Системы линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i (i=1,…,m; b=1,…,n) – некоторые известные числа, а $x_1,\ldots,x_n$ – неизвестные. В обозначении коэффициентов a_{ij} первый индекс i обозначает номер уравнения, а второй j – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Коэффициенты при неизвестных будем записывать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

, которую назовём *матрицей системы*.

Числа, стоящие в правых частях уравнений, $b_1, \dots, b_m$ называются *свободными членами.*

Совокупность *n* чисел *c1,…,cn* называется *решением* данной системы, если каждое уравнение системы обращается в равенство после подстановки в него чисел *c1,…,cn* вместо соответствующих неизвестных *x1,…,xn*.

Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. В противном случае, т.е. если система не имеет решений, то она называется *несовместной*.

1.Система может иметь единственное решение.
2.Система может иметь бесконечное множество решений. Например,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

. Решением этой системы является любая пара чисел, отличающихся знаком.
3. И третий случай, когда система вообще не имеет решения. Например,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

, если бы решение существовало, то $x_1 + x_2$ равнялось бы одновременно нулю и единице.

Теорема Кронекера-Капелли.

- Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.
- Если при этом ранг равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если он меньше числа неизвестных, решений -множество.

Пример. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 - 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение. Поскольку все элементы матрицы системы входят в расширенную матрицу, то ранги обеих матриц можно вычислять одновременно.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & -22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица A содержит две ненулевые строки, значит ее ранг $r(\bar{A})$ равен двум. В матрице $\bar{A}$ три ненулевых строки, ее ранг $r(A)$ равен трем. А т.к. $r(A) \neq r(\bar{A})$, система несовместна.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда можно доказать следующий результат.
Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 13, \\ 4x + 3y - z = 7, \\ x - 2y + 5z = 15 \end{cases}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 24 + 1 - 9 - 4 + 20 = 14 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \\ 15 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 195 - 42 + 15 - 135 - 26 + 35 = 42,$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 3 \\ 4 & 7 & -1 \\ 1 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 70 + 130 - 13 - 21 + 30 - 260 = -14,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 15 \end{vmatrix} = 90 - 140 - 7 - 39 + 28 + 60 = 28.$$

ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ ОТВЕТ

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2.$$

МЕТОД ГАУССА

выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приведем её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

К *элементарным преобразованиям* матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

Примеры: Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x-3y+2x=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-4) \\ \times(3)^{+} \\ \end{array} \left|\begin{array}{c} \times 5 \\ + \\ \times 3 \end{array}\right. \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ + \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases} 3x-3y+2x=2, \\ -3y-2z=-5, \\ 4z=4. \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{array}$$

Метод обратной матрицы

Пусть detA≠0, тогда существует единственная обратная матрица А-1. Решение системы уравнений, записанной в матричной форме АХ=В можно найти по следующей формуле Х=А-1·В

Пример.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -8$$

обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Находим:

$$X = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 3(-1) - 7\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1(-1) - 5\cdot 1 \\ 4\cdot 3 - 2(-1) - 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

т.е. x=2; y=0; z=-1 - решение данной системы.