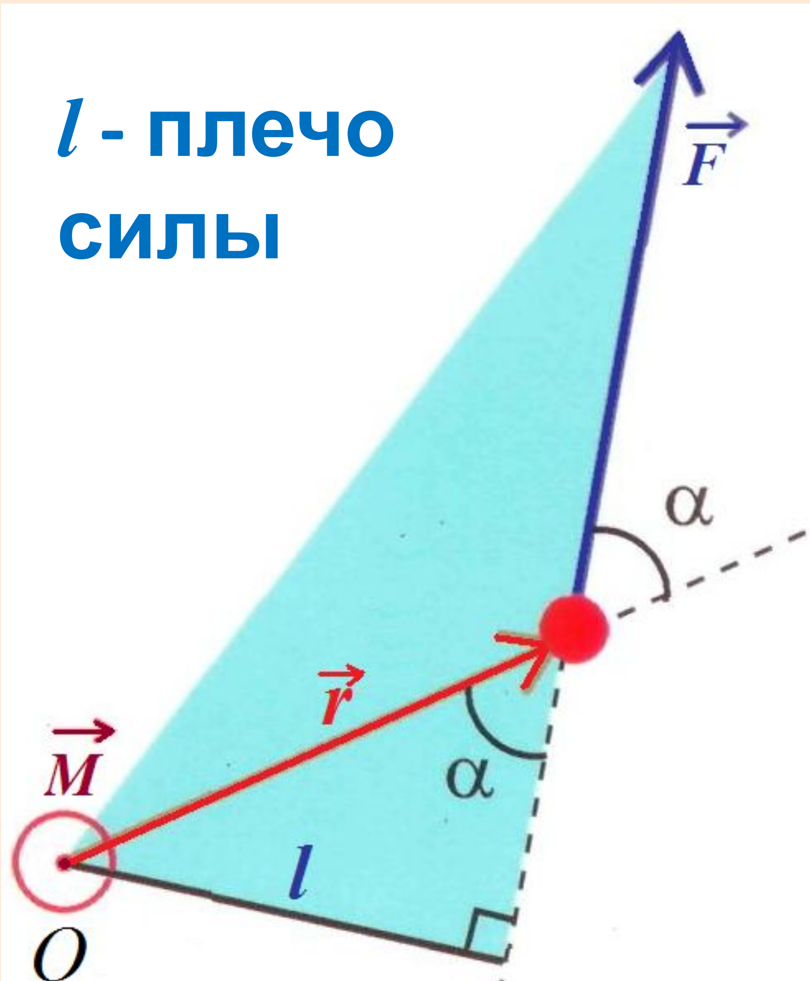
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОСНОВНЫЕ ИСТИКИ

1. Момент силы



Момент силы относительно точки:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M = Fr\sin\alpha$$

$$l = r\sin\alpha$$

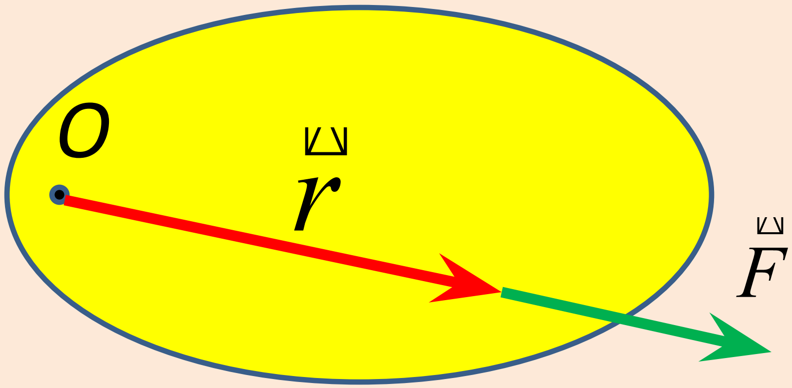
$$M = F \cdot l$$

Направление вектора момента силы находим по правилу правого винта.

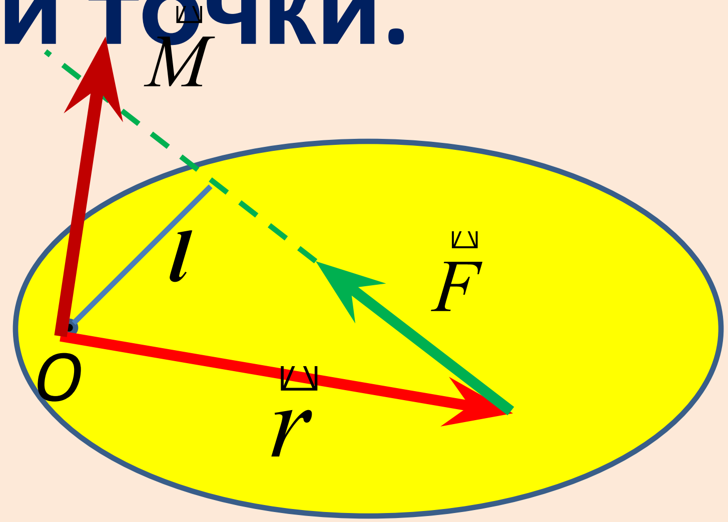
Этот вектор перпендикулярен и силе, и радиус-вектору.

$$\vec{M} \perp \vec{F}, \vec{M} \perp \vec{r}$$

Момент силы, вычисленный относительно точки, характеризует способность силы вызывать поворот вокруг этой точки.

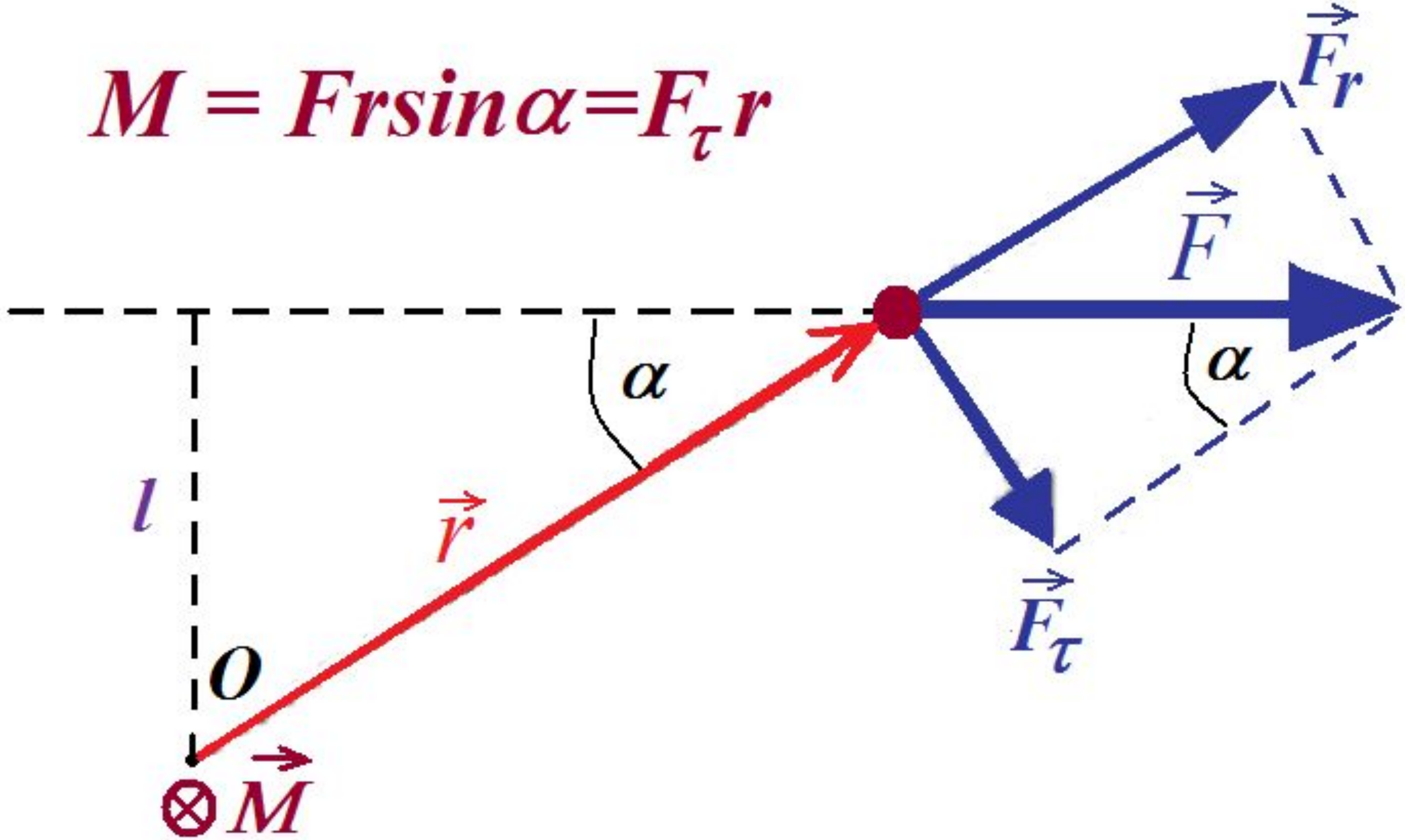


$$\vec{M} = 0$$

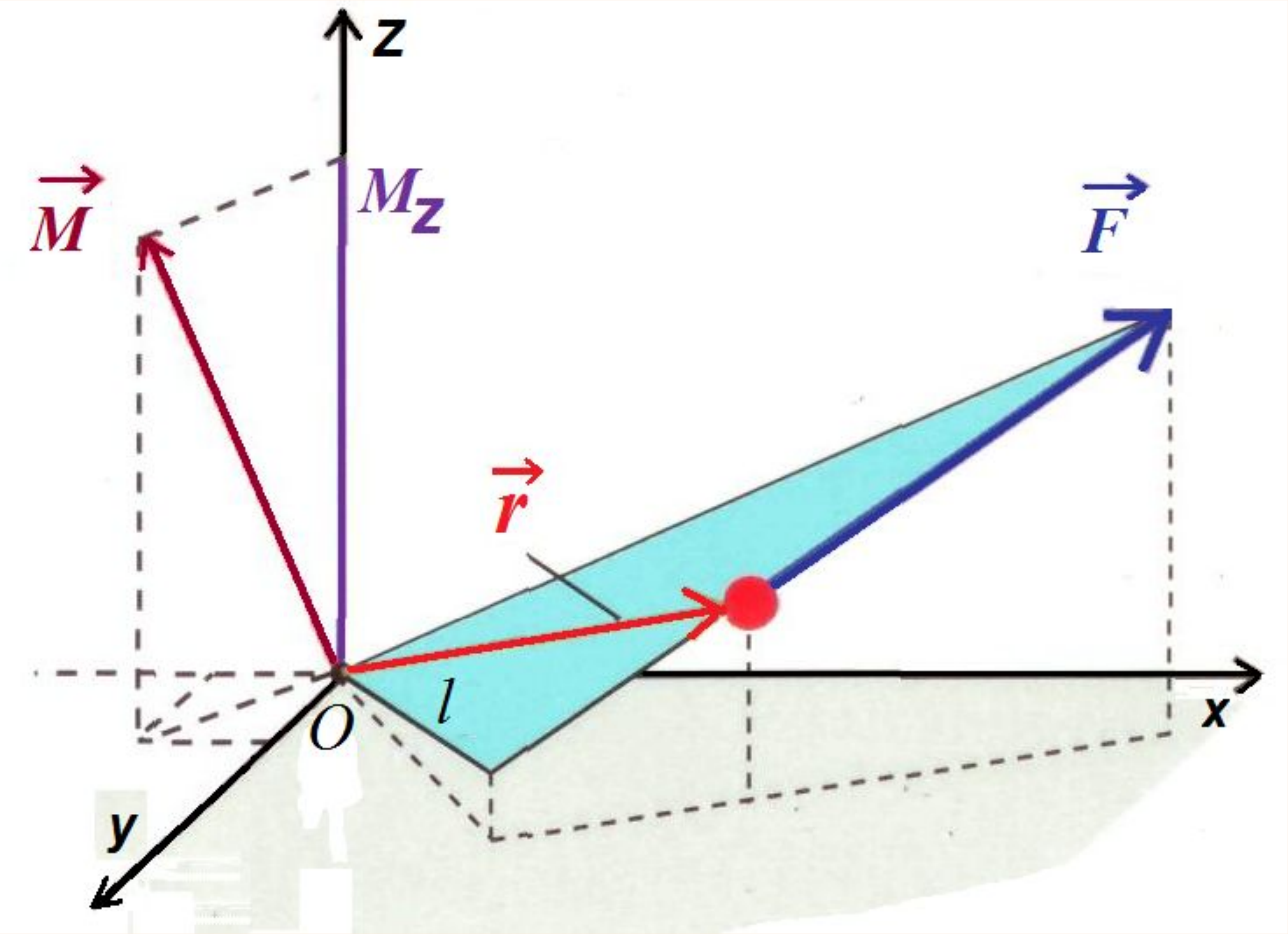


$$\vec{M} \neq 0$$

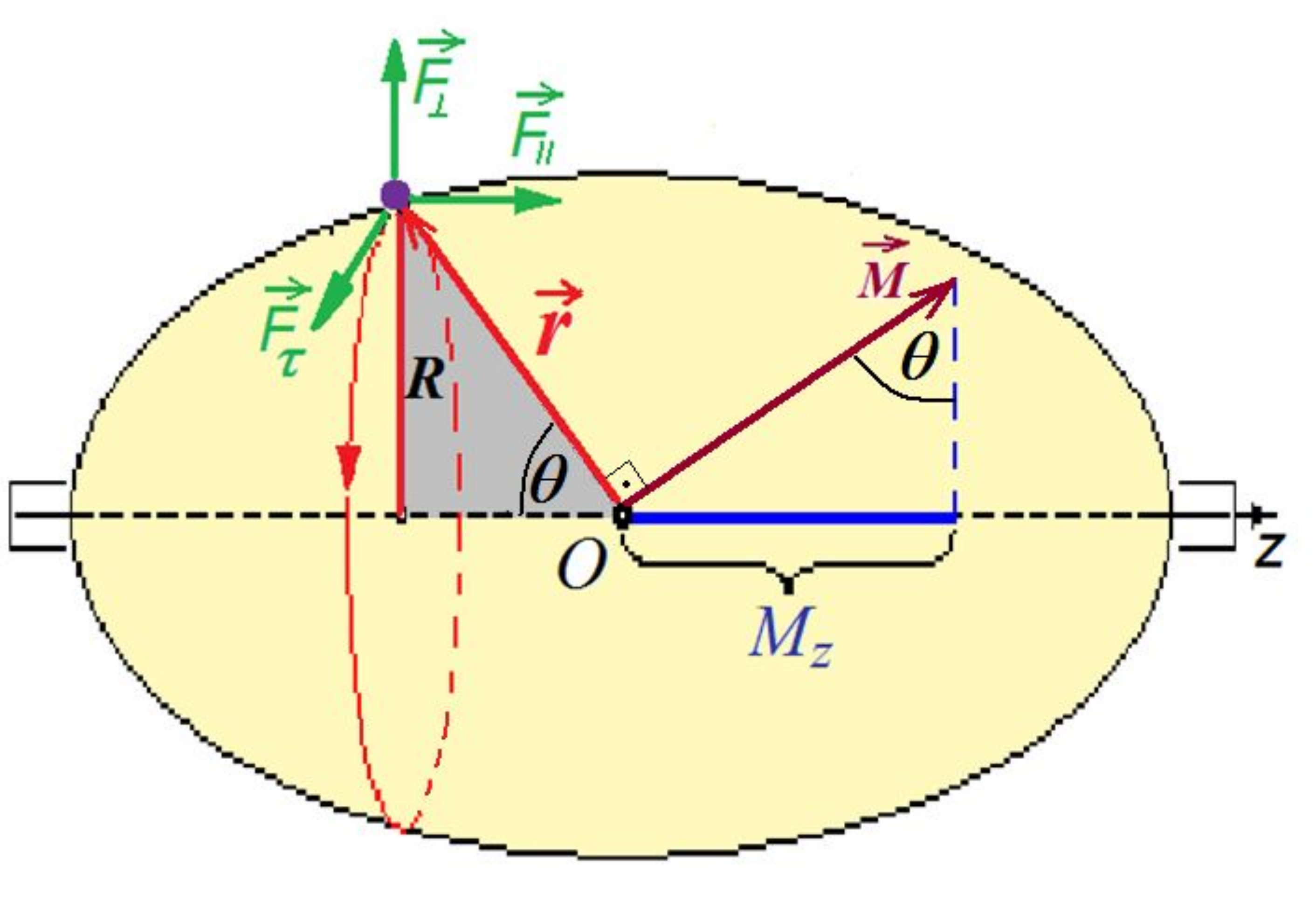
$$M = Fr\sin\alpha = F_\tau r$$



Момент силы относительно оси



Момент силы относительно оси z – это скалярная величина, равная проекции на ось z вектора $\vec{M}$, найденного относительно произвольной точки этой оси.

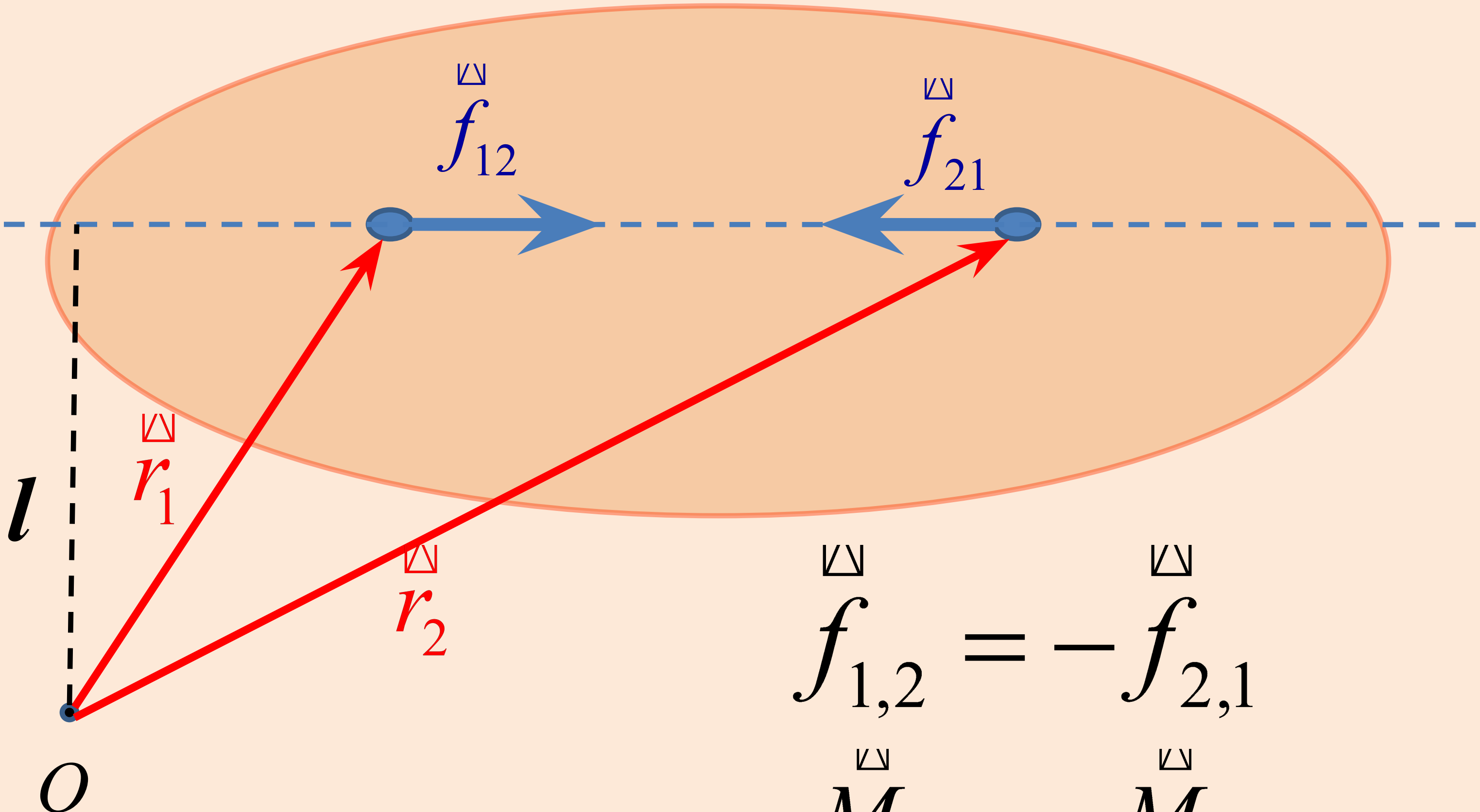


$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_\tau] \qquad M_z = M \cdot \sin\theta$$

$$M_z = F_\tau \cdot R$$

$$M = r \cdot F_\tau \qquad r \cdot \sin\theta = R$$

Момент сил взаимодействия



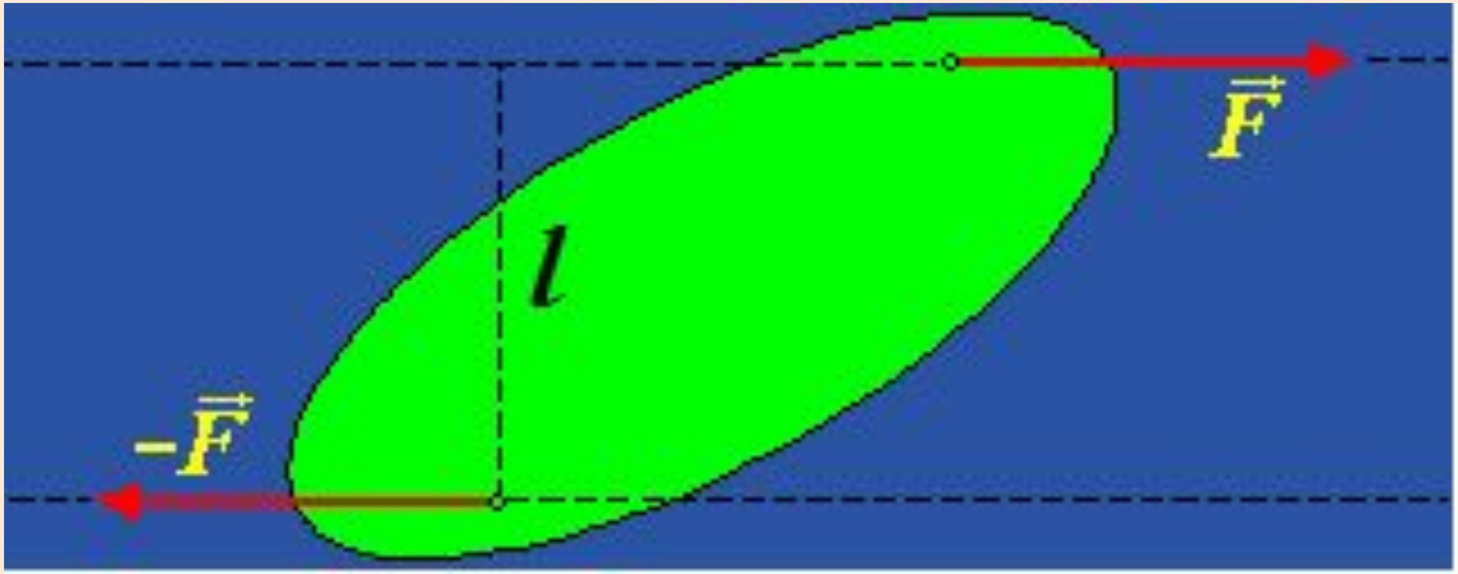
$$\vec{f}_{1,2} = -\vec{f}_{2,1}$$

$$\vec{M}_{1,2} = -\vec{M}_{2,1}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{1,2} + \vec{M}_{2,1} = 0$$

Момент пары сил

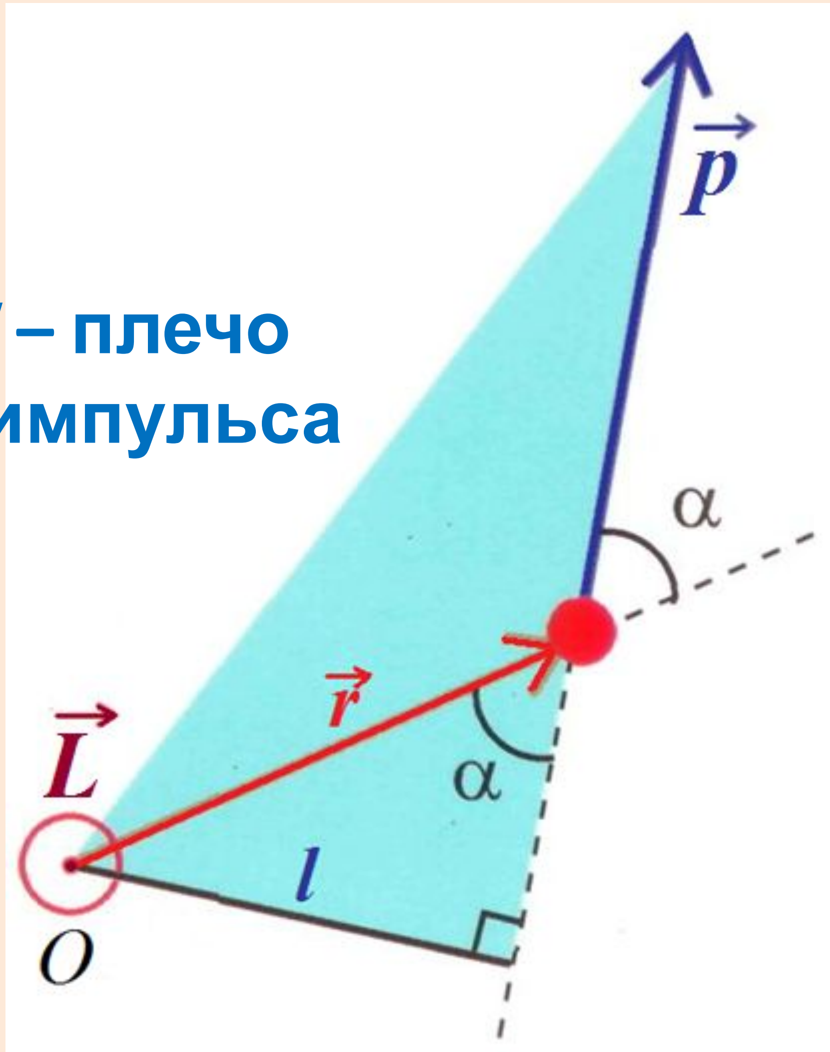
Пара сил - две равные по величине, противопо-ложные по направлению силы, не лежащие на одной прямой.



$$M = F \cdot l$$

l **- плечо пары**

2. Момент импульса



l – плечо импульса

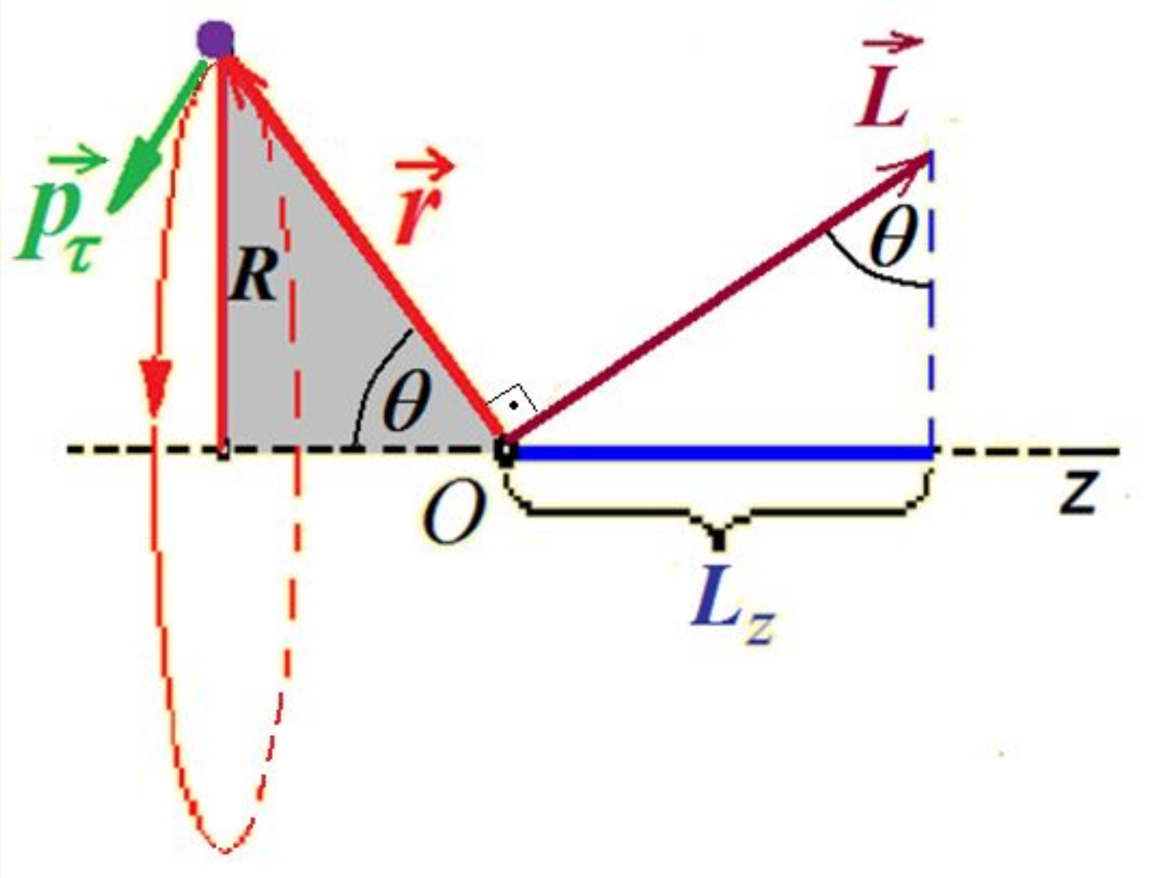
Для материальной точки отн. точки O:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$L = p r \sin\alpha = p l$$

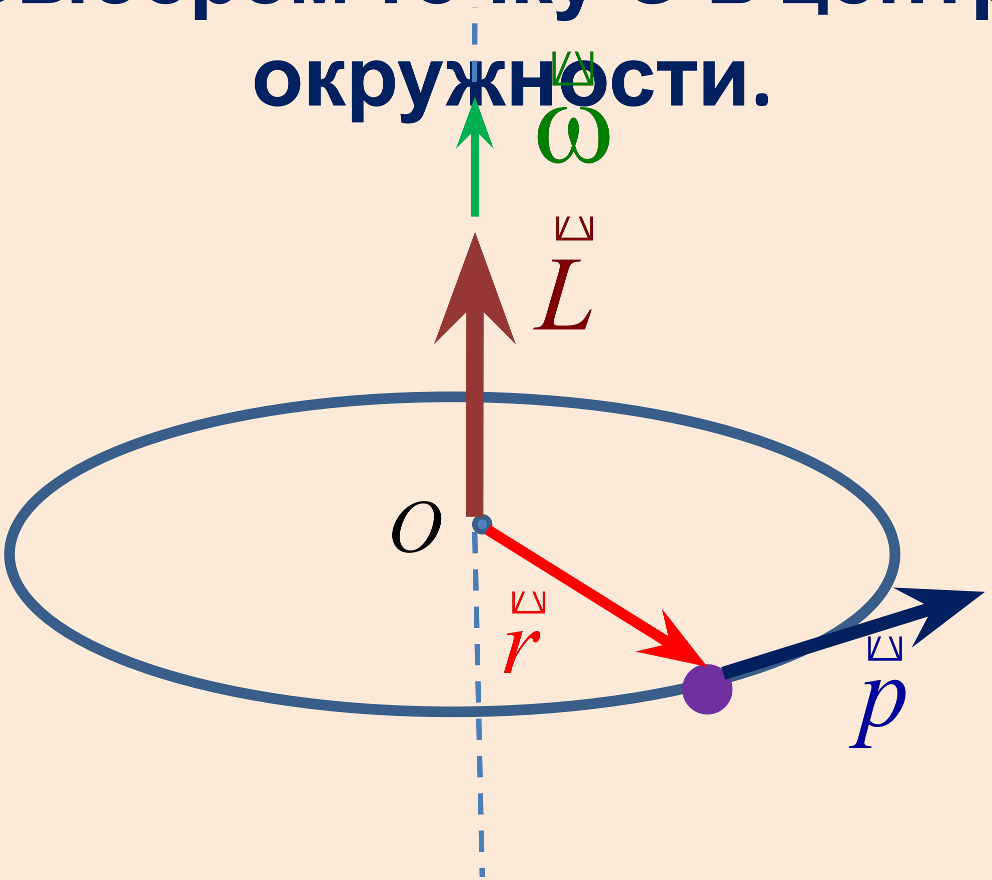
Направление вектора $\vec{L}$ также определяется по правилу правого винта.

Момент импульса <u>**относительно оси вращения**</u> **определяется так же, как и момент силы. Нужно найти вектор момента импульса относительно произвольной точки оси, затем взять проекцию вектора** $\vec{L}$ **на эту ось.**



$$L_z = p_\tau \cdot R$$

Пусть МТ движется по окружности. Выберем точку *O* в центре окружности.



$$L = p \cdot r = m\text{v}r$$

$$\text{v} = \omega r$$

$$L = mr^2\omega$$

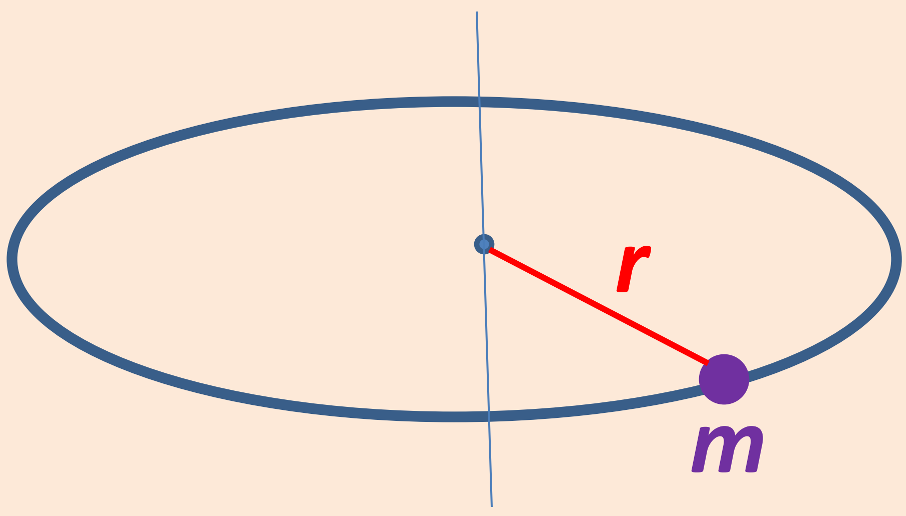
$$I = mr^2$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$I = mr^2$$ ⇒ **3. момент инерции материальной точки**

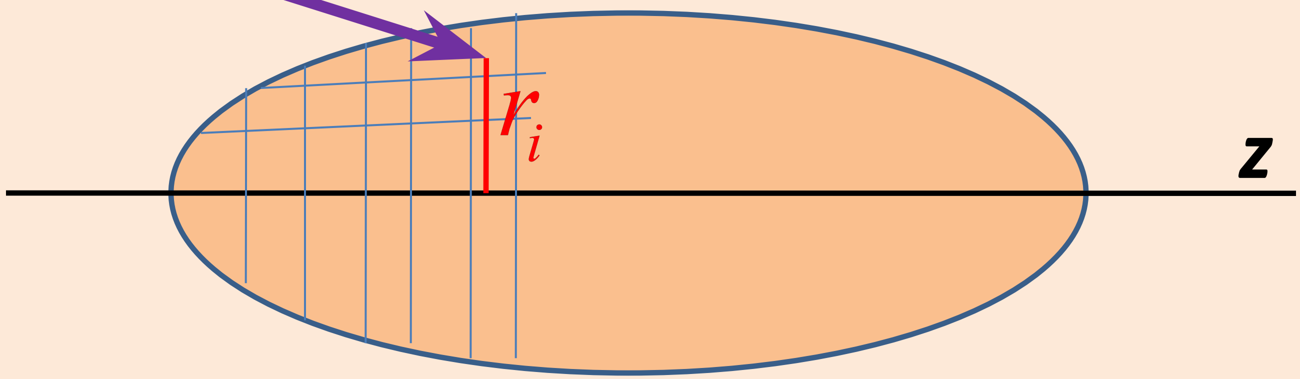
Равен произведению массы МТ на расстояние до оси вращения.

$[\,I\,]$ = кг · м^2



Момент импульса твердого тела (собственный момент импульса)

Разобьем тело на систему материальных точек массой Δm_i .



$$L_z = \sum_i L_{z,i}$$

$$L_z = \omega \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

$$L_{z,i} = \Delta m_i \cdot \omega \cdot r_i^2$$

$$L_z = I_z \omega$$

Для однородного симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, справедливо векторное равенство:

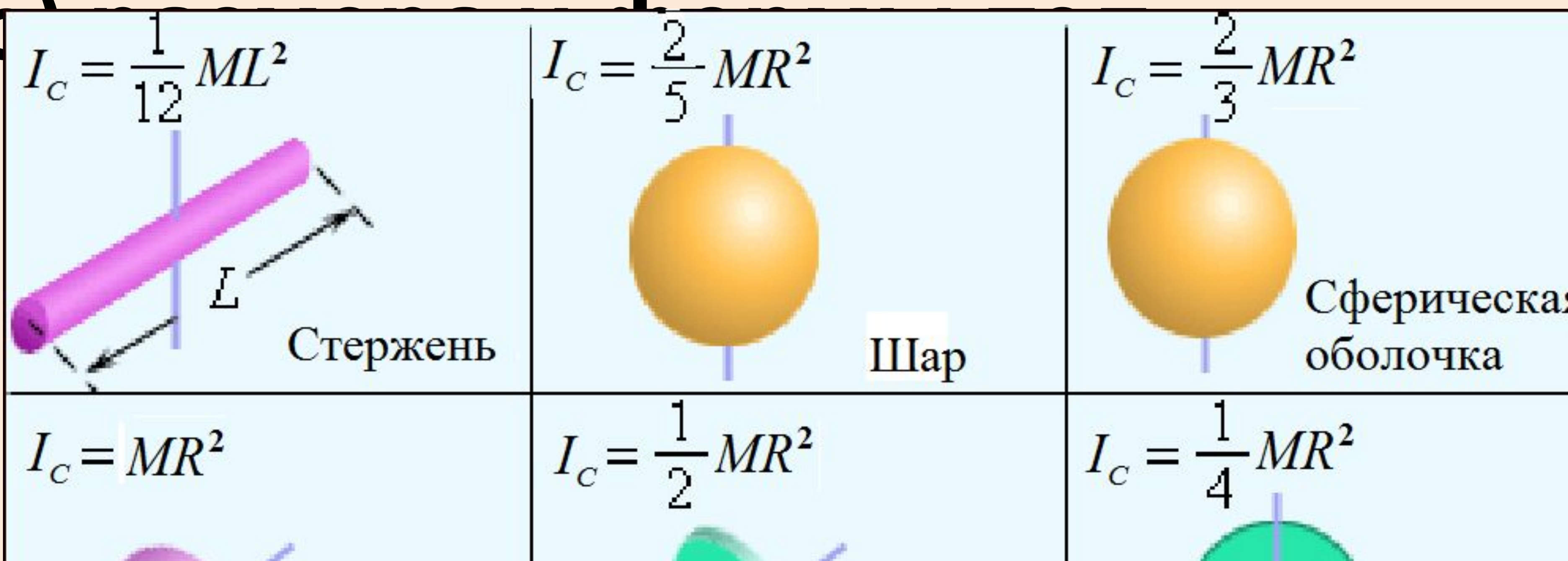
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

3. Момент инерции твердого тела - мера инерции

Зависит от

а) массы тела -*m*(от равномерности)

б)



в)от радиуса r , от расположения оси вращения (теорема **Штейнера**)

Вывод момента инерции для тел

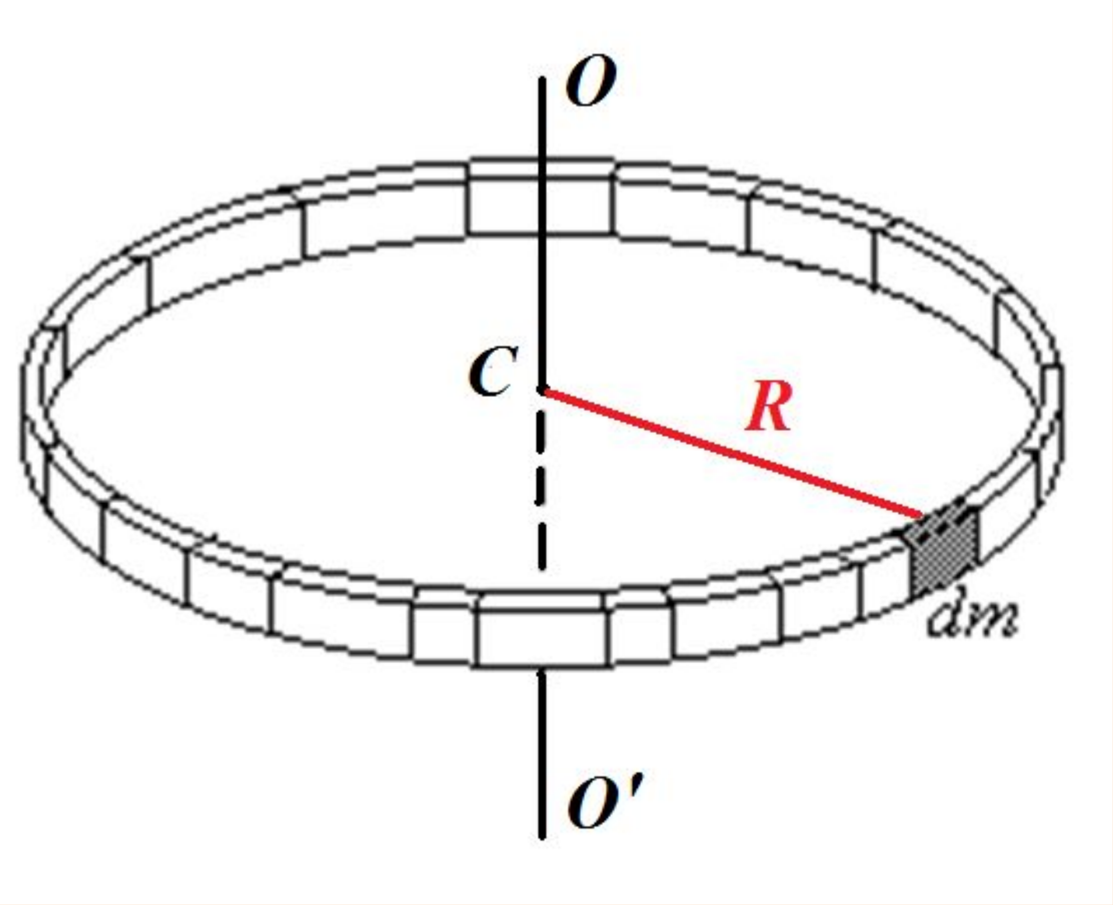
Момент инерции тела относительно данной оси – это величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от данной оси.

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

или

$$I = \int_V r^2 \cdot dm$$

Момент инерции кольца



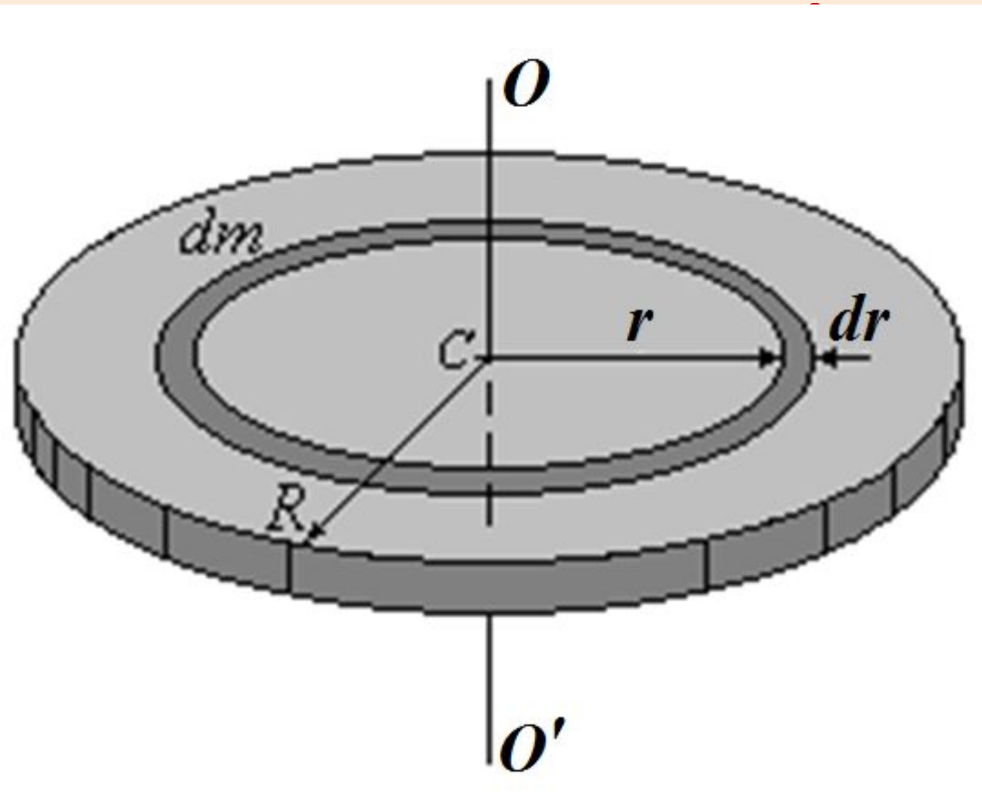
$$I = \int\limits_{\text{по кольцу}} r^2 \cdot dm$$

$$r = R = const.$$

$$I = R^2 \int\limits_{\text{по кольцу}} dm$$

$$I_C = mR^2$$

Момент инерции сплошного цилиндра ка)



Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой ширины *dr* и радиусом *r*.

$$dI = r^2 dm$$

dm **— масса элементарного цилиндра**

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dS \cdot h$$

$$dS = 2\pi r \cdot dr$$

$$dm = 2\pi\rho h \cdot r dr$$

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

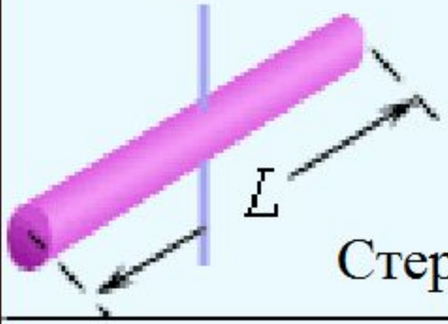
$$I = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R 2\pi\rho h\, r^3 dr$$

$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi\rho h R^4}{2}$$

$$I_C = \frac{1}{2} m R^2$$

Моменты инерции I_C некоторых однородных твердых тел

$$I_C = \frac{1}{12}ML^2$$



Стержень

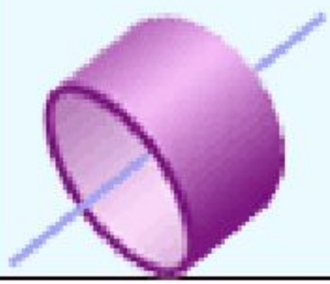
$$I_C = \frac{2}{5}MR^2$$

Шар

$$I_C = \frac{2}{3}MR^2$$

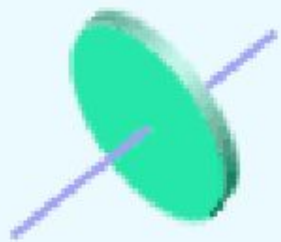
Сферическая оболочка

$$I_C = MR^2$$



Обруч

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2$$



Диск

$$I_C = \frac{1}{4}MR^2$$

Диск

Теорема Штейнера

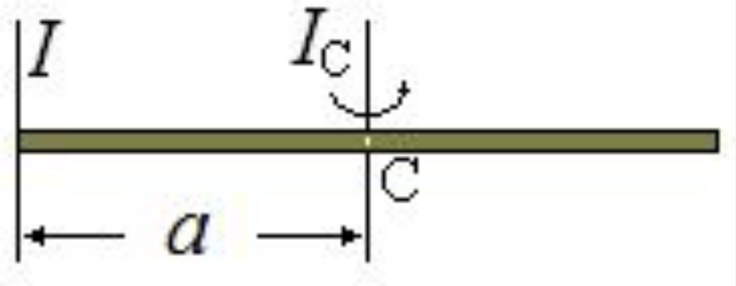
Момент инерции относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси вращения, проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I = I_C + ma^2$$

Применение теоремы Штейнера

Для стержня $I_C = \dfrac{1}{12} m\ell^2$

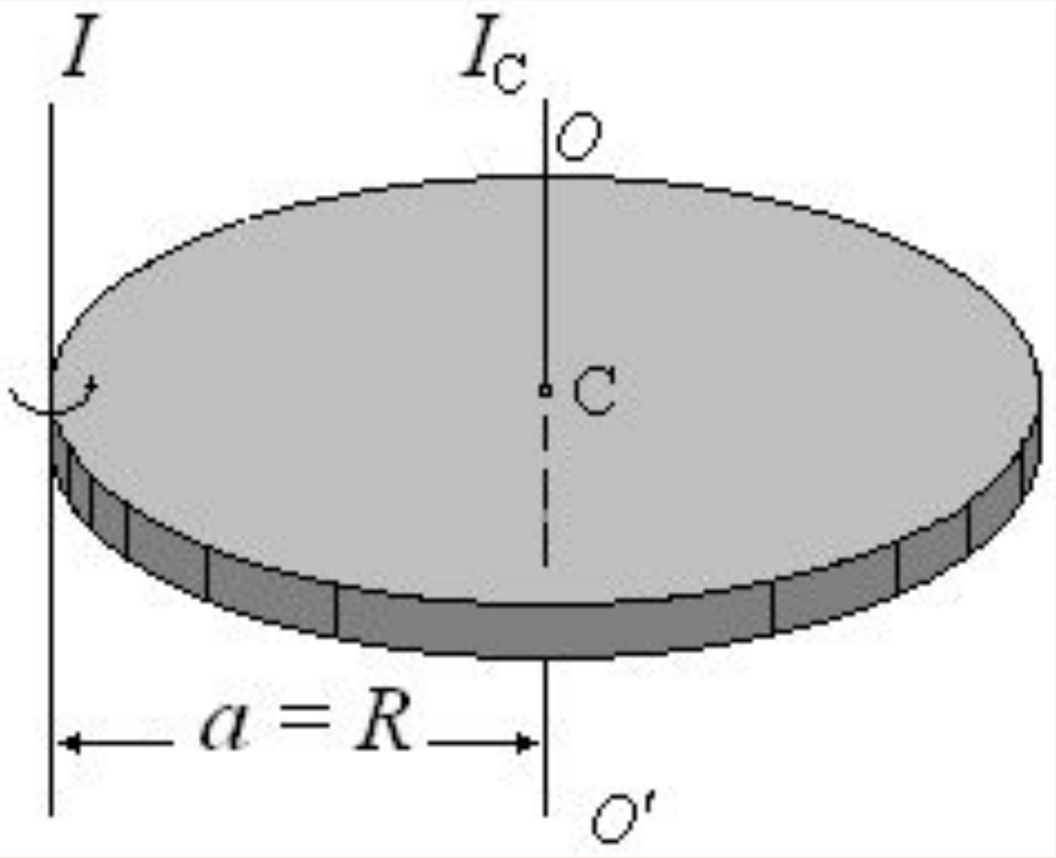
Найдем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец:



$$a = \frac{\ell}{2}$$

$$I = I_C + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} m\ell^2$$



Для диска:

$$I_C = \frac{1}{2} mR^2$$

$$a = R$$

$$I = I_C + ma^2$$

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2$$

$$I = \frac{3}{2} mR^2$$