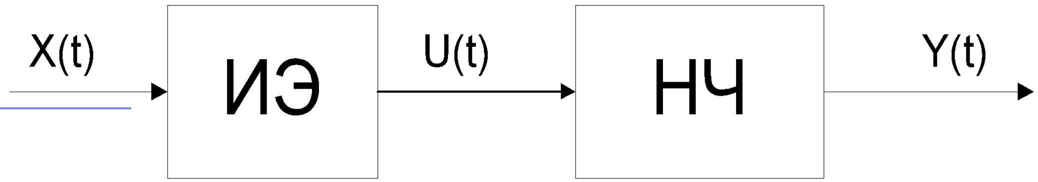
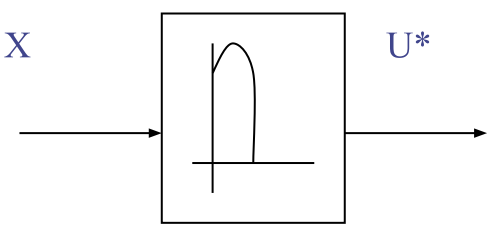
ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

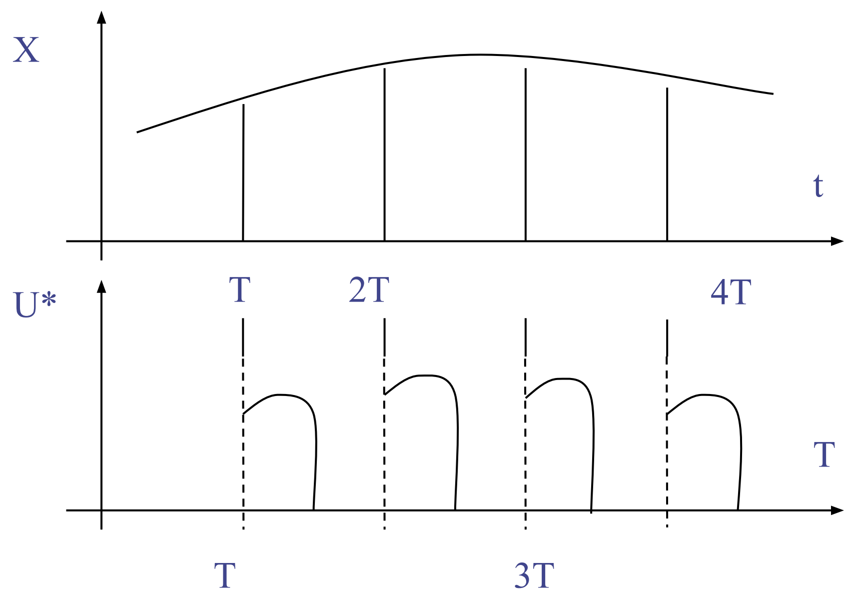
Цифровые системы автоматического управления

Простейшая импульсная система



ИЭ – амплитудно-импульсный элемент, представляющий собой устройство, на выходе которого в момент времени t=0, T, 2T... наблюдается последовательность импульсов произвольной формы с амплитудами, пропорциональными дискретам входного сигнала X[nT]





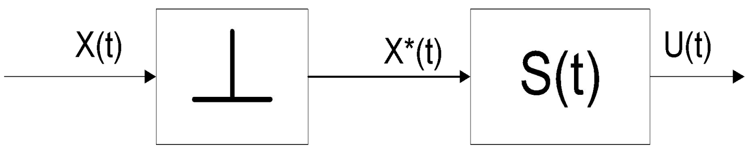
- Пусть функция S(t) – задает форму импульса на выходе ИЭ, соответствующего единичной дискрете входного сигнала, приложенной в момент времени $t=0$.
- Тогда дискрете X[nT] соответствует импульс:

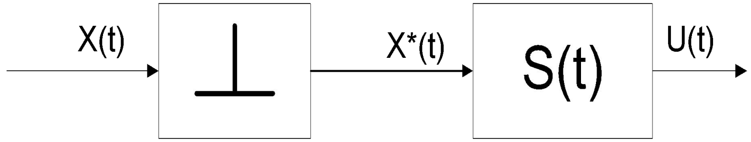
$$U(t) = X[nT] \cdot S(t-nT).$$

- ИЭ с произвольной формой импульса S(t) можно представить как последовательное соединение ИИЭ и непрерывного звена с импульсной переходной функцией S(t).

$$S(p)=L\{S(t)\}$$

- звено называют формирующим звеном или экстраполятором
- Идеальный ИЭ - звено, выходная величина X*(t) которого, представляет собой последовательность δ-функций с площадями равными дискретам входной величины X[nT].

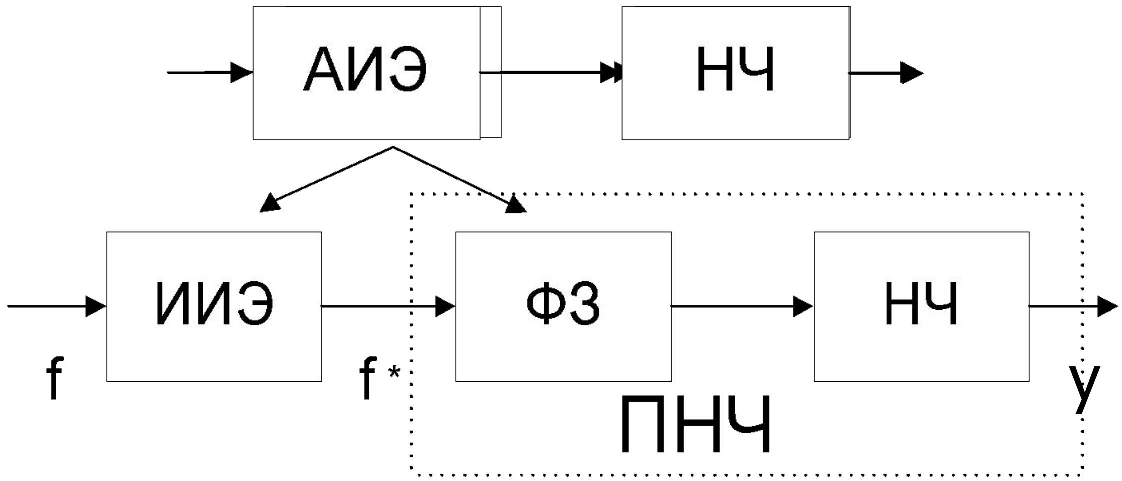




- Реакция на дискрету X[nT] последовательного соединения ИИЭ и непрерывного звена с импульсной переходной функцией S(t)
- Через ИИЭ: $X^*(t)=X[nT]\cdot\delta(t-nT)$
- Через непрерывное звено, дельта-функция в силу свойства импульсной переходной характеристики развернется в сигнал S(t-nT)
- На выходе цепочки: $U(t) = X\,[nT]\;\cdot\;S(t-nT)$.
- Т.о. в линейной импульсной системе с одним ИЭ можно выделить идеальный ИЭ и непрерывную часть.
- Если выходная величина АИЭ остается постоянной в течение всего интервала квантования Т, то соответствующее формирующее звено называется экстраполятором нулевого порядка.
- Его передаточная функция имеет вид:

$$s(p)=\frac{1-e^{-pT}}{p}=W_{ý}(p)$$

Уравнения разомкнутой импульсной системы



- Передаточная функция приведенной непрерывной части
- W(p)=W$_{Э}$(p)*W$_{НЧ}$(p)
- W(p)=L{ω(t)}

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT]\cdot\delta(t-kT)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} f[kT]\cdot\omega(t-kT)$$ $nT \le t \le (n+1)T$

В дискретные моменты съема сигнала (t=nT), при нулевых начальных условиях

$$y[nT] = \sum_{k=0}^{n} f[kT]\omega[(n-k)T]$$

- уравнение движения системы во временной области

Уравнение системы в изображениях

$$y[nT]=\sum_{k=0}^{n} f[kT]\omega[(n-k)T]$$

- Применяя Z-преобразование, получим: $y(z)=F(z)\cdot W(z)$
- где $y(z)=z\{y[nT]\}$; $F(z)=z\{f[nT]\}$; $W(z)=z\{\omega[nT]\}$

$$W(z)=\frac{y(z)}{F(z)}=\frac{z\{y[nT]\}}{z\{f[nT]\}}=z\{\omega[nT]\}$$

- Z - ПФ характеризует связь между входом и выходом только в тактовые моменты времени.
- Z-передаточная функция разомкнутой системы равна Z-преобразованию весовой характеристики приведенной НЧ.

$$W(z)=z\{\omega[nT]\}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega[nT]\cdot z^{-n}=L\{\omega(t)\delta_T(t)\}$$

Реакция системы в смещенные дискретные моменты времени

$t = nT+\varepsilon T$, где $0 \le \varepsilon \le 1$; $n=0,1,...$

- зависимость для расчета реакции системы

$$y[nT + \varepsilon T] = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] \cdot \omega[(n-k)T + \varepsilon T]$$

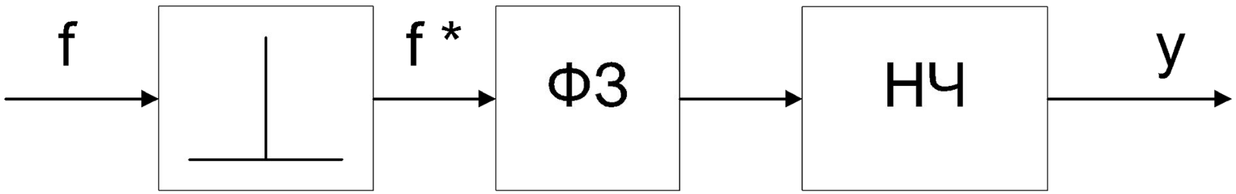
- уравнение в изображениях

$$y(z, \varepsilon) = F(z) \cdot W(z, \varepsilon)$$

- Z-передаточная функция импульсной системы

$$W(z, \varepsilon) = \frac{y(z, \varepsilon)}{F(z)}$$

Вычисление Z-передаточной функции разомкнутой дискретной системы



Способы получения Z-передаточной функции систем:

1. Прямой – с использованием Z-преобразования по весовой характеристике ω(t)
2. С использованием $\overline{D}$- преобразования, устанавливающего связь между ПФ непрерывной системы и Z –ПФ с последующей заменой $e^{Tp} \to z$
3. Использование таблиц соответствия W(p)→W(z)

Свойства Z-ПФ

1. Z-ПФ есть дробно-рациональная функция переменного z.

2. Полюсы z_i $i=1,2..n$ Z-ПФ $W(z)$ и $W(z,\varepsilon)$ связаны с полюсами s_i ПФ НЧ соотношениями:

$$z_i = e^{s_i T} \quad i=1,2..n$$

3. Степень знаменателя $W(z)$ (порядок дискретной ПФ) равна степени полинома знаменателя исходной ПФ:

4. Функция $W(z)$ конечна при $z=1$, если ПФ $W(p)$ не имеет полюсов в начале координат. При $z \to 1$ $W(z)$ стремится к вещественному числу.

Определение процессов в импульсных системах с помощью Z-преобразования

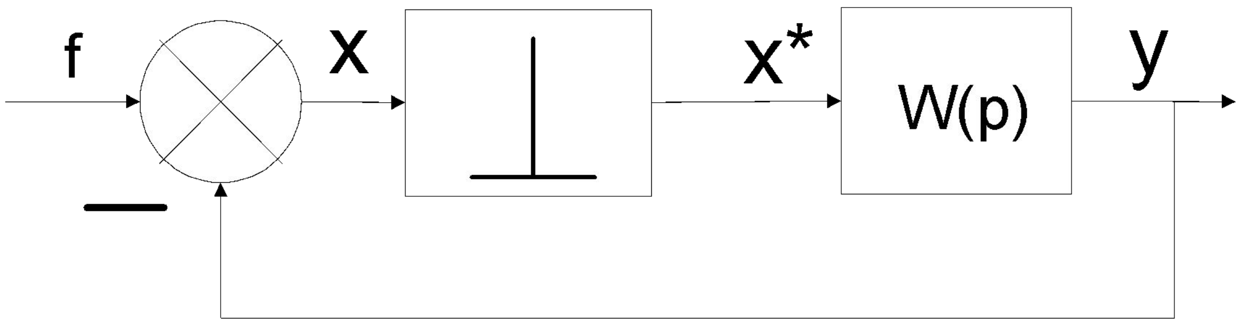
- $y[kT]=Z^{-1}\{F(z)\cdot W(z)\}$
- Обратное Z-преобразование можно определить с помощью вычетов

$$y[kT]=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}\{F(z)\cdot W(z)\}z^{k-1}\Big|_{z=z_i}$$

- z_i-полюсы функций, стоящих под знаком обратного преобразования.
- По известной Z-ПФможно составить соответствующее разностное уравнение импульсной системы

$$\sum_{i=0}^{n}b_i y[k+i]=\sum_{j=0}^{m}a_j f[k+j] \qquad W(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{\sum_{j=0}^{m}a_j z^i}{\sum_{i=0}^{n}b_i z^i}$$

Уравнение замкнутой системы



- уравнение замыкания для дискретных моментов времени: t=nT, n=0,1…
- x[nT]=f[nT]-y[nT]
- уравнение разомкнутой системы

$$y[nT]=\sum_{k=0}^{n} x[kT]\omega[(n-k)T]$$

- уравнение замкнутой системы

$$y[nT]=\sum_{k=0}^{n} f[kT]\cdot\omega[(n-k)T]-\sum_{k=0}^{n} y[kT]\cdot\omega[(n-k)T]$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$y[nT] = \sum_{k=0}^{n} f[kT] \cdot \omega[(n-k)T] - \sum_{k=0}^{n} y[kT] \cdot \omega[(n-k)T]$$

$$y(z) = F(z)W(z) - y(z) \cdot W(z)$$

$$y(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} \cdot F(z) \qquad \hat{O}(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}$$

$$x(z) = F(z) - y(z)$$

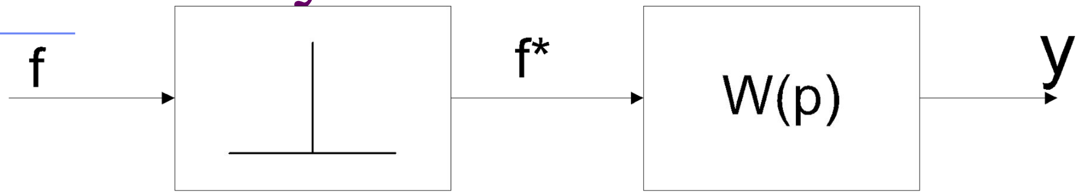
$$x(z) = \frac{1}{1 + W(z)} \cdot F(z) \qquad \hat{O}_0(z) = \frac{1}{1 + W(z)}$$

ПФ замкнутой системы для управляемой переменной по входному воздействию.

ПФ замкнутой системы по ошибке.

Правила структурных преобразований в линейных импульсных системах

Система с импульсным элементом на входе



$$y(z) = W(z) \cdot F(z) \qquad W(z) = \frac{y(z)}{F(z)}$$

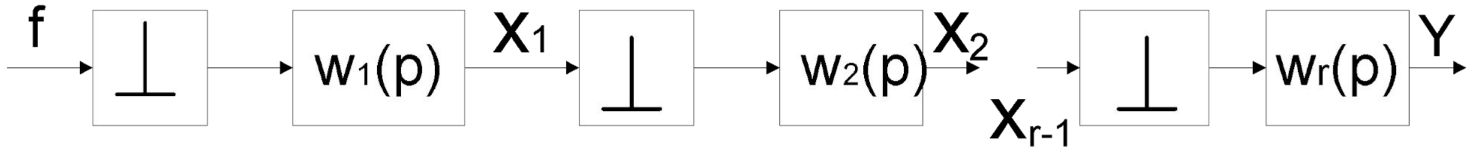
Если импульсный элемент включен на выходе непрерывной части

$$y(z) = \overline{D}\{W(p) \cdot F(p)\}\Big|_{e^{pT}=z}$$

z –ПФ в этом случае не может быть получена, т.к. ПФ W(p) и F(p) нельзя рассматривать раздельно.

модифицированное Z –преобразования Y(z,ε) не имеет смысла, так как информация о переменной Y в промежуточные моменты времени отсутствует.

Последовательное соединение непрерывных звеньев, разделенных импульсными элементами

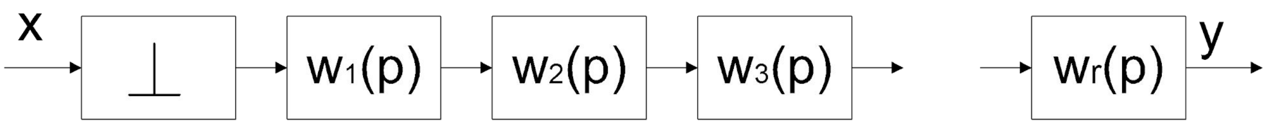


$$\frac{X_1(z)}{F(z)} = W_1(z) = Z\{W_1(p)\}$$

$$\frac{Y(z)}{X_{r-1}(z)} = W_r(z) = Z\{W_r(p)\}$$

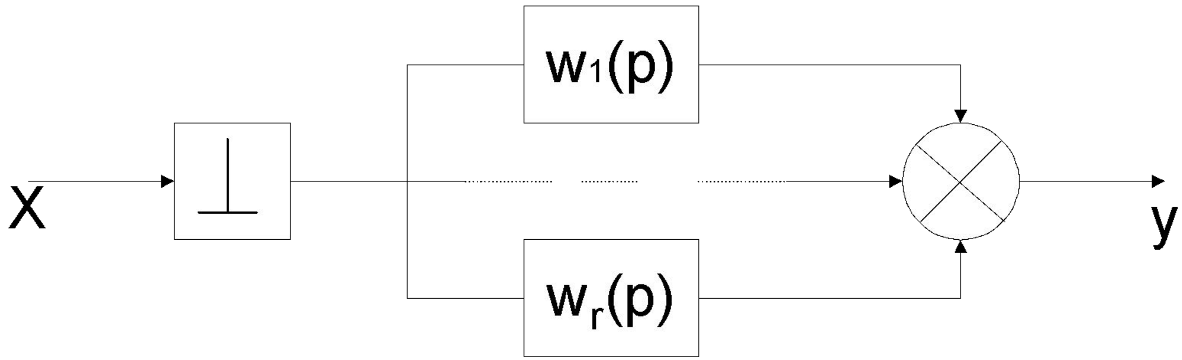
$$\frac{\mathrm{Y}(\mathrm{z})}{\mathrm{F}(\mathrm{z})} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{r}} \mathrm{W}_{\mathrm{i}}(\mathrm{z}) = \mathrm{W}(\mathrm{z})$$

Последовательное соединение непрерывных звеньев, не разделенных импульсными элементами



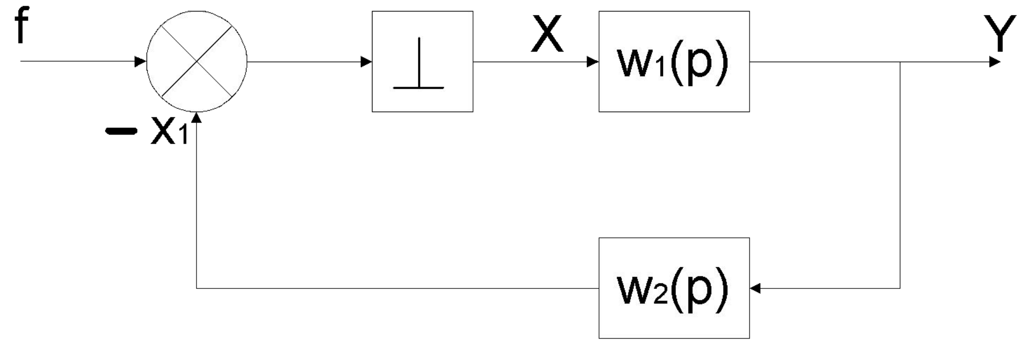
- эквивалентная ПФ непрерывной части имеет вид:
- $W(p)=W_1(p)\cdot W_2(p)\ldots W_r(p)$
- после чего это соединение сводится к первой схеме

Параллельное соединение непрерывных звеньев



$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \sum_{i=1}^{r} W_i(z)$$

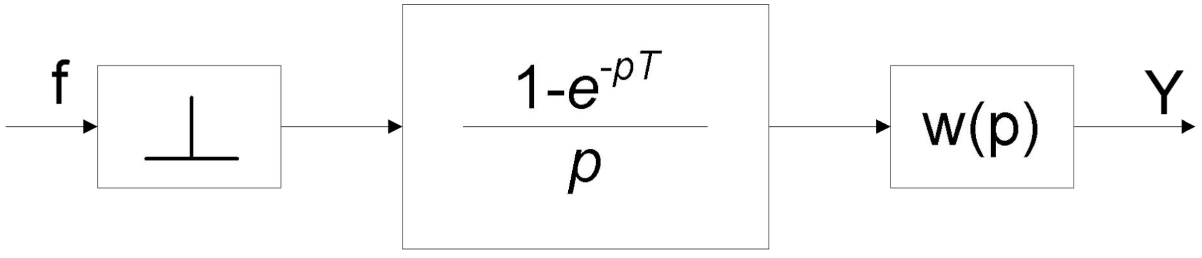
Элементарная структура с обратной связью



$$W(z)=\frac{W_1(z)}{1+W_{12}(z)}$$

$$W_1(z)=Z\{W_1(p)\} \qquad W_{12}(z)=Z\{W_1(p)\cdot W_2(p)\}$$

Соединение ИИЭ - экстраполятор нулевого порядка - непрерывное звено



$$W(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-pT}}{p}W(p)\right\} = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$$

Определение Z-ПФ многоконтурной дискретной системы

$$W(z) = \frac{W_{\text{ïð}}(z)}{1 + \sum\limits_{i} W_i(z)}$$

- $W_{пр}(z)$ – Z-ПФ прямой цепи с учетом расположения ИИЭ.
- $W_i(z)$ – Z-ПФ i-ого разомкнутого дискретно-непрерывного контура.