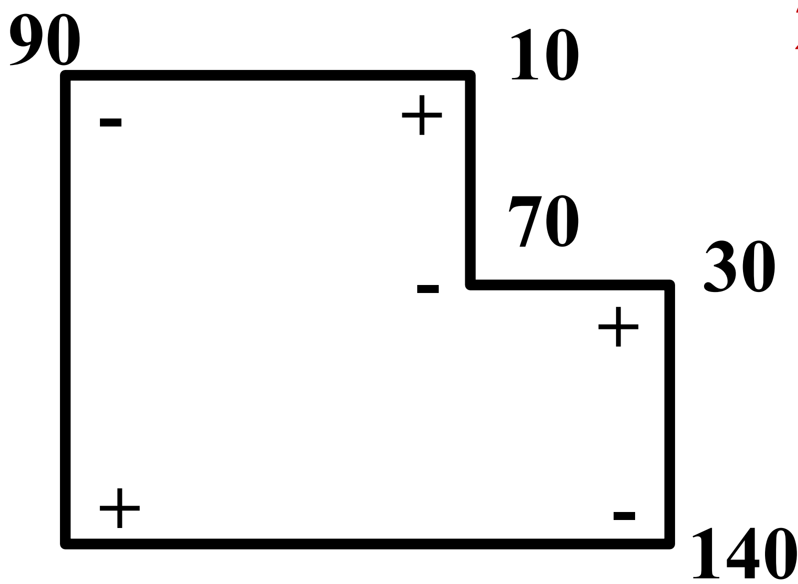
$\Delta = \min(30, 170) = 30$

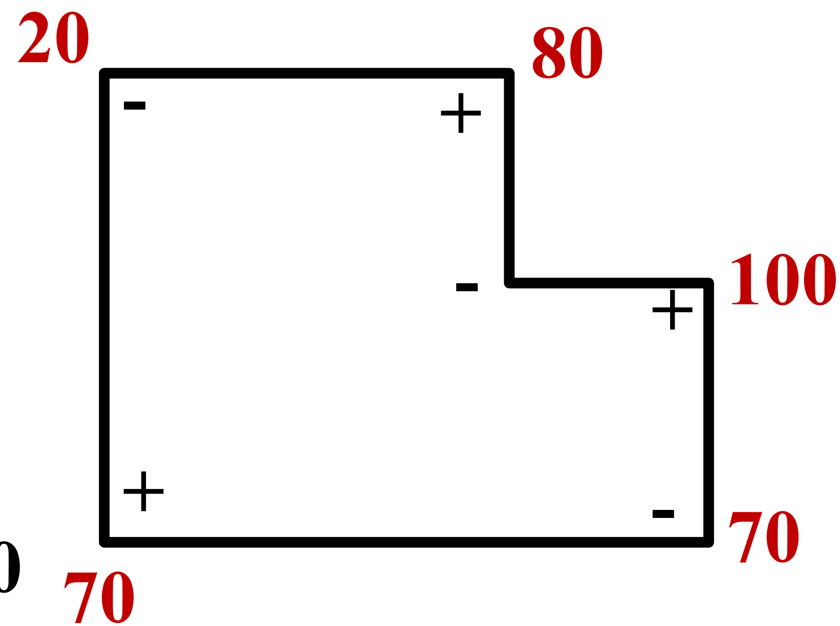
Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 **90**	7 **10**	4 $\boxed{-9}$	7 $\boxed{-6}$	0 $\boxed{-17}$	**100**	**-17**
A_2	10 $\boxed{-1}$	13 **70**	24 $\boxed{-23}$	7 **30**	0 $\boxed{-11}$	**100**	**-11**
A_3	8 $\boxed{12}$	19 $\boxed{5}$	12 **30**	18 **140**	0 **30**	**200**	**0**
b_j	**90**	**80**	**30**	**170**	**30**	400	
v_j	**20**	**24**	**12**	**18**	**0**		

$z(X) = 3 \cdot 90 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 70 + 7 \cdot 30 + 18 \cdot 140 + 12 \cdot 30 = 4130 < 5030$

Цикл





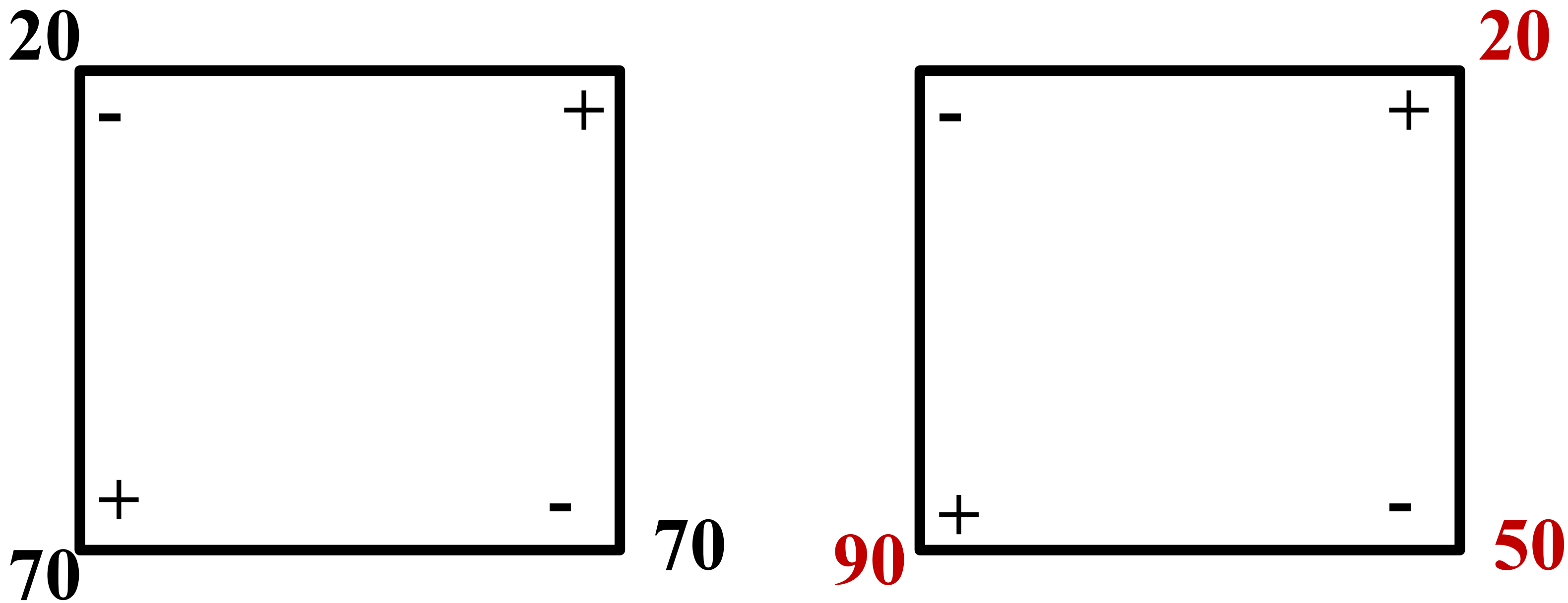
$$\Delta = \min(90, 70, 140) = 70$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 **20**	7 **80**	4 $\boxed{3}$	7 $\boxed{6}$	0 $\boxed{-5}$	**100**	-5
A_2	10 $\boxed{-13}$	13 $\boxed{-12}$	24 $\boxed{-23}$	7 **100**	0 $\boxed{-11}$	**100**	-11
A_3	8 **70**	19 $\boxed{-7}$	12 **30**	18 **70**	0 **30**	**200**	0
b_j	**90**	**80**	**30**	**170**	**30**	400	
v_j	**8**	**12**	**12**	**18**	**0**		

$$z(X) = 3 \cdot 20 + 7 \cdot 80 + 8 \cdot 70 + 12 \cdot 30 + 18 \cdot 70 + 7 \cdot 100 = 3500 < 4130$$

Цикл



$$\Delta = \min(20, 70) = 20$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 $\boxed{-6}$	7 **80**	4 $\boxed{-3}$	7 **20**	0 $\boxed{-11}$	**100**	-11
A_2	10 $\boxed{-13}$				0	**100**	-11
A_3	8 **90**	$\boxed{-1}$	**30**	**50**	0 **30**	**200**	0
b_j							
v_j							

План оптимален!

Оптимальный план: $X = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 90 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$

$z(X) = 8 \cdot 90 + 7 \cdot 80 + 12 \cdot 30 + 7 \cdot 100 + 7 \cdot 20 + 18 \cdot 50 = 3380 < 3500$

Задача 3

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	**60**
A_2	2	16	4	6	**125**
A_3	13	4	17	16	**75**
b_j	**100**	**100**	**50**	**50**	

260

300

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Метод наименьшей стоимости

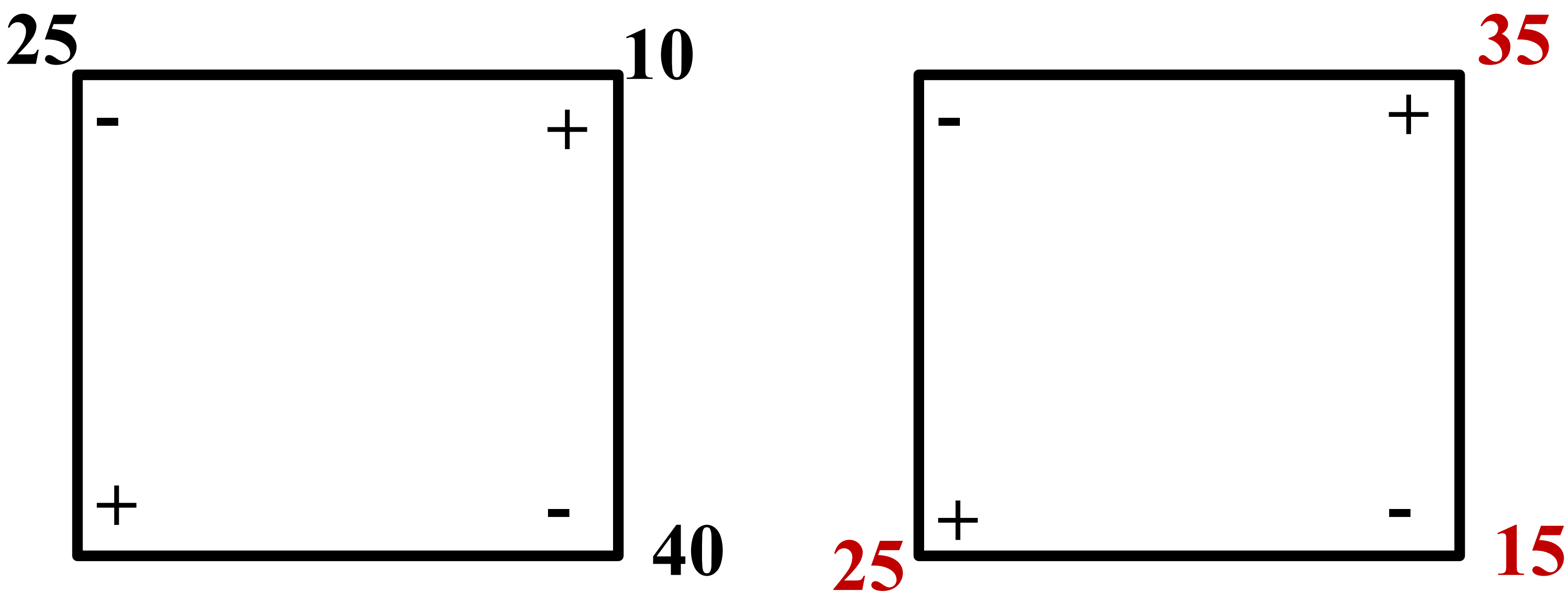
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 **60**	13	12	3	**60**
A_2	2 **40**	16 **25**	4 **50**	6 **10**	**125**
A_3	13	4 **75**	17	16	**75**
A_4	0	0	0	0 **40**	**40**
b_j	**100**	**100**	**50**	**50**	300

$$z(X) = 1{\cdot}60 + 2{\cdot}40 + 16{\cdot}25 + 4{\cdot}75 + 4{\cdot}50 + 6{\cdot}10 = 1100$$

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 **60**	13 $\boxed{2}$	12 $\boxed{-9}$	3 $\boxed{2}$	**60**	-1
A_2	2 **40**	16 **25**	4 **50**	6 **10**	**125**	0
A_3	13 $\boxed{-23}$	4 **75**	17 $\boxed{-25}$	16 $\boxed{-22}$	**75**	-12
A_4	0 $\boxed{-4}$	0 $\boxed{10}$	0 $\boxed{-2}$	0 **40**	**40**	-6
b_j	**100**	**100**	**50**	**50**	300	
v_j	**2**	**16**	**4**	**6**		

Цикл



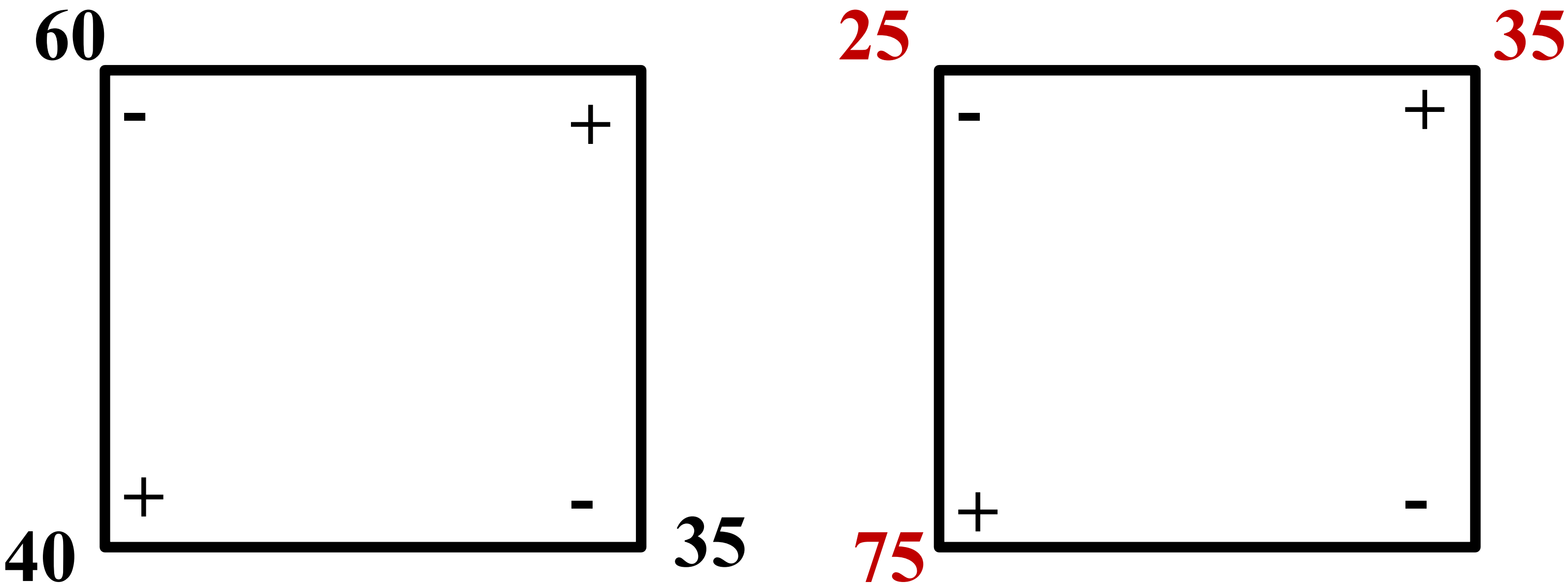
$\Delta = \min(25, 40) = 25$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13 - 8	12 - 9	3 2	60	-1
A_2	2 40	16 - 10	4 50	6 35	125	0
A_3	13 - 13	4 75	17 - 15	16 - 12	75	- 2
A_4	0 - 4	0 25	0 - 2	0 15	40	- 6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	6	4	6		

$z(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 35 = 850 < 1100$

Цикл



$$\Delta = \min(35, 60) = 35$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 25	13 $\boxed{-10}$	12 $\boxed{-9}$	3 35	60	0
A_2				6	125	1
A_3	$\boxed{-11}$	75	$\boxed{-13}$	16 $\boxed{-12}$	75	1
A_4	0 $\boxed{-2}$	0 25	0 $\boxed{0}$	0 15	40	-3

План оптимален!

Оптимальный план:

$$X = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 35 \\ 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(X) = 1\cdot25 + 2\cdot75 + 4\cdot75 + 4\cdot50 + 3\cdot35 = 780 < 850$$

Транспортные задачи с дополнительными ограничениями

- В некоторых транспортных задачах наложены дополнительные ограничения на перевозку грузов.

1. Если в закрытой задаче перевозки от поставщика **A_i** к потребителю **B_j** не могут быть осуществлены (стоит ***блокировка***), для определения оптимального решения задач предполагают, что **тариф перевозки** единицы груза равен сколь угодно большому числу **M**.

2. Если дополнительным условием в задаче является обеспечение перевозки от **поставщика** A_i к **потребителю** B_j ***в точности*** a_{ij} единиц груза, в клетку A_iB_j записывают указанное число a_{ij}, а эту клетку считают **свободной** со сколь угодно большим тарифом **M**.

3. Если от поставщика A_i к потребителю B_j должно быть перевезено ***не менее*** a_{ij} единиц груза, то запасы пункта A_i и потребности B_j полагают ***меньше фактических*** на a_{ij} единиц. После нахождения оптимального плана перевозку в клетке A_iB_j увеличивают на a_{ij} единиц.

4. Если от поставщика A_i к потребителю B_j требуется перевезти ***не более*** a_{ij} единиц груза, то вводят дополнительного потребителя $B_{n+1} = B_{ij}$, которому записывают те же тарифы, что и для B_j, ***за исключением*** тарифа в i–й строке, который считают равным сколь угодно большому числу **M**.

Потребности пункта B_j считают равными a_{ij}, а потребности B_{ij} полагают равными b_j - a_{ij}.

Спасибо за внимание!