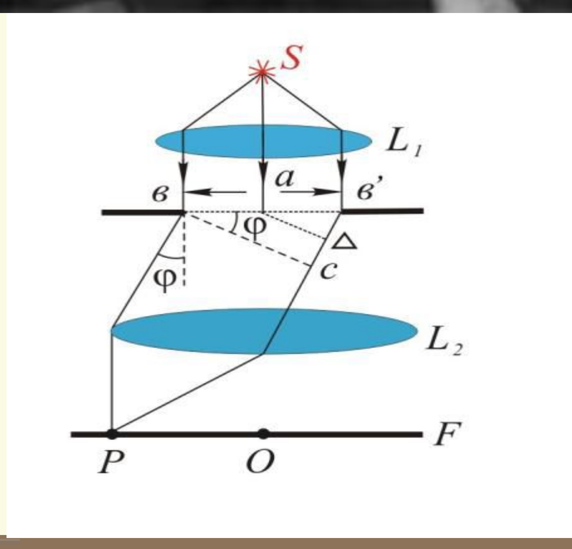
Физика колебаний и волн. Квантовая физика.

Лекция № 4

Приближение Фраунгофера в задачах дифракции.

1. Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.
2. Волновой параметр .
3. Дифракция плоской монохроматической волны на длинной прямой щели .



Йозеф ФРАУНГОФЕР

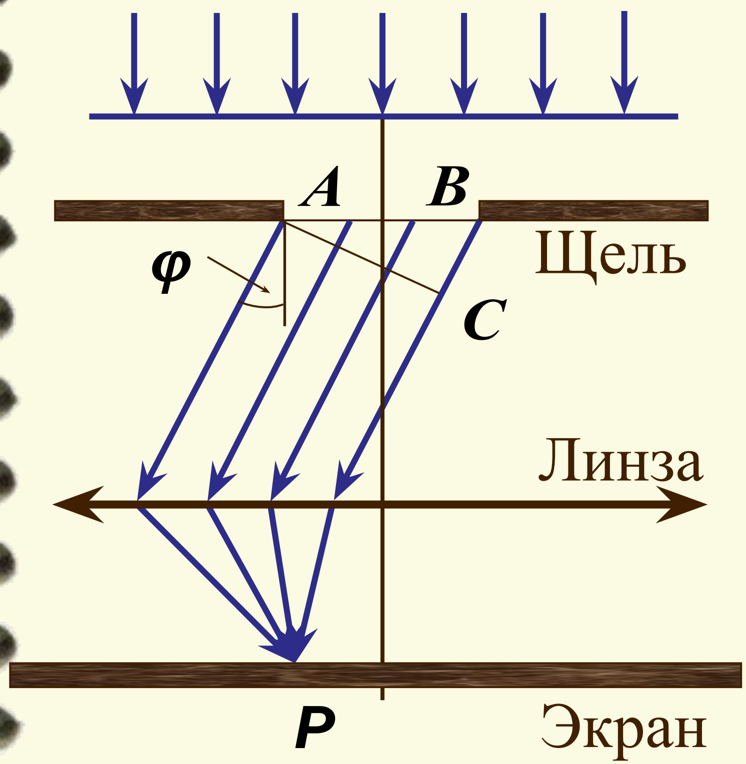
Joseph von Fraunhofer, 1787–1826

Немецкий физик и оптик, уроженец Штраубинга (Straubing), сын ремесленника-стеклодува. Рано осиротев, пошел в подмастерья к стекольщику. Явление дифракции Фраунгофер исследовал с чисто прикладной точки зрения: делом своей жизни он считал изобретение идеальных ахроматических линз, которые не давали бы радужного ореола вокруг изображения.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Схема дифракции Фраунгофера (1821-1822): точечный источник света помещается в фокусе собирающей линзы; дифракционная картина исследуется в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием.

Дифракция на щели.



Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачное препятствие с узкой щелью ***AB*** шириной ***b*** и длиной $l >> b$ (бесконечно длинная щель). ***L*** - расстояние от щели до экрана.

Дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы.

Линза установлена за препятствием. Плоскость щели и экран параллельны друг другу.

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины волнового параметра

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}}$$

1)Если $p \ll 1$ (“широкая” щель)

$$\frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \ll 1 \text{ или } b \gg \sqrt{\lambda \cdot L}$$ - широкая щель много больше размеров первой зоны Френеля и распределение интенсивности света за щелью можно получить с помощью обыкновенной геометрической оптики.

Число Френеля $N_ф = \dfrac{b^2}{\lambda \cdot L} \sim m$; $N_ф = p^{-2}$,

где m – число открытых зон Френеля. $N_ф \gg 1$.

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины *волнового параметра*

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}}$$

2) Если $p \sim 1$ - будет *дифракция Френеля*

$\frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \sim 1$ **или** $b \sim \sqrt{\lambda \cdot L}$ **и распределение интенсивности в плоскости наблюдения в этом случае определяется числом зон Френеля, укладывающихся на полуширине щели.**

Число Френеля $N_\phi = \frac{b^2}{\lambda \cdot L} \sim 1$; $N_\phi = p^{-2}$,

Условия приближения геометрической оптики, дифракции Френеля и дифракции Фраунгофера.

Вид дифракционной картины на экране зависит от величины *волнового параметра*

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{b^2}} = \frac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b}}$$

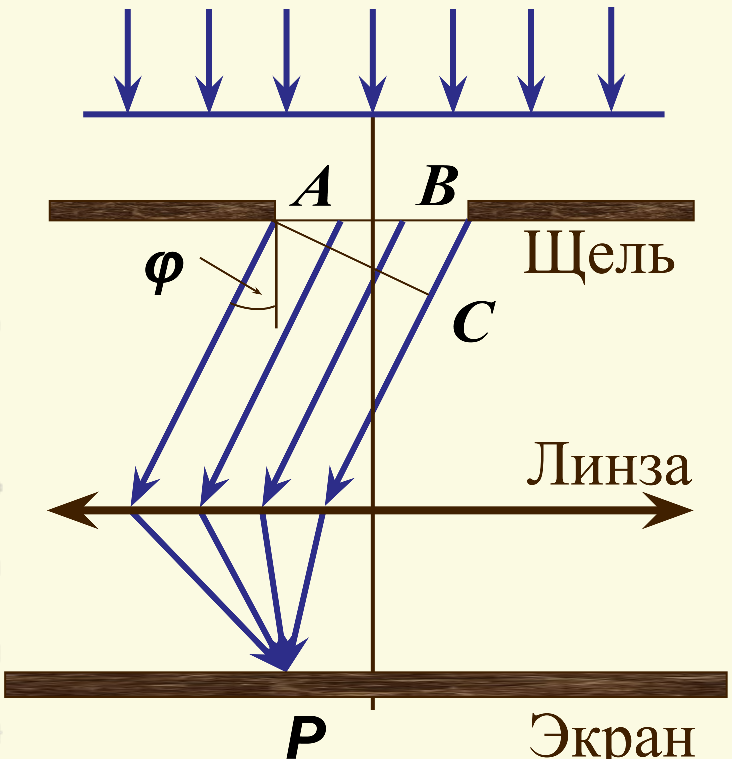
3) Если $p \gg 1$ - будет *дифракция Фраунгофера*

$\dfrac{\sqrt{\lambda \cdot L}}{b} \gg 1$ **или** $b \ll \sqrt{\lambda \cdot L}$ **- "узкая" щель.**

Число Френеля $N_ф = \dfrac{b^2}{\lambda \cdot L} \ll 1$; $N_ф = p^{-2}$,

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

<u>Дифракция на щели</u>



Каждая точка щели является источником когерентных вторичных волн (плоскость щели совпадает с фронтом падающей волны).

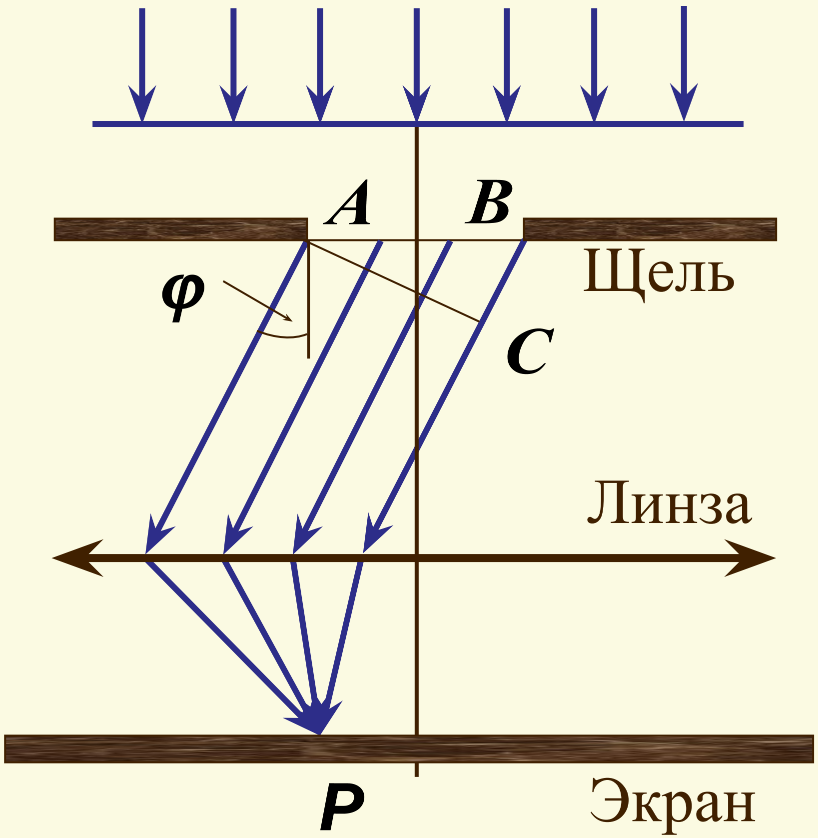
Параллельные пучки лучей, выходящие из щели в направлении φ (угол дифракции), собираются линзой в точке P.

Открытая часть волновой поверхности ***AB*** разбивается на зоны Френеля, которые имеют вид полос, параллельных боковому ребру щели.

Зоны проведены таким образом, чтобы разность хода от их соответствующих точек была равна $\lambda/2$.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



Определим число зон N, умещающихся на щели.

Ширина одной зоны Δx определяется как $\Delta x = \dfrac{\lambda/2}{\sin\varphi}$

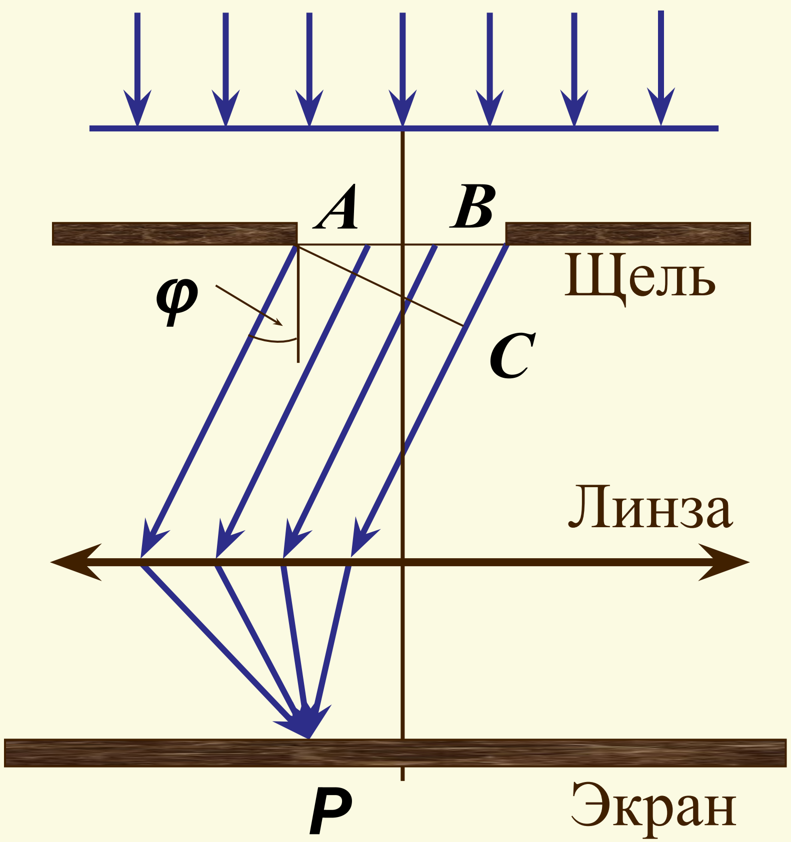
Отсюда $N = \dfrac{b}{\Delta x} = \dfrac{b\cdot\sin\varphi}{\lambda/2}$.

Вторичные волны имеют одинаковые фазы и амплитуды в плоскости щели (зоны Френеля).

Следовательно, колебания, возбуждаемые в точке P двумя соседними зонами, *равны* по амплитуде и *противоположны* по фазе.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели



Запишем условия для минимумов и максимумов дифракционной картины на экране (для точки ***P***):

а) ***Дифракционный минимум*** (полная темнота) наблюдается тогда, когда число зон Френеля в плоскости щели *четное*, т.е.

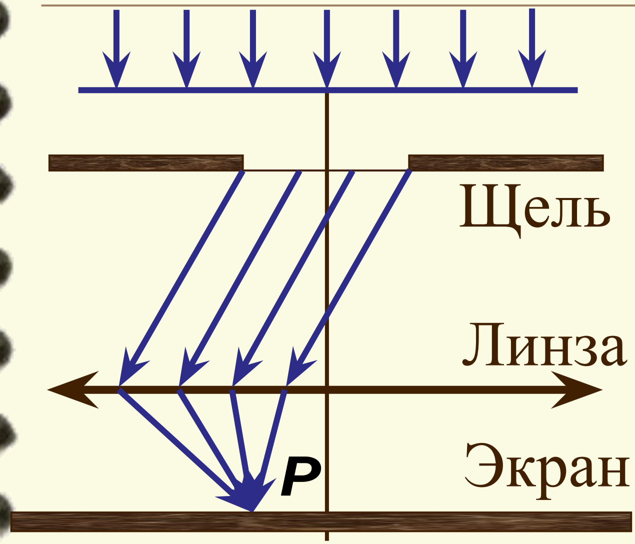
$$b\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

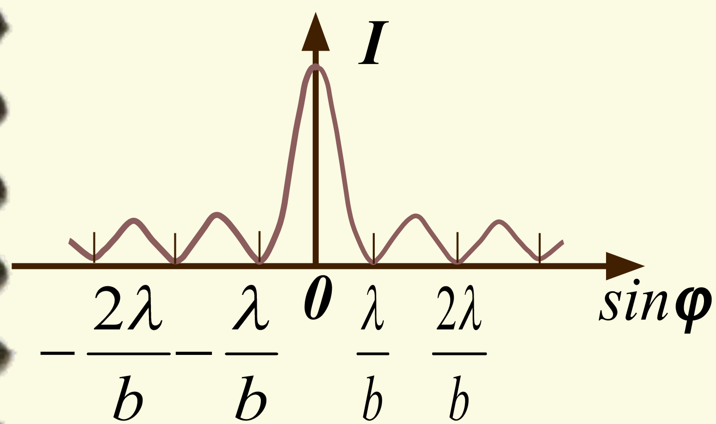
б) ***Дифракционный максимум*** наблюдается тогда, когда число зон Френеля в плоскости щели *нечетное*, имеется одна некомпенсированная зона, т.е.

$$b\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели





В направлении $\varphi = 0$ наблюдается ***центральный дифракционный максимум***, поскольку колебания, вызываемые в центральной части экрана всеми участками щели, происходят в одинаковой фазе.

Изобразим *дифракционный спектр* в виде зависимости:

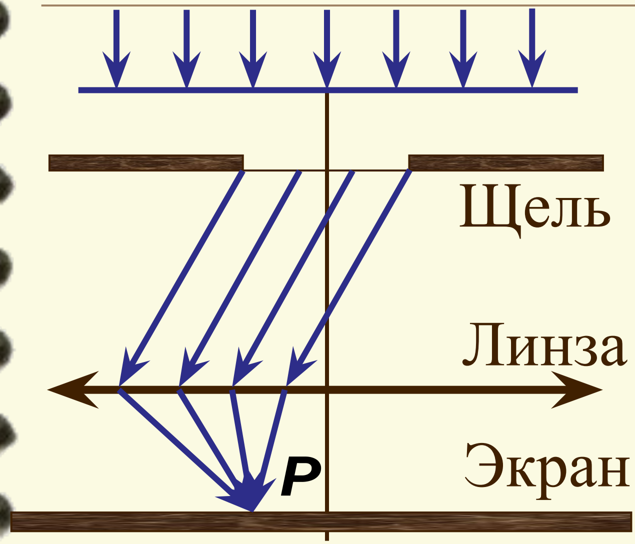
$$I = f(\sin\varphi)$$

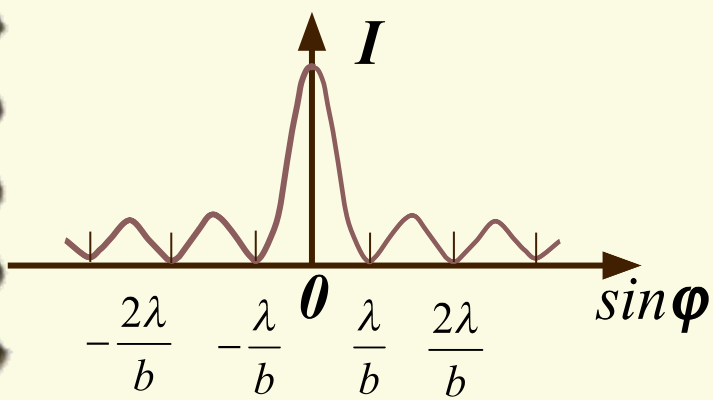
Основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме.

С увеличением угла дифракции интенсивность побочных максимумов резко уменьшается.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

Дифракция на щели





Интенсивность и ширина составляющих дифракционного спектра зависит от размера щели.

С уменьшением ширины щели центральный максимум расширяется.

Это следует, в частности, из условий для дифракционных минимумов и максимумов.

Центральный максимум ограничен справа и слева минимумами первого порядка, которые соответствуют углам

$$b\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}$$

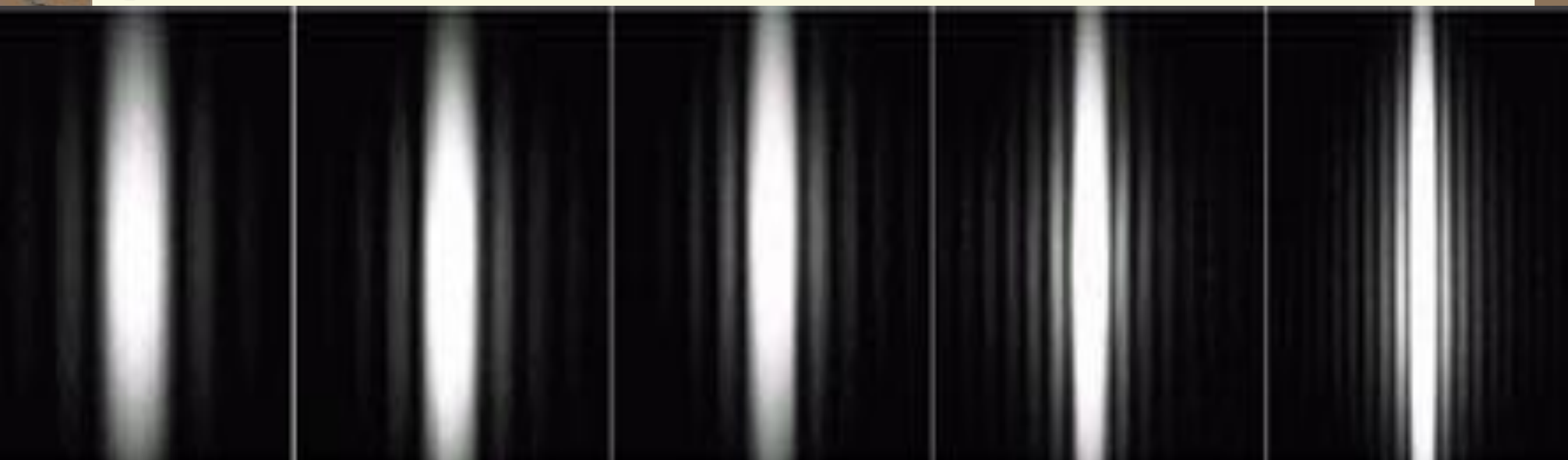
При $\boldsymbol{m = 1}$ $\quad \varphi = \pm\arcsin\frac{\lambda}{b}$

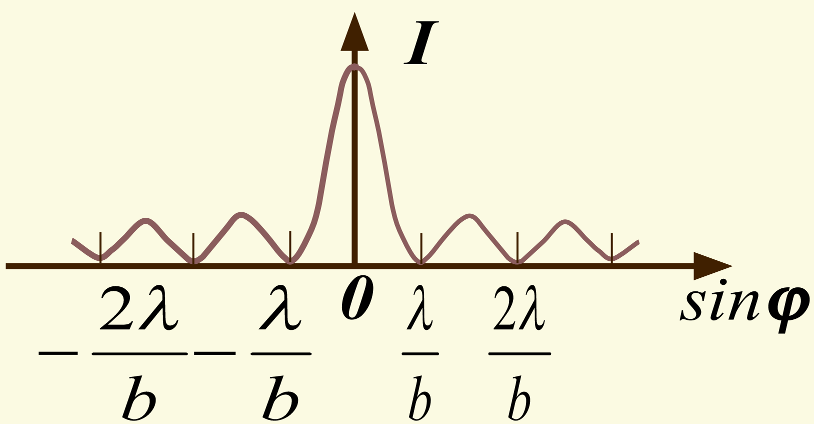
Чем меньше b, тем больше φ и шире центральный максимум.

Дифракция Фраунгофера или дифракция в параллельных лучах (дифракция плоских волн)

single.avi

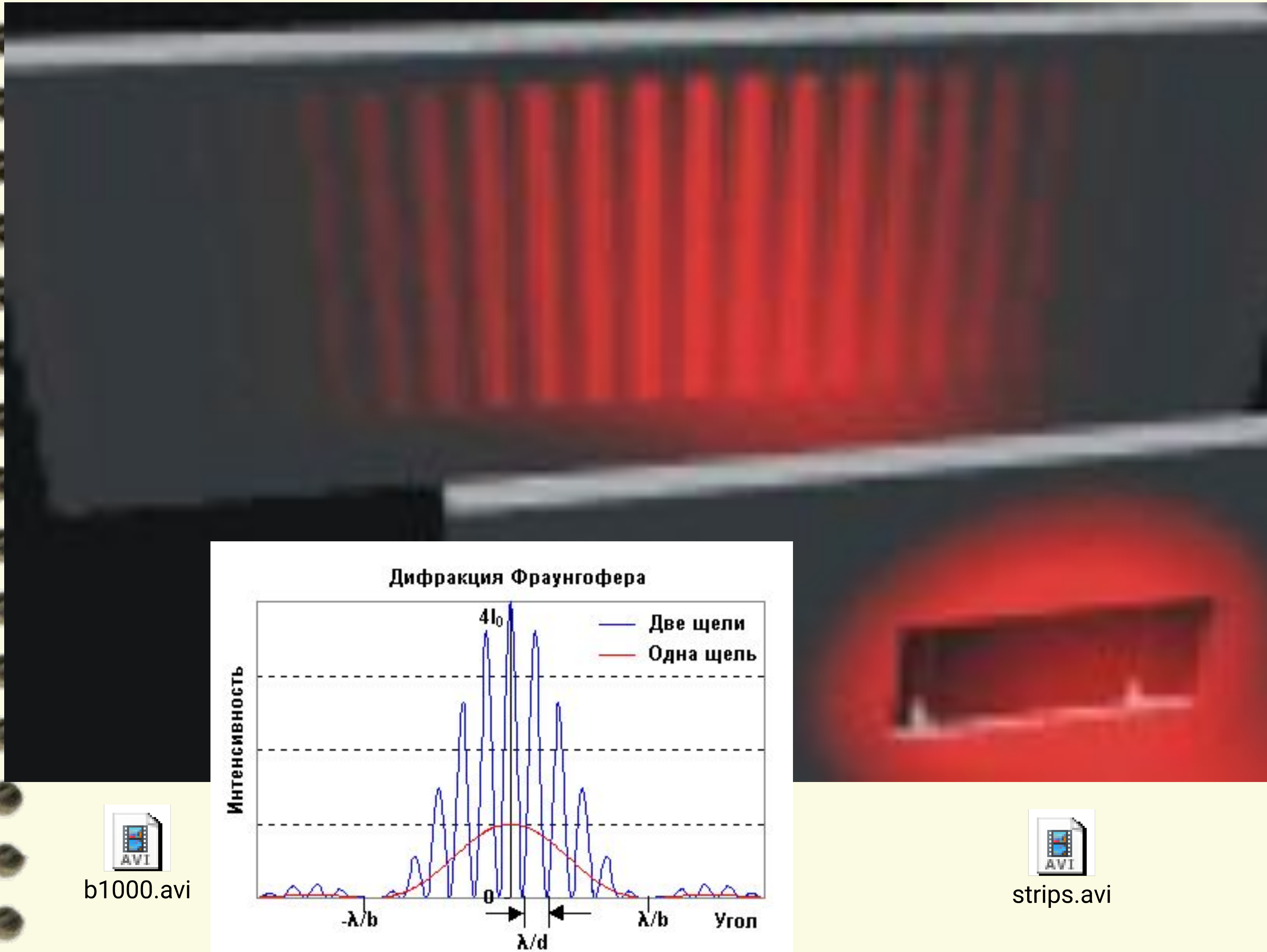
Дифракция на щели





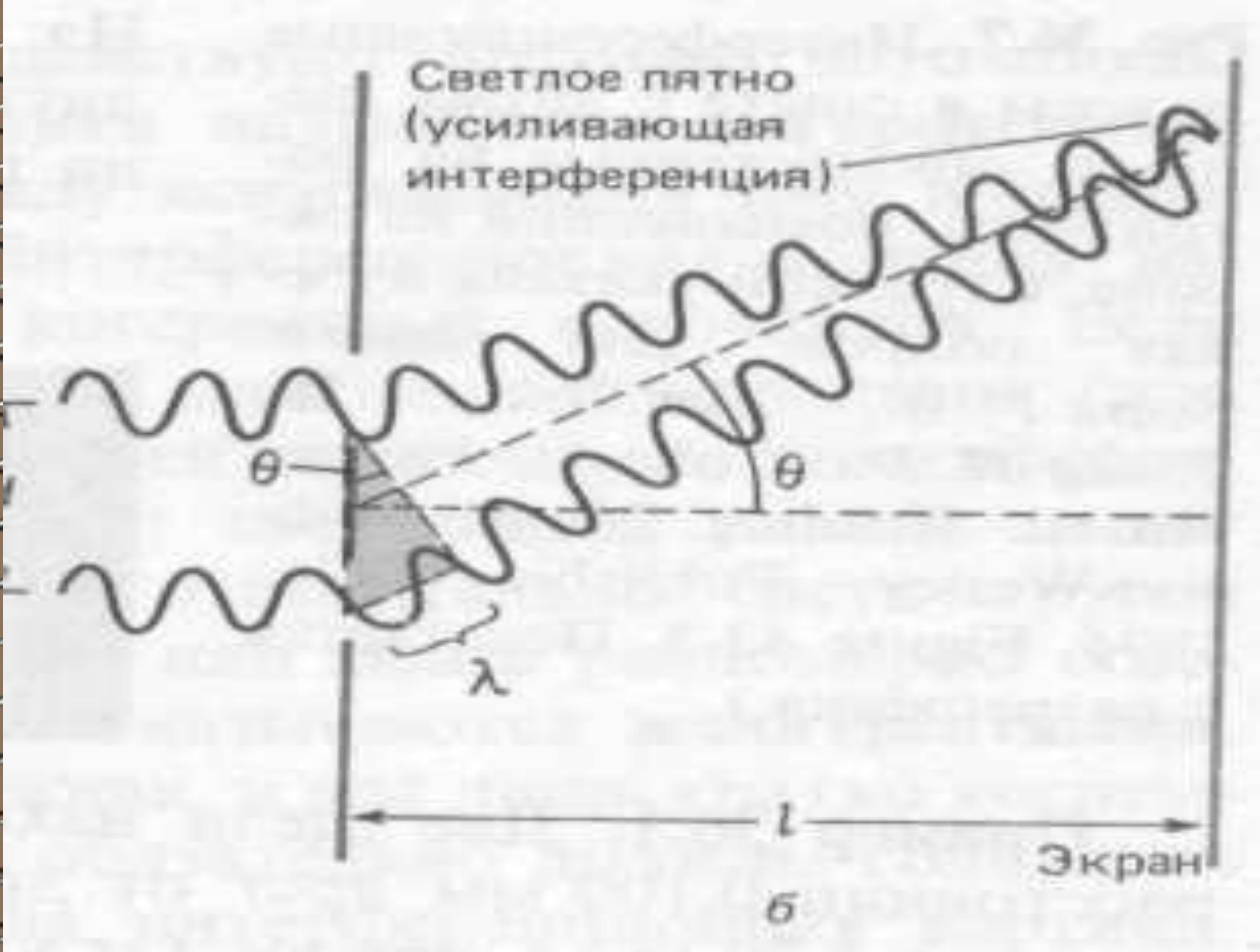
С увеличением ширины щели ($b>\lambda$) дифракционные полосы становятся уже и ярче, а число полос больше.

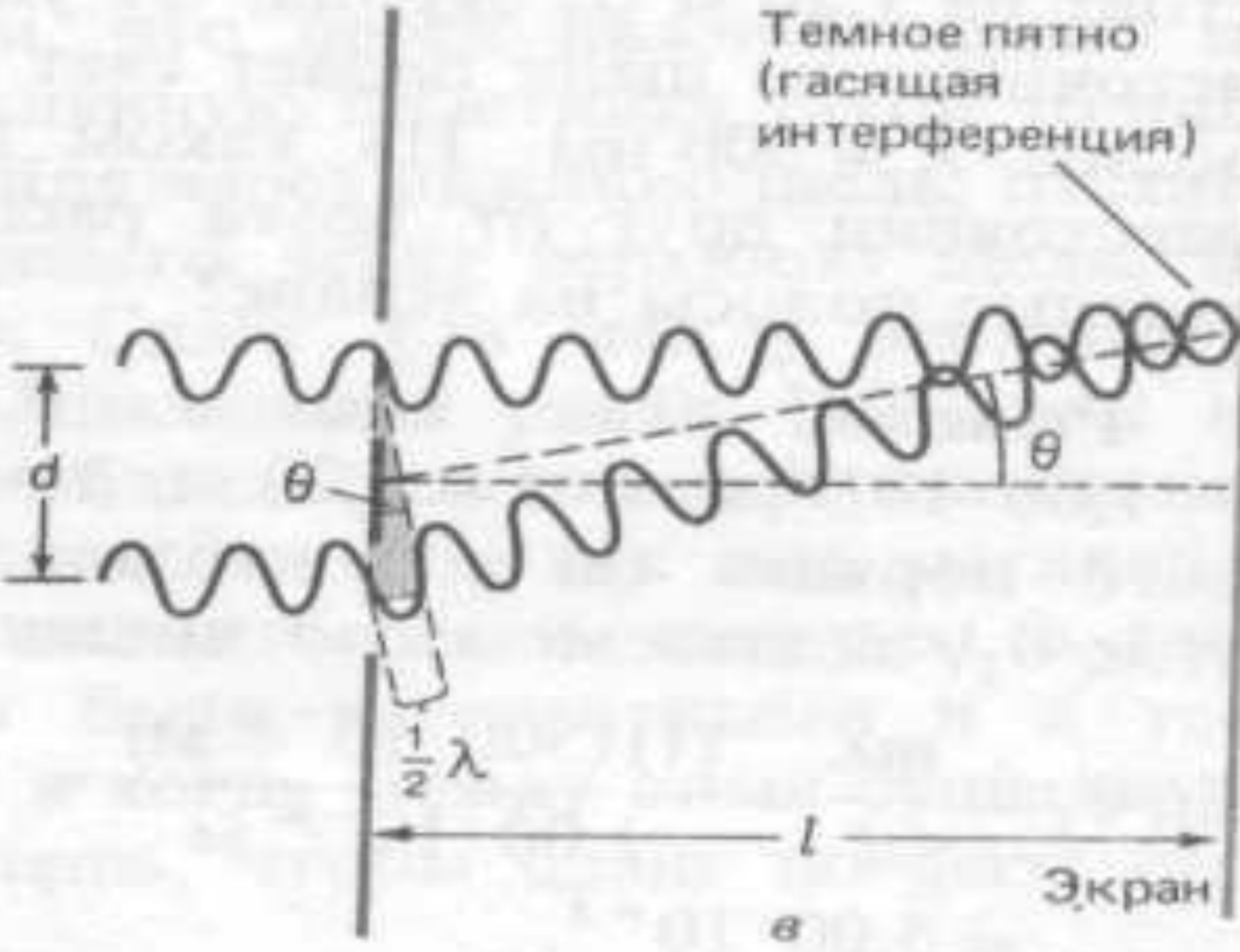
При $b>>\lambda$ в центре получается резкое изображение источника света (прямолинейное распространение света).



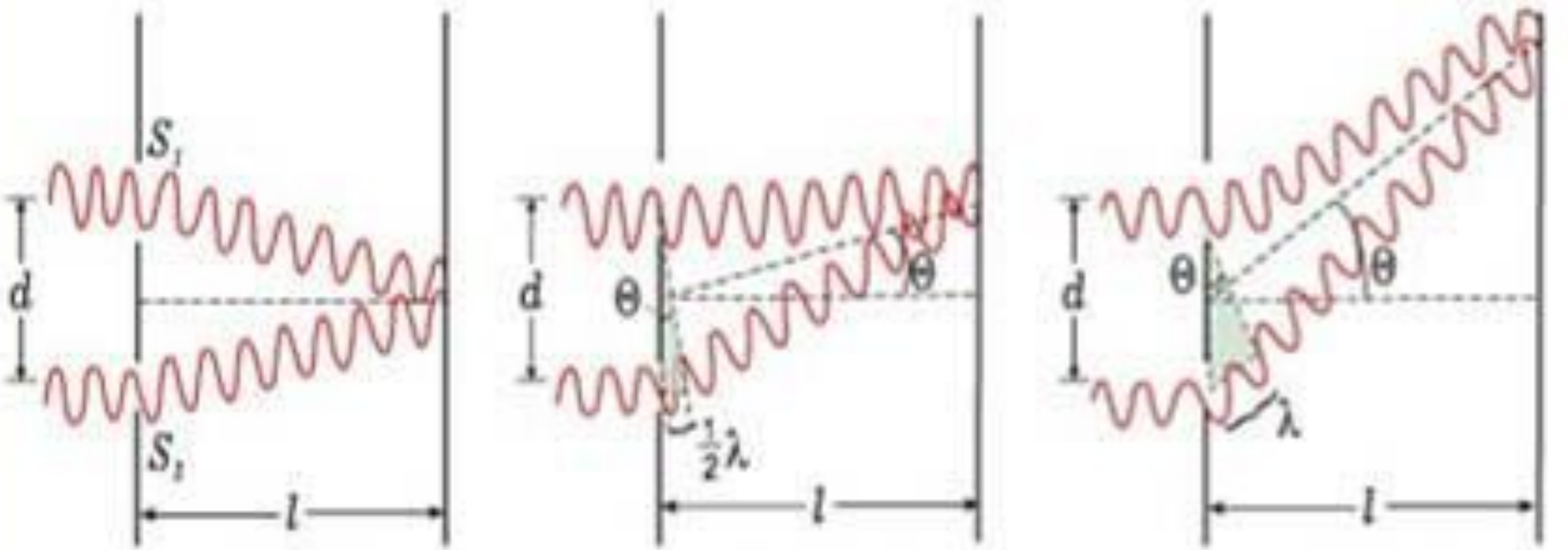
b1000.avi

strips.avi


Светлое пятно
(усиливающая
интерференция)
θ
θ
λ
l
Экран
б



Темное пятно
(гасящая
интерференция)
d
θ
θ
$\frac{1}{2}\lambda$
l
Экран
в



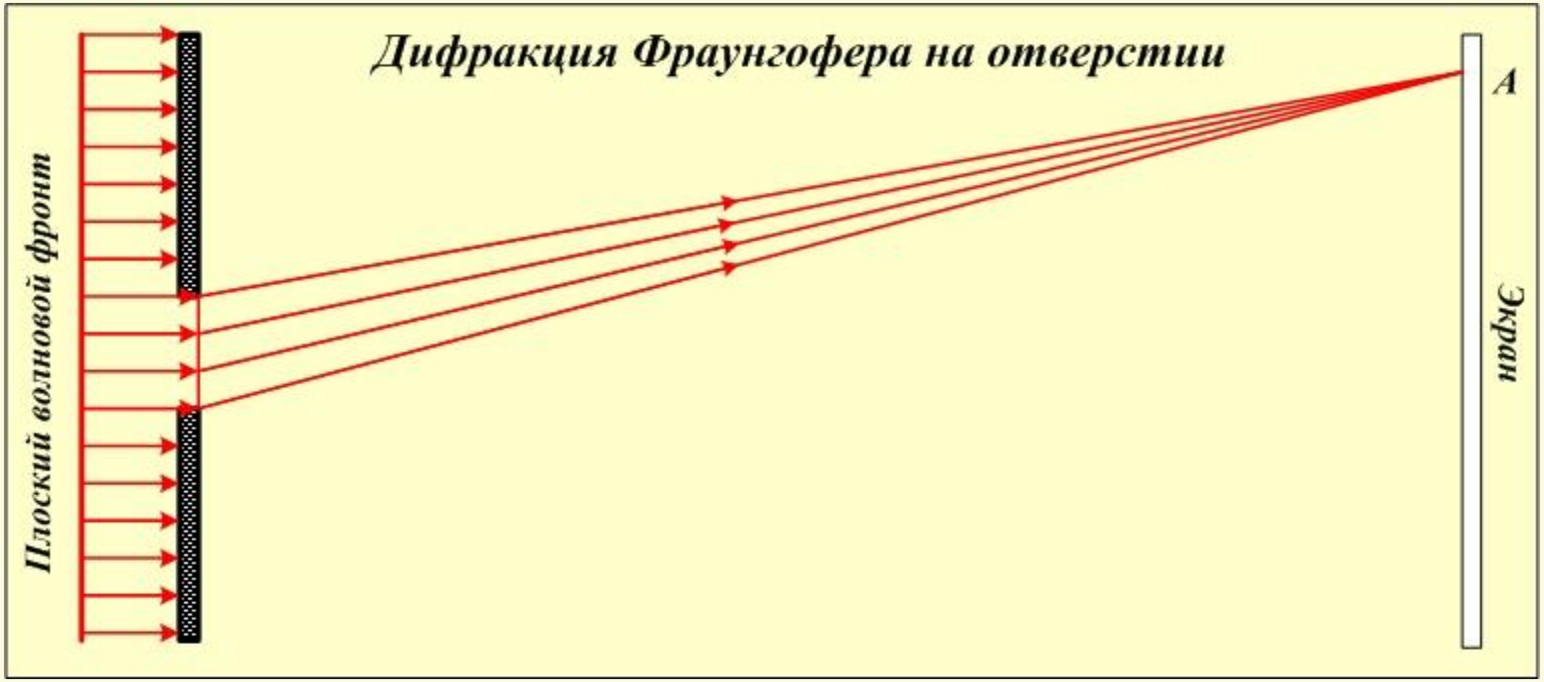
Нулевой интерференционный максимум

Первый интерференционный минимум

Первый интерференционный максимум

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

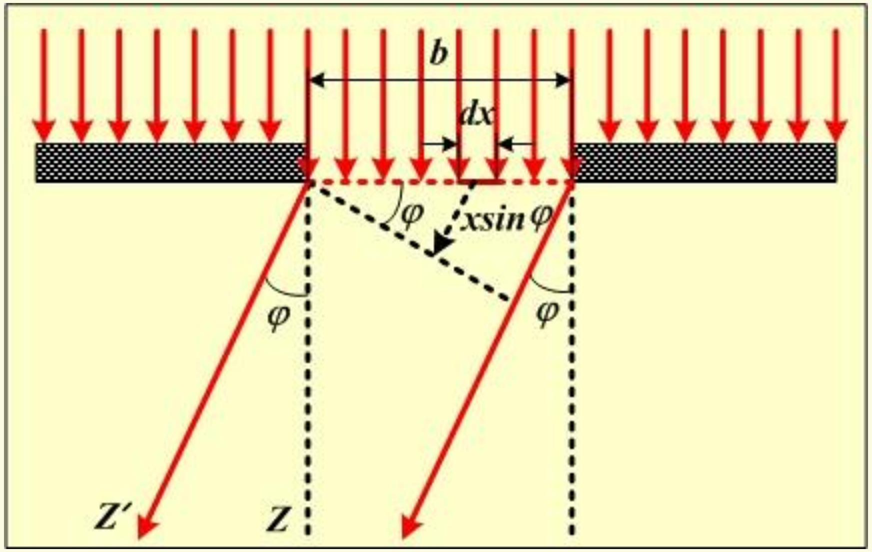
На отверстие падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны λ, размер отверстия b и расстояние до экрана L. Требуется Определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям (на экране).



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Каждая точка отверстия является источником сферических волн. Рассмотрим участок длиной *dx*, расположенный внутри отверстия на расстоянии *x* от края.

Волны, излучённые с отрезка *dx* распространяются по всем направлениям ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$).



Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль прямой, образующей угол φ с перпендикуляром к преграде.

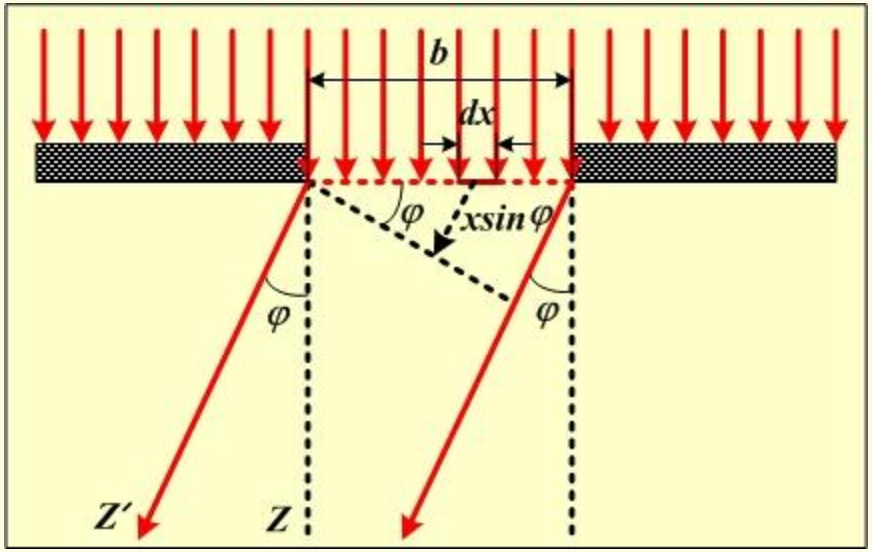
Волны, излучённые с отрезка *dx*, запаздывают по фазе на

$$\Delta = kx\sin\varphi,$$

$k = \dfrac{\omega}{v}$ - волновое число (модуль волнового вектора).

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Запишем уравнение волны, испущенной с участка *dx* в рассматриваемом направлении. Пусть E_0 – амплитуда волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении, тогда амплитуда волны, испущенной с участка *dx* равна



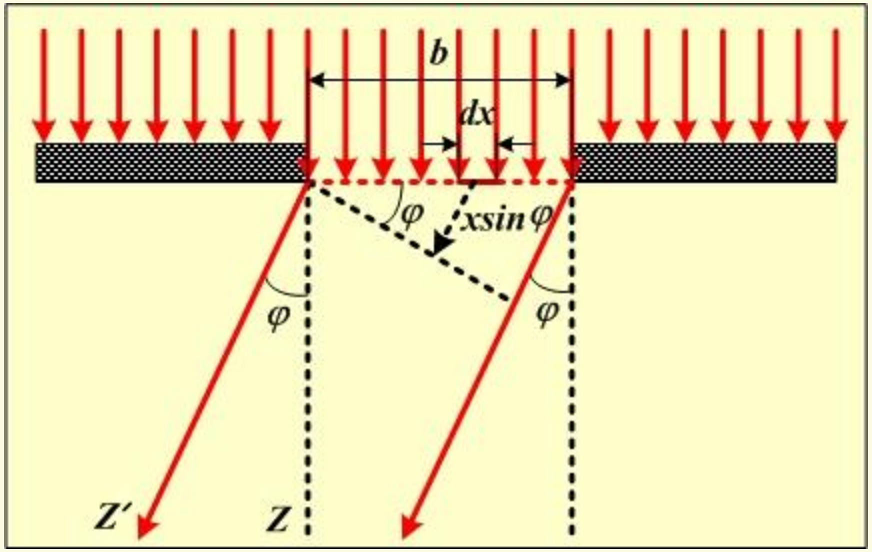
$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка *dx* в рассматриваемом направлении:

$$dE_{\varphi} = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)} dx.$$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)} dx.$$



Для волны, испущенной из всего отверстия в рассматриваемом направлении.

$$E_\varphi = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)} dx.$$

$$E_\varphi = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)} dx = \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \int_0^b e^{-ikx\sin\varphi} dx =$$

$$= \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-ikx\sin\varphi}}{-ik\sin\varphi} \right|_0^b = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb\sin\varphi} - 1}{-ikb\sin\varphi}.$$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$E_\varphi = E_0 e^{i\omega t}\,\frac{e^{-ikb\sin\varphi}-1}{-ikb\sin\varphi}.$$

Преобразуем полученное выражение к симметричной форме.

$$\frac{e^{-ikb\sin\varphi}-1}{-ikb\sin\varphi} = \frac{e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi}e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi}-e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi}e^{+ik\frac{b}{2}\sin\varphi}}{-ikb\sin\varphi} =$$

$$= \frac{e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi}-e^{+ik\frac{b}{2}\sin\varphi}}{-2ik\frac{b}{2}\sin\varphi}\,e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi} = \frac{e^{-iu}-e^{+iu}}{-2iu}\,e^{-iu},$$

где $\qquad u = k\frac{b}{2}\sin\varphi.$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$\frac{e^{-iu}-e^{+iu}}{-2iu}e^{-iu}=\frac{\sin u}{u}e^{-iu}.$$

Итак,
$$E_\varphi=E_0e^{i\omega t}\,\frac{e^{-ikb\sin\varphi}-1}{-ikb\sin\varphi}=E_0e^{i(\omega t-u)}\,\frac{\sin u}{u}.$$

где $\quad u=k\dfrac{b}{2}\sin\varphi.$

Уравнение волны, испущенной из всей щели в рассматриваемом направлении:

$$E_\varphi=E_0\,\frac{\sin u}{u}\,e^{i\left(\omega t-k\frac{b}{2}\sin\varphi\right)}.$$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Интенсивность излучения, испущенного из всей щели в рассматриваемом направлении определяется квадратом амплитуды

$$I \sim \left|E_\varphi\right|^2_{cp}$$

$$E_\varphi^2 = E_0^2 \left|e^{i(\omega t - u)}\right|^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 .$$

$$\boxed{I_\varphi = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 ,}$$

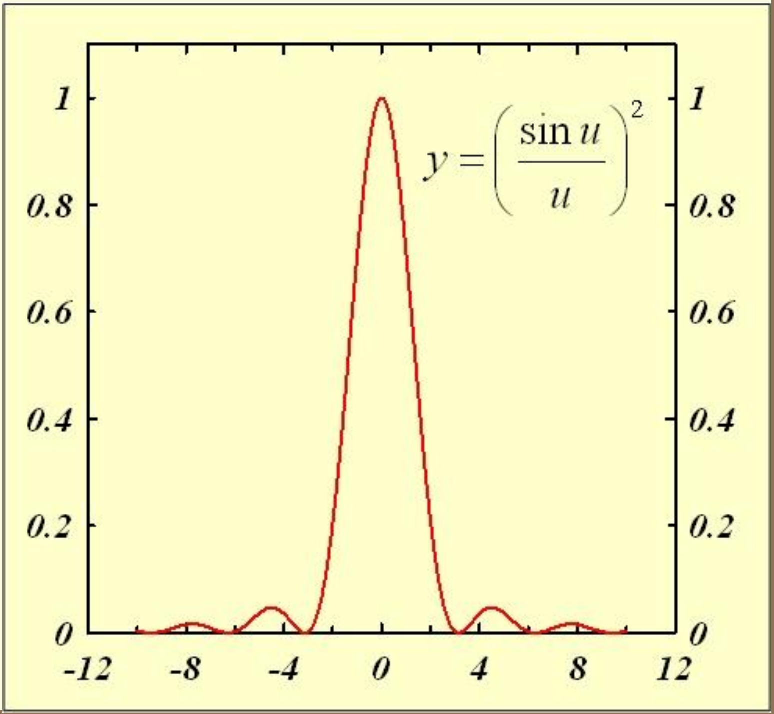
где $$u = k\frac{b}{2}\sin\varphi.$$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2.$$

Исследуем полученную функцию. При u → 0 $\dfrac{\sin u}{u} \to 1.$

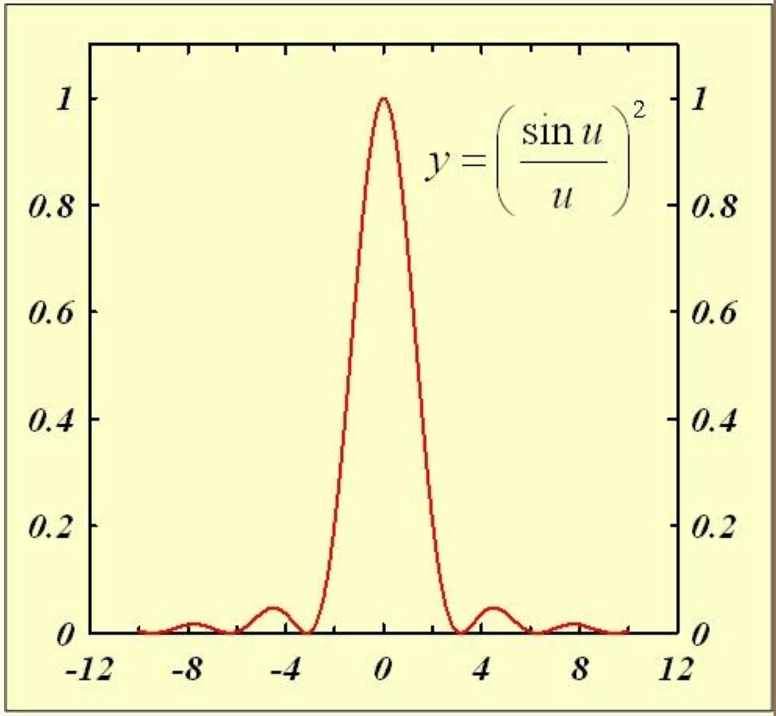
Это максимальное значение этой функции. При возрастании модуля ***u*** функция будет убывать. Это убывание не будет монотонным вследствие осцилляций числителя. Теперь можно определить, при каких значениях угла дифракции наблюдаются максимумы и минимумы интенсивности излучения.



Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

$$u = k\frac{b}{2}\sin\varphi, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$u = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{b}{2}\sin\varphi = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi.$$



Функция

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

имеет локальные ***минимумы*** при условии

$$\sin u = 0.$$

$$u = m\pi, \qquad \frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi = m\pi,$$

$$\boxed{b\sin\varphi = m\lambda.}$$

Дифракция Фраунгофера на щели. Точная теория.

Функция

$$I_\varphi = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

имеет локальные **<u>максимумы</u>** (кроме центрального) при условии

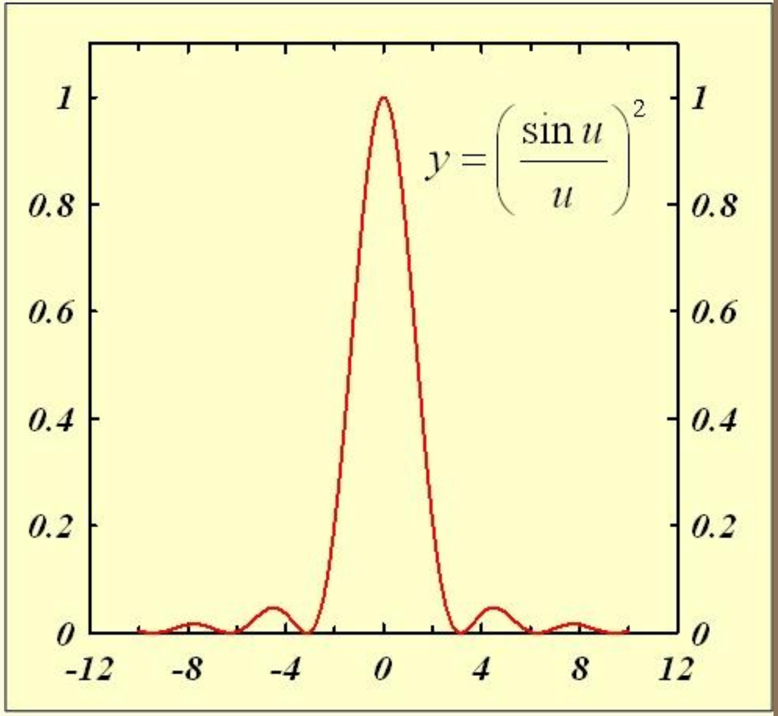
$$\sin u = \pm 1.$$

$$u = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

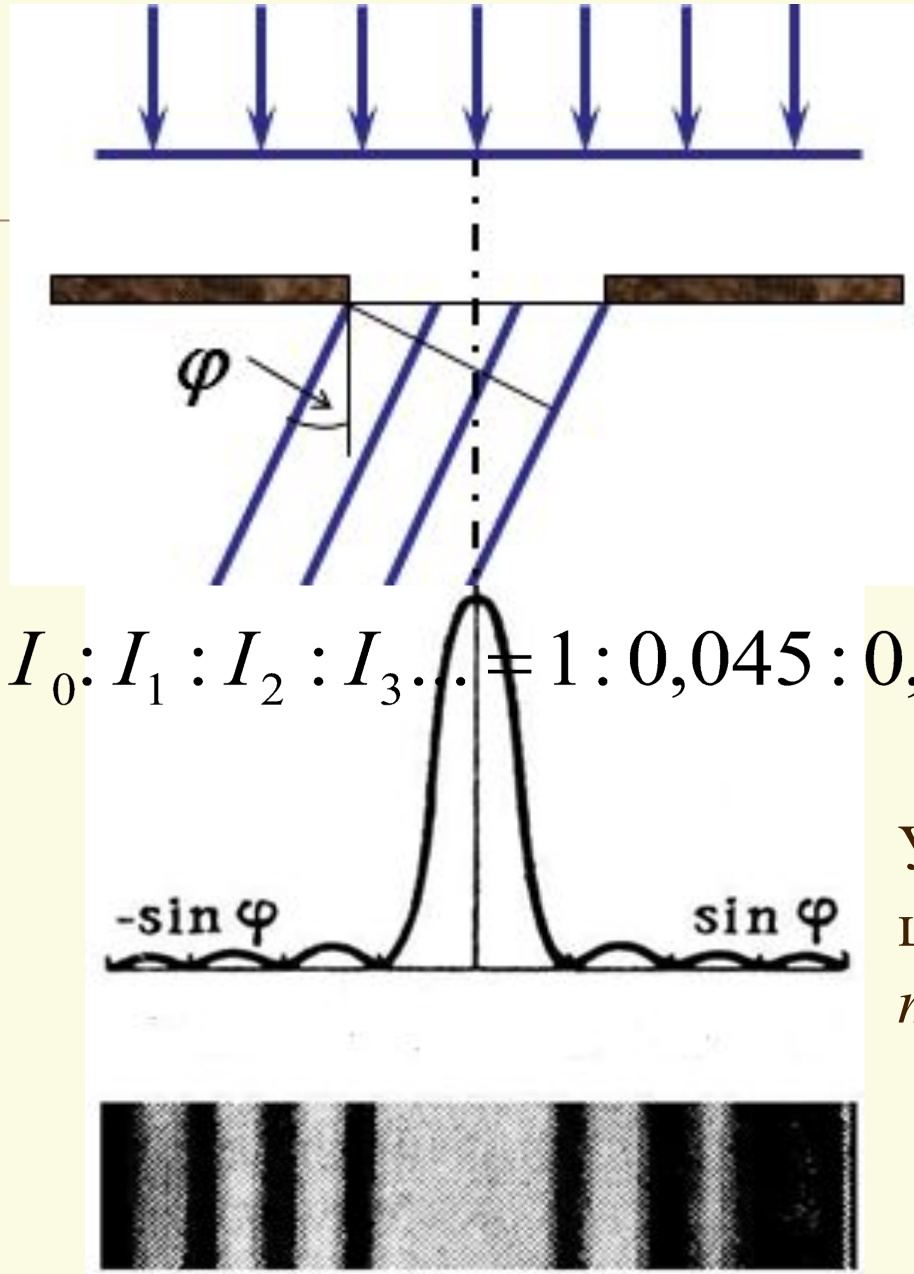
$$\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\boxed{b\sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2}.}$$

Условия минимумов и максимумов совпали с полученными методом зон Френеля.



Точный расчёт позволяет определить значения интенсивности для произвольного угла дифракции.



$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \ldots = 1 : 0{,}045 : 0{,}016 : 0{,}008 \ldots$$

Угловой размер центрального *max :*

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}$$


ЛЕКЦИЯ ЗАКОНЧЕНА!

- http://rutube.ru/tracks/3223274.html?v=d2e9b72ff871d89795bb7d918e50b9b4&&bmstart=980323