Связь между координатами векторов и координатами точек.

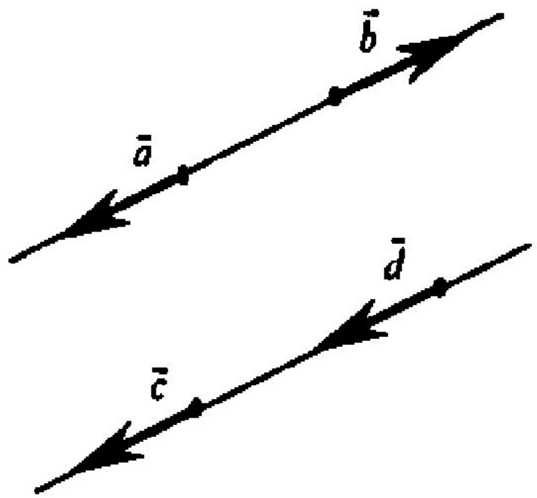
Цели урока:

- ввести понятие радиус-вектора произвольной точки пространства;
- доказать, что координаты точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора, а координата любого вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала;
- отработать понятие равных векторов при решении задач;
- отработать понятие коллинеарных и компланарных векторов при решении задач.

Повторим:

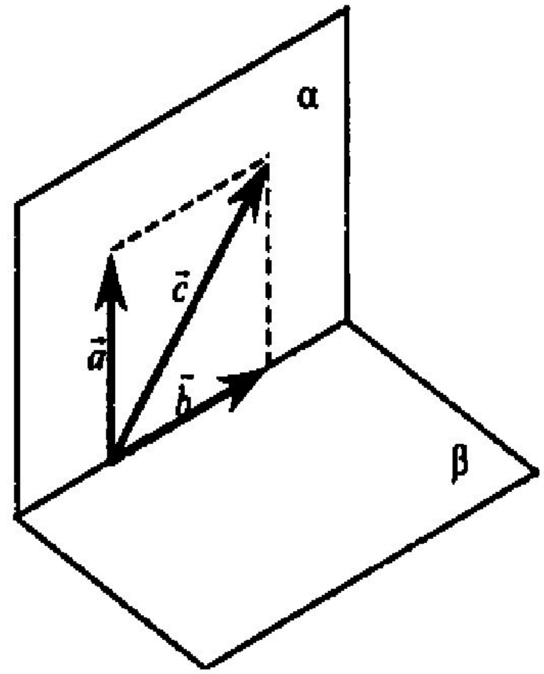
1) Какие векторы называются коллинеарными?
2) Какие векторы называются компланарными?

Коллинеарные векторы



Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

Компланарные векторы



Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной н той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Задача№ 415 а), д)

а) *Дано:* $\vec{a}\{-3; -3; 0\}$ $\vec{i}$; $\vec{j}$.

Установить: компланарность данных векторов.

Решение: Если вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то векторы $\vec{a}$; $\vec{i}$; $\vec{j}$ компланарны, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$$\begin{aligned} -3 &= x\vec{i} \\ -3 &= y\vec{j} \\ 0 &= z\vec{k} \end{aligned}$$

. $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ – единичные векторы. $x = -3$; $y = -3$; $z = 0$. (*Ответ*: $\vec{a}$; $\vec{i}$; $\vec{j}$ – компланарные векторы.)

$\vec{m}\{1; 0; 2\}$

д) *Дано:* $\vec{n}\{1; 1; -1\}$

$\vec{p}\{-1; 2; 4\}$

Установить: компланарность данных векторов.

Решение:

1. Векторы $\vec{m}$; $\vec{n}$; $\vec{p}$ не коллинеарны, так как координаты этих векторов не пропорциональные друг другу числа.

2. $\vec{p} = x\vec{m} + y\vec{n}$; $\vec{p}\{-1; 2; 4\} = \{x; 0; 2x\} + \{y; y; -y\}$;

$$\begin{cases} -1 = x + y, \\ 2 = y, \\ 4 = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x + 2 = -1, \\ 2x - 2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = -3, \\ -6 - 2 = 4 \end{cases}$$ (неверно, так как $-8 \neq 4$).

Ответ: $\vec{m}$; $\vec{n}$; $\vec{p}$ – не компланарные векторы.

Изучение нового материала.

1. Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало – с началом координат, называется радиус-вектором данной точки.
2. Координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

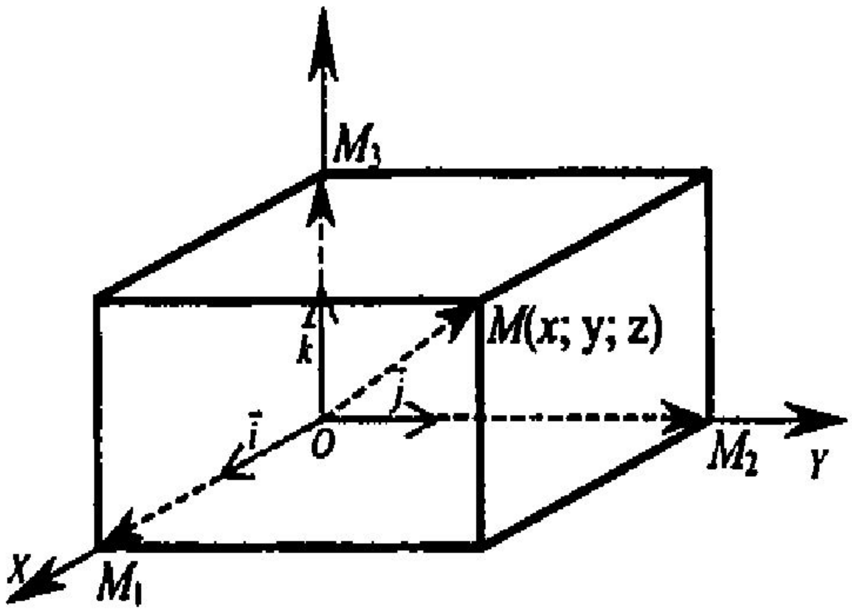


Рис. 7

Пусть $M(x; y; z)$ (рис. 7). Тогда M_1; M_2; M_3 – точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку M, перпендикулярно этим осям. Тогда по правилу параллелепипеда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \quad (1).$$

Докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$.

а) Если M_1 лежит на положительной полуоси абсцисс, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1} \uparrow\uparrow \vec{i}$; $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$;

б) Если M_1 лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -\overrightarrow{OM_1}$, а векторы $\overrightarrow{OM_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$.

Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM_1}$; $\vec{i} = x\vec{i}$.

в) Если M_1 совпадает с нулем, то $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$.

Аналогично $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$; $\overrightarrow{OM_3} = z \cdot \vec{k}$.

Подставим эти выражеиия в равенство (1), получим $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ то есть $\overrightarrow{OM}$ $\{x; y; z\}$.

3. Выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты точек $A\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$; $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ (рис. 8).

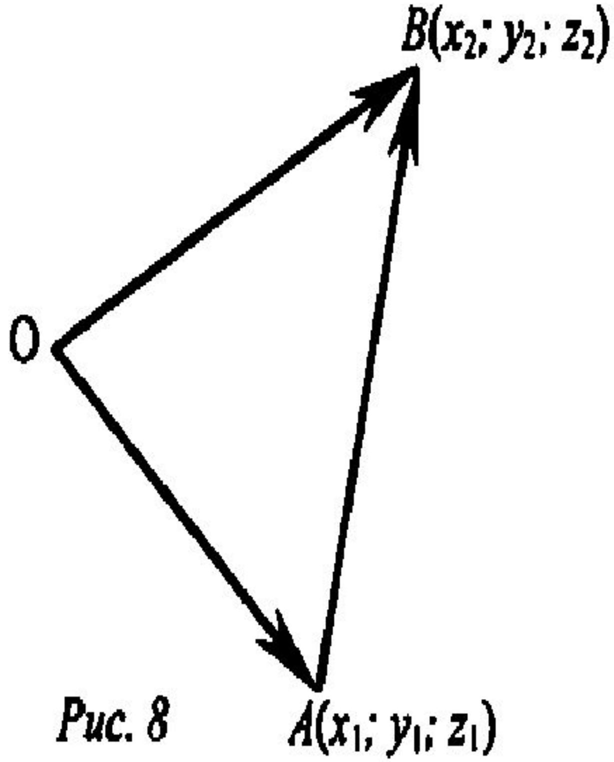


Рис. 8

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} \quad z_2 \cdot \vec{k} - x_1 \cdot \vec{i} - - y_1 \cdot \vec{j} - z_1 \cdot \vec{k} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}.$$

Значит, $\overrightarrow{AB}\,\{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\}$.

Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Закрепление знаний, умений и навыков.

Решить номер 416, 417, 418

№ 416. $A(3, 2; 1)$; $B(1; -3; 5)$; $C(-\frac{1}{3}; 0{,}75; -2\frac{3}{4})$, т.к. координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора.

№ 417. $\overrightarrow{OA}\{2;-3;0\}$, $\overrightarrow{OB}\{7; -12; 18\}$, $\overrightarrow{OC}\{-8; 0; 5\}$, т.к. если O — начало координат, то $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ — радиус-векторы для точек A, B и C.

№ 418. а) $\overrightarrow{AB}\{2-3; -1+1; 4-2\}$, $\overrightarrow{AB}\{-1; 0; 2\}$;

б) $\overrightarrow{AB}\{3+2; -1-6; 0+2)$, $\overrightarrow{AB}\{5; -7; 2)$;

в) $\overrightarrow{AB}\{\frac{1}{2} - 1; \frac{1}{3} - \frac{5}{6}; \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\}$ $\overrightarrow{AB}\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$.

Задача № 420.

– Какие векторы называются равными?

– Каково свойство равных векторов?

– Два вектора называются равными, если их длины равны и они сонаправлены.

– Координаты равных векторов соответственно равны.

Дано: A (3; –1; 5), *B* (2; 3; –4), *C* (7; 0; –1), *D* (8; –4; 8).

Доказать: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Решение: 1) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\{-1; 4; -9\} \\ \overrightarrow{DC}\{-1; 4; -9\}\end{array}\right| \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. 2) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}\{5; -3; 3\} \\ \overrightarrow{AD}\{5; -3; 3\}\end{array}\right| \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Задача № 422 а). *Дано:* $A(-2; -13; 3)$, $B(1; 4: 1)$, $C(-1; -1; -4)$, $D(0; 0; 0)$.

Установить: A; B; C; D; лежат ли в одной плоскости.

Решение: 1) $\overrightarrow{AB}\{3; 17; -2\}$ $\overrightarrow{AC}\{1; 12; -7\}$ $\overrightarrow{AD}\{2; 13; -3\}$.

Так как, сравнивая координаты векторов, мы видим, что они – непропорциональные числа, то делаем вывод, что векторы – не коллинарны.

2) Проверим компланарность векторов.

Предположим, что вектор $\overrightarrow{AD}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}$.

Если коэффициенты разложения x; y находятся однозначно, то векторы компланарны и данные точки лежат в одной плоскости.

$\overrightarrow{AD}\{2; 13; -3\} = x \cdot \overrightarrow{AB}\{3; 17; -2\} + y \cdot \overrightarrow{AC}\{1; 12; -7\}$.

Составим и решим систему уравнений.

Составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 2 = 3x + y, & (1) \\ 13 = 17x + 12y, & (2) \\ -3 = -2x - 7y, & (3) \end{cases}$$; (1): $y = 2 - 3x$; (3): $-3 = -2x - 7(2 - 3x)$; $-3 = -2x -$

$-14 + 21x$; $11 = 19x$; $x = \dfrac{11}{19}$; (1): $y = 2 - 3\dfrac{11}{19}$; $y = 2 - \dfrac{33}{19}$; $y = 2 - 1\dfrac{14}{19}$;

$y = \dfrac{5}{19}$. Проверим справедливость (2) при найденных значениях x и y.

$$17 \cdot \frac{11}{19} + 12 \cdot \frac{5}{19} = 13,\ \frac{247}{19} = 13,\ 13 = 13 \text{ (верно)}.$$

Вывод: векторы $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ – компланарны.

Ответ: точки A; B; C; D лежат в одной плоскости.

IV. Подведение итогов

– Итак, в ходе урока мы изучили понятие радиус-вектора точки, правило нахождения координат вектора, понятие равных векторов. Повторили понятия коллинеарных и компланарных векторов.

Самостоятельная работа.

Вариант I

1. *Дано:*

$A(3; -1; 2)$

$B(x; y^2; z^2 - 2z)$.

$\overrightarrow{AB}\{5; 8; 1\}$

Найти: $x; y; z$.

2. *Дано:*

$A(x^2; y^3 - 3y; -z^2 - z)$

$B(1; y^2 - 3; 11z + 2)$.

$\overrightarrow{AB}\{1; 0; -30\}$

Найти: $x; y; z$.

Спасибо за внимание!