

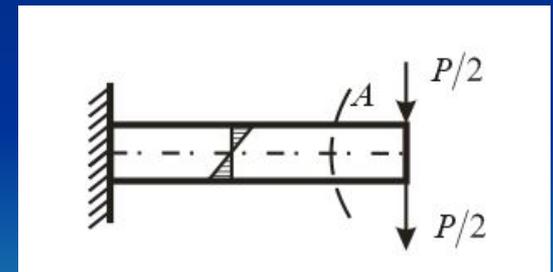
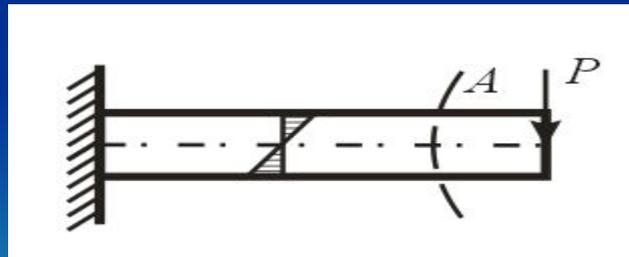
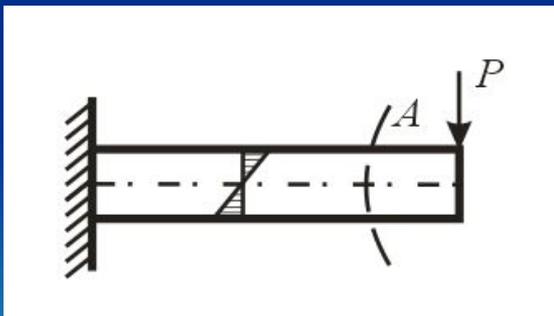
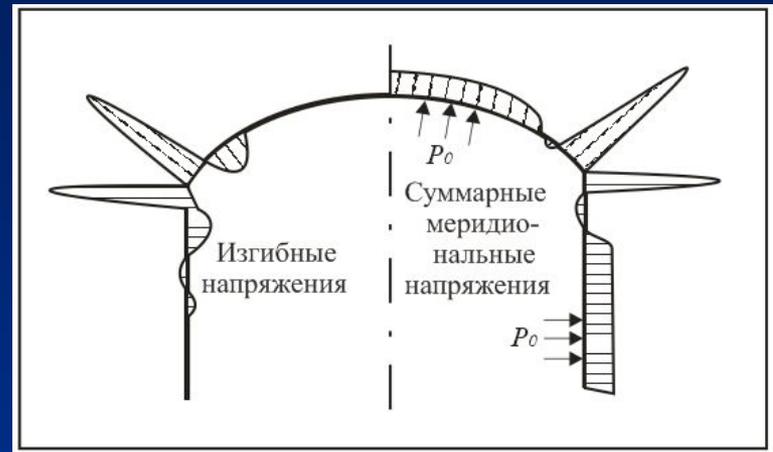
Основные гипотезы линейной теории упругости

1. Среда заполняет тело сплошным образом и не меняет свою непрерывность в процессе приложения нагрузок.
2. До приложения нагрузок начальные напряжения в теле равны нулю.
3. Напряжения в теле, возникающие после приложения нагрузок, связаны линейной зависимостью с деформациями..
4. Перемещения тела малы по сравнению с линейными размерами тела.
5. Относительные деформации и углы сдвига в материале малы по сравнению с единицей



Принцип Сен-Венана

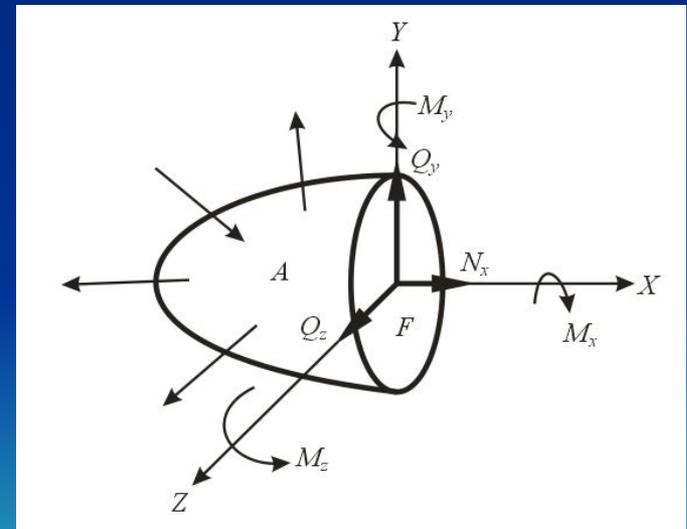
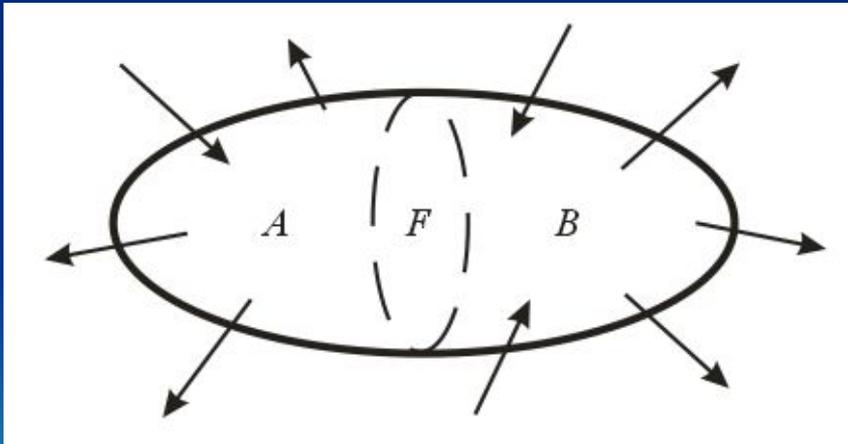
Если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, быстро убывающие от места приложения нагрузок



1. Теория напряжений

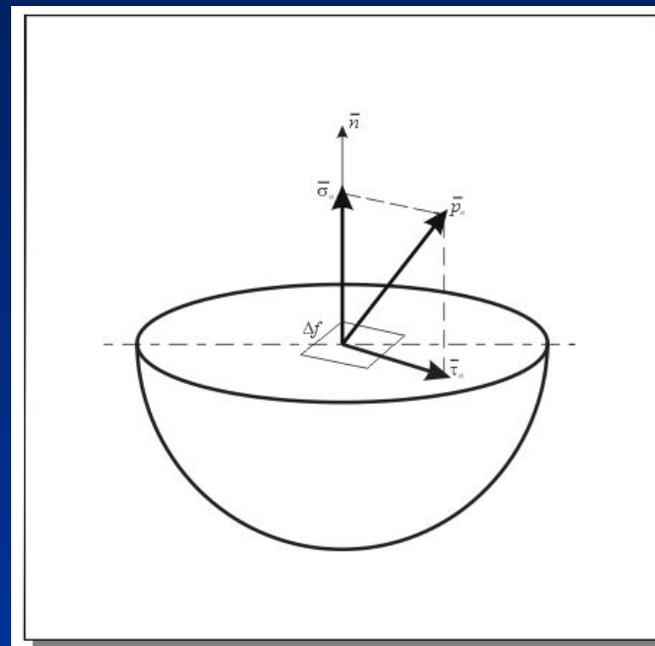
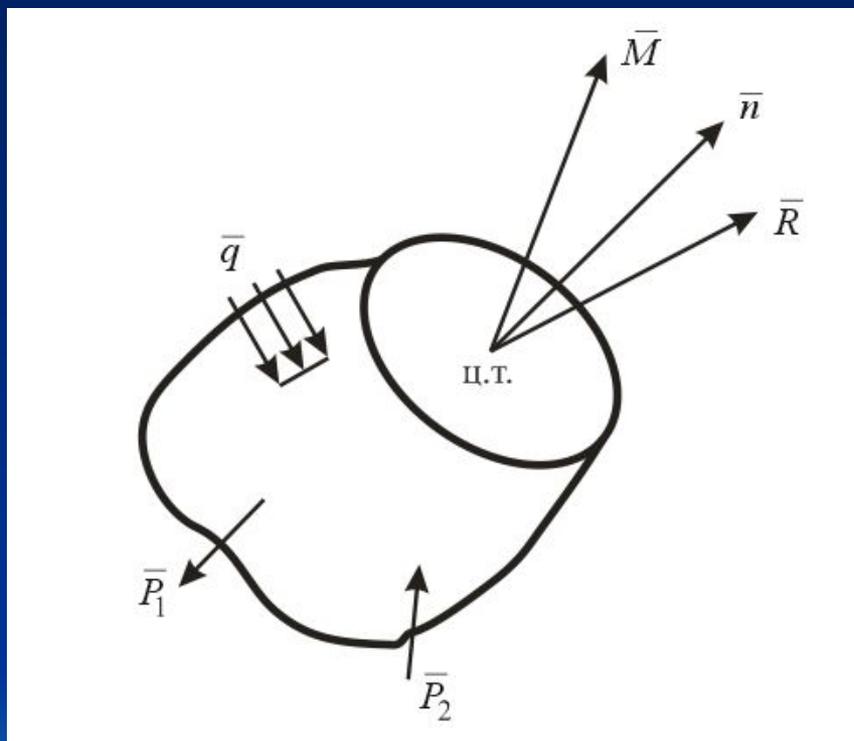
Напряжения и нагрузки

1. поверхностные;
2. сосредоточенные силы;
3. объемные.



$$\bar{P}_n = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta f}$$

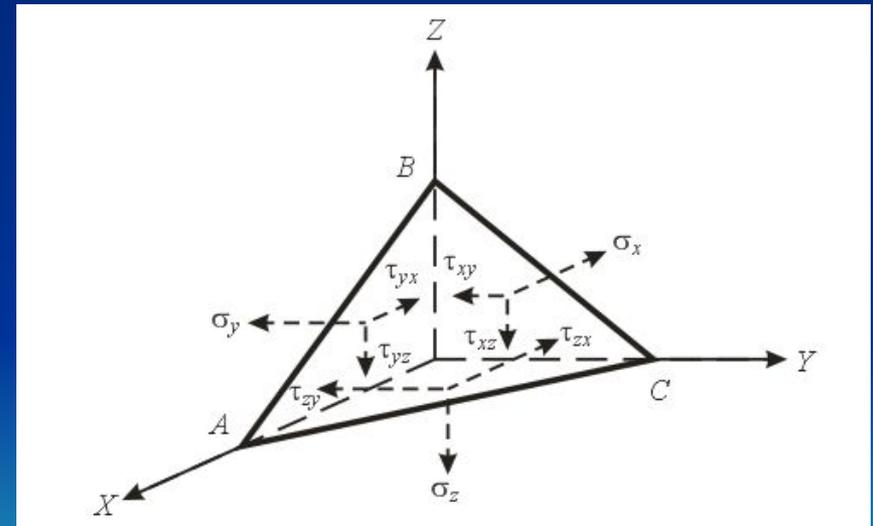
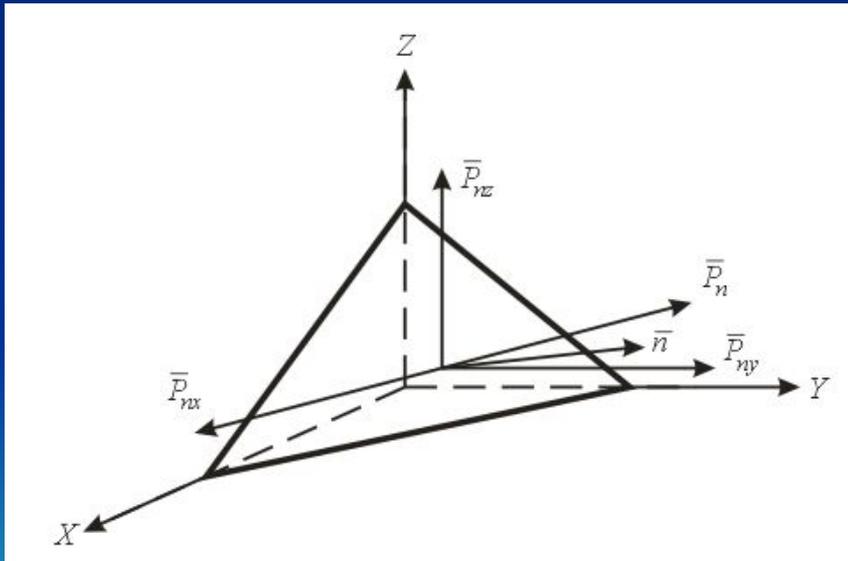
Составляющие полного вектора напряжений



$$\bar{P}_n = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta f}$$

Напряжения на наклонной площадке

- Нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение и в этом случае его направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке.
- Касательные напряжения положительны, если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением координатной оси (положительным или отрицательным соответственно), а направлены они в сторону соответствующей этому направлению координатной оси (положительной или отрицательной соответственно).



Напряжения на наклонной площадке

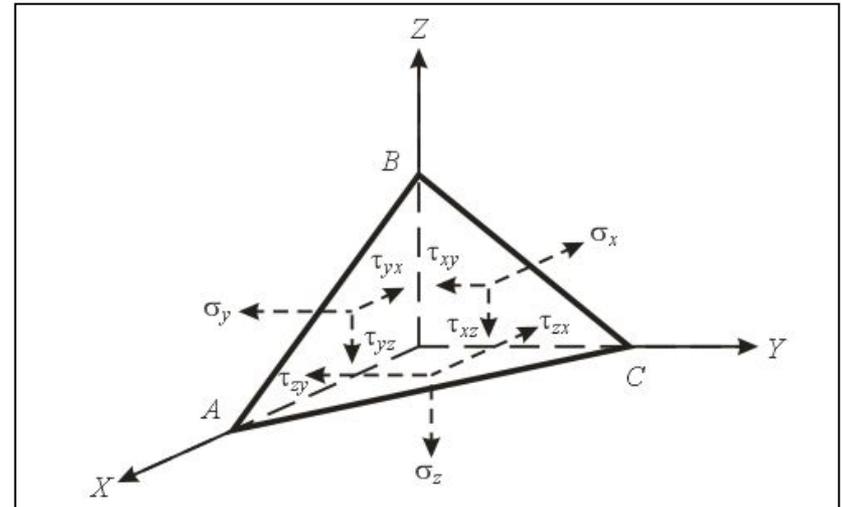
$$-\frac{1}{2} dydz \sigma_x - \frac{1}{2} dx dz \tau_{yx} - \frac{1}{2} dx dy \tau_{zx} + df P_{nx} = 0$$

$$\frac{1}{2} dydz = df \cdot \cos(n, x)$$

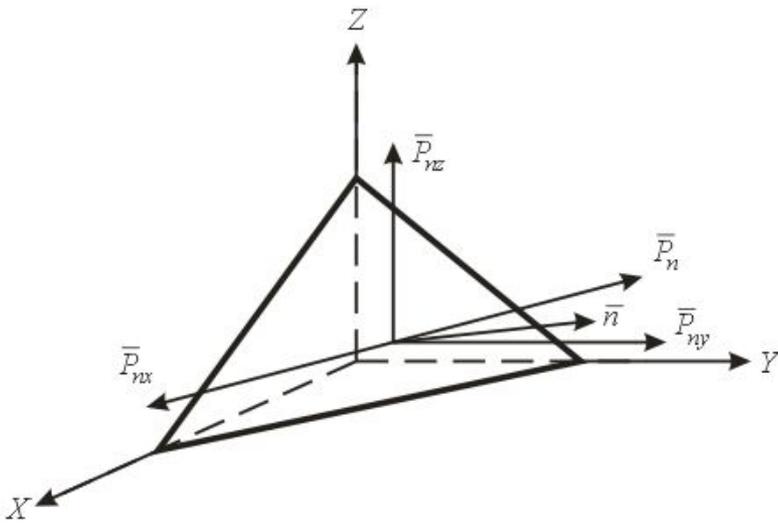
$$\frac{1}{2} dx dz = df \cdot \cos(n, y)$$

$$\frac{1}{2} dx dy = df \cdot \cos(n, z)$$

$$P_{nx} = \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{yx} \cdot \cos(n, y) + \tau_{zx} \cdot \cos(n, z)$$



Граничные условия



$$n_x = \cos(n, x), \quad n_y = \cos(n, y),$$

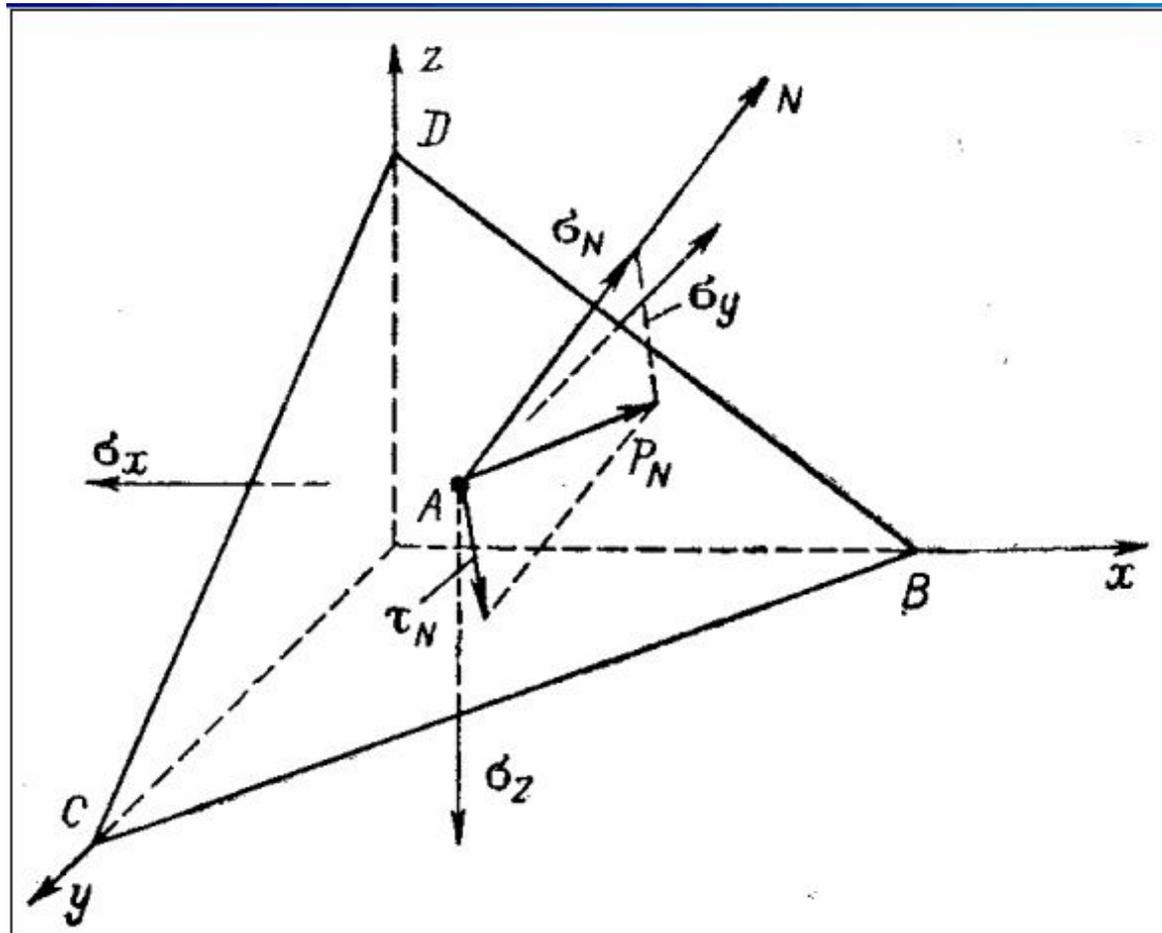
$$n_z = \cos(n, z)$$

$$P_{nx} = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z$$

$$P_{ny} = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z$$

$$P_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

Напряжения на наклонной площадке



Главные напряжения

Главными называются такие площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, а касательные равны нулю.

$$P_{nx} = \sigma_n n_x$$

$$P_{ny} = \sigma_n n_y$$

$$P_{nz} = \sigma_n n_z$$

$$(\sigma_x - \sigma_n)n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z = 0$$

$$\tau_{xy}n_x + (\sigma_y - \sigma_n)n_y + \tau_{zy}n_z = 0$$

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + (\sigma_z - \sigma_n)n_z = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

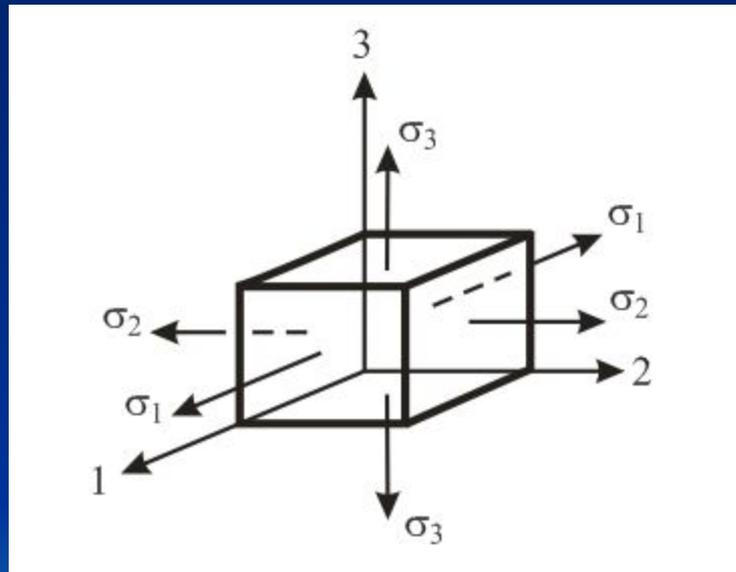
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

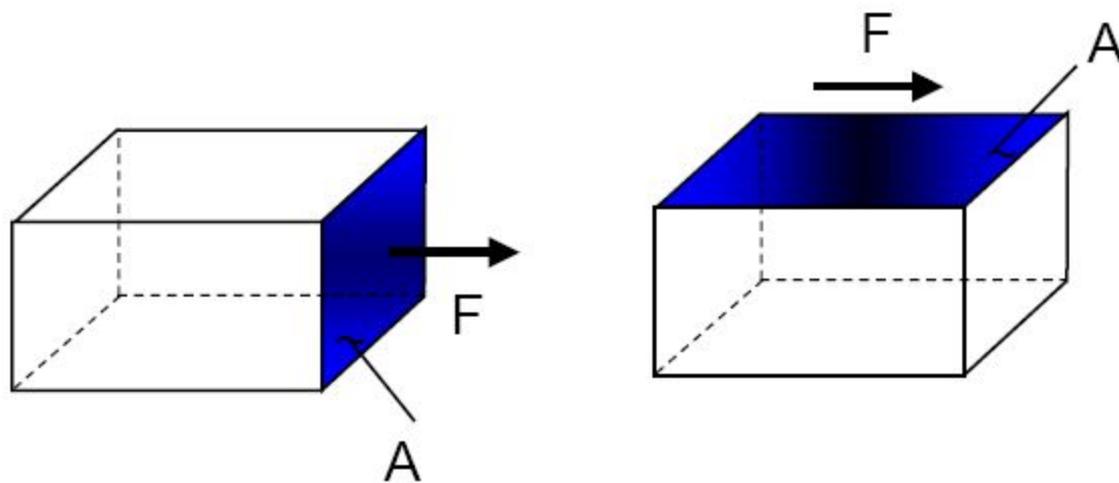
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Главные напряжения



Напряжения

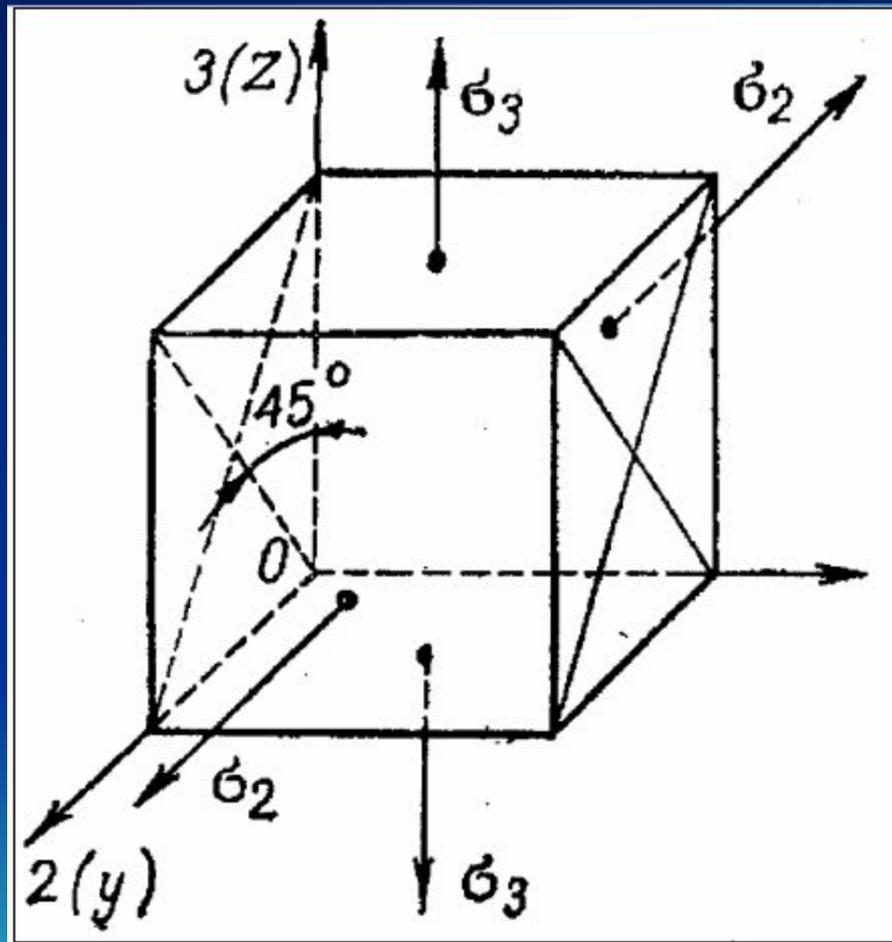


Нормальные

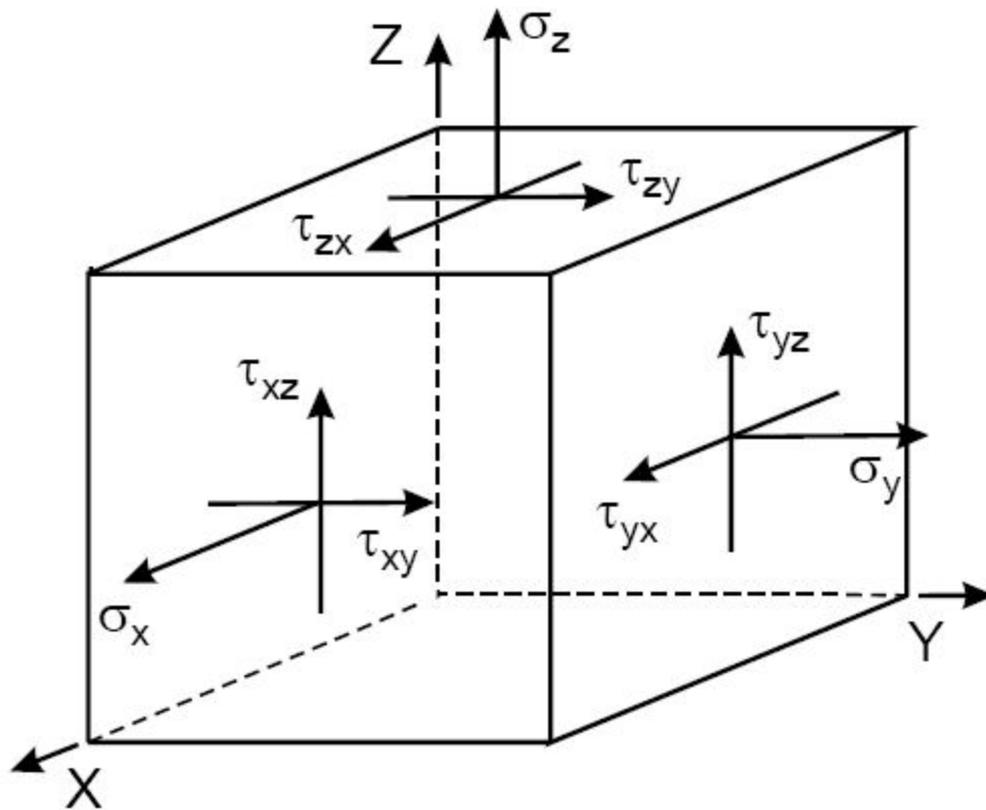
Касательные

$$S = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A}$$

Главные напряжения



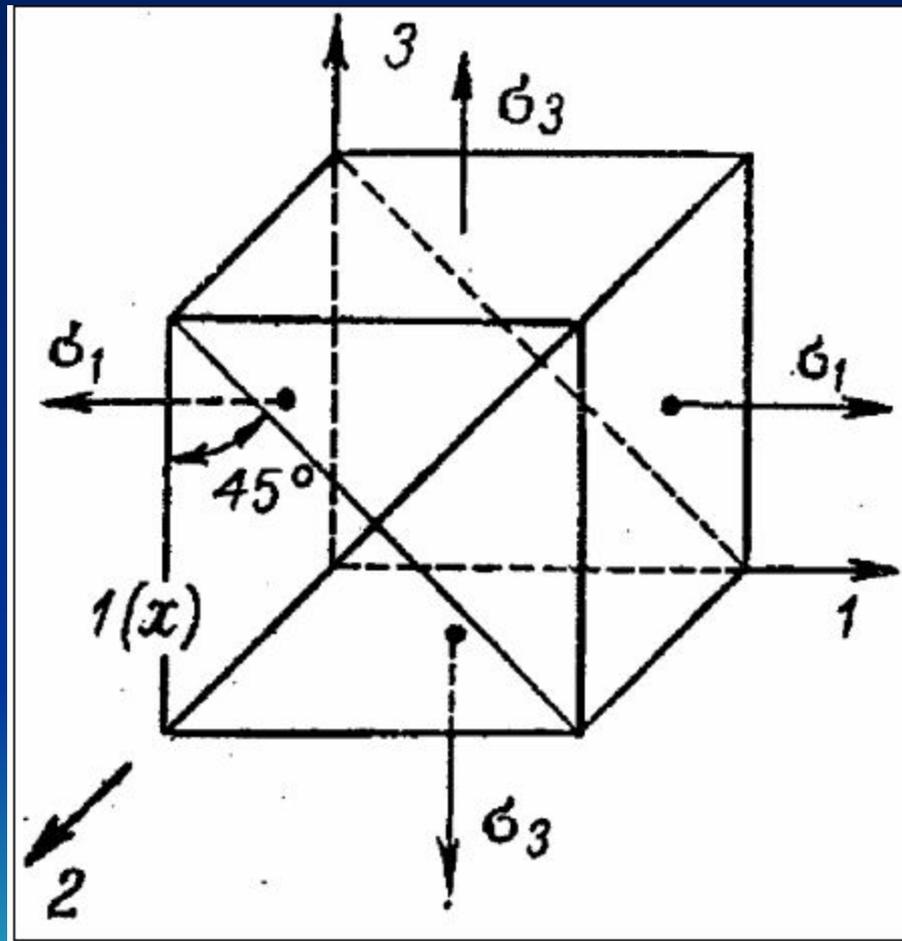
Тензор напряжений



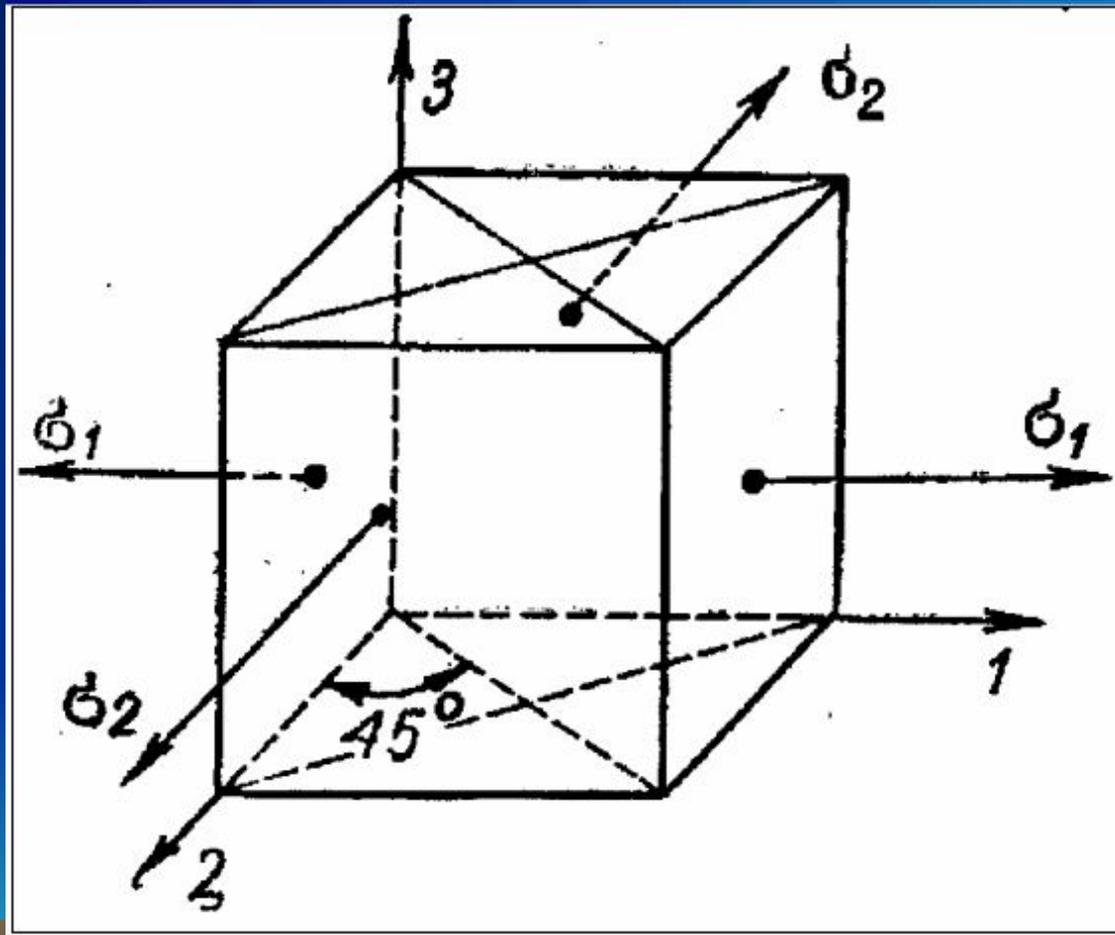
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

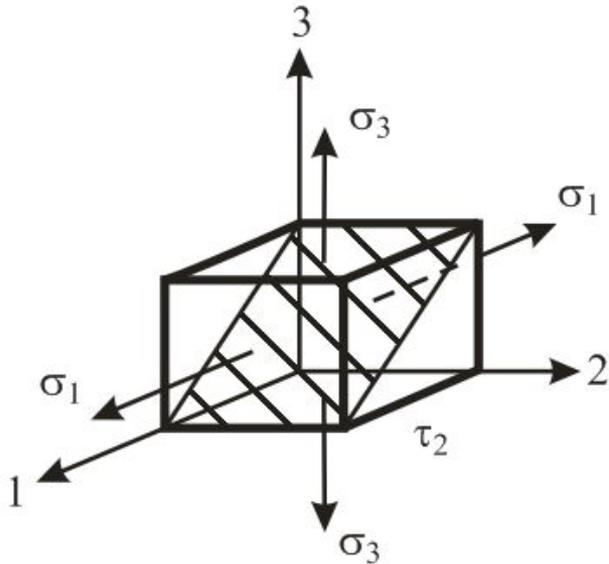
Главные напряжения



Главные напряжения

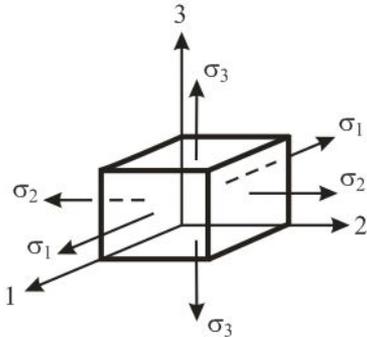


Свойства главных напряжений



1. Из всех нормальных напряжений , действующих на наклонных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим являются соответствующие главные напряжения;
2. Из всех полных напряжений, действующих на наклонных площадках, наибольшими и наименьшими по абсолютному значению являются также соответствующие главные напряжения
3. Наибольшие касательные напряжения равны $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ и действуют в площадках, наклоненных под углом в 45° к главным площадкам

Свойства главных площадок

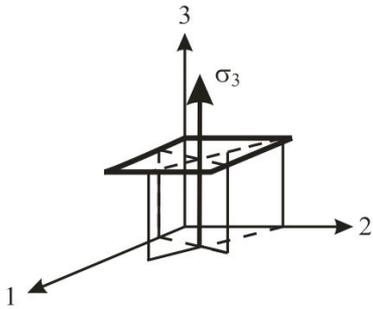


$$\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$$

площадки взаимно
перпендикулярны и
различны

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$$

имеется одна площадка, соответствующая , и
бесчисленное множество площадок перпендикулярных ей,
на которых действуют напряжения

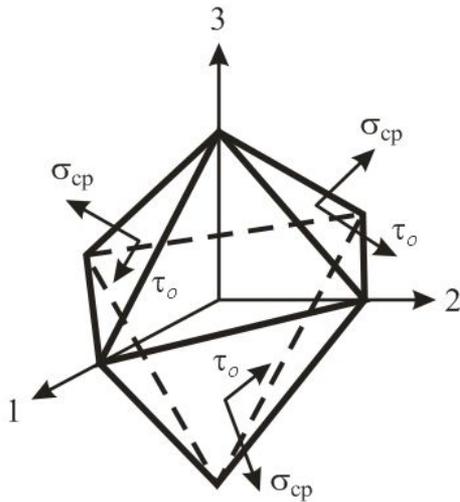


$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

на всех площадках действуют лишь нормальные напряжения и тело
находится в ней в условиях всестороннего растяжения (сжатия).

Октаэдрические площадки

Площадки, равнонаклоненные к главным площадкам, называются октаэдрическими. На них действуют средние напряжения.



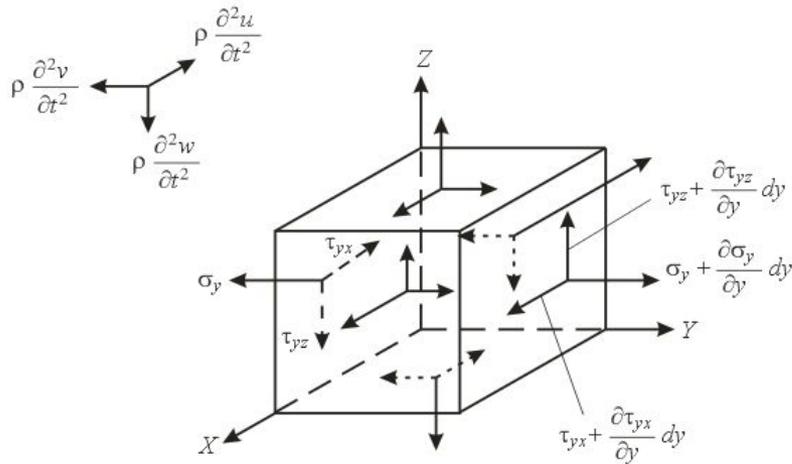
$$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_o$$

Интенсивность напряжения — приведенное расчетное напряжение

2. Уравнения равновесия



$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dydx -$$

$$\tau_{zx} dydx + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx -$$

$$\tau_{yx} dzdx + \left(X - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) dx dy dz = 0$$

$$V = dx dy dz$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Уравнения равновесия в проекции на оси координат

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

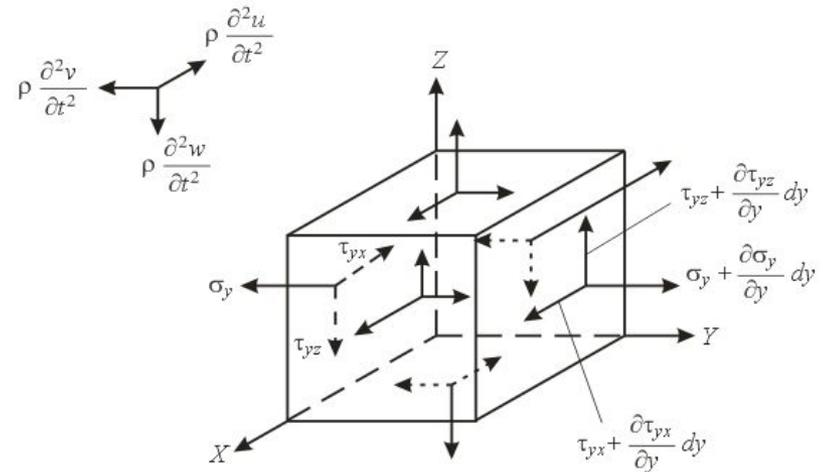
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Уравнения моментов относительно осей

Вычислим сумму моментов относительно оси X. Полагаем, что равнодействующая внутреннего усилия, соответствующего рассматриваемому напряжению, находится в центре грани параллелепипеда

$$\begin{aligned}
 & -\tau_{xz} dydz \frac{dy}{2} + \tau_{xy} dydz \frac{dz}{2} + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dz}{2} - \\
 & -\sigma_z dydx \frac{dy}{2} + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dydx \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dydx dz + \\
 & + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dzdx \frac{dz}{2} + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dzdx dy - \\
 & -\sigma_y dzdx \frac{dz}{2} + Z dx dy dz \cdot \frac{dy}{2} - Y dx dy dz \frac{dz}{2} + \\
 & + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dy dz \frac{dz}{2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy dz \frac{dy}{2} = 0
 \end{aligned}$$



Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Компоненты касательных напряжений, расположенные в двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены по перпендикуляру к линии пересечения этих площадок. При этом оба компонента направлены либо к линии пересечения, либо от нее.

Количество неизвестных

Количество неизвестных=9, но с учетом закона парности касательных напряжений=6

Количество уравнений равновесия =3

Количество неизвестных превышает число уравнений равновесия

Задачи теории упругости являются статически неопределимыми

Дополнительные уравнения необходимо получить из рассмотрения деформации тела.

