Планирование эксперимента. Анализ результатов. Планирование 2-го порядка.

Пример проведения планирования 1-го порядка.
Постановка задачи

Покупатели приходят в магазин с одним продавцом.

Время между приходом покупателей и время обслуживания подчиняются экспоненциальному закону.

Необходимо определить функциональную зависимость между временем прихода, временем обслуживания и средним временем нахождения покупателя в очереди:

Тср.оч.= f(Тприх, Тобсл)   - ?

Предполагаем линейную зависимость.

Пусть время прихода – в пределах от 5.0 до 6.0 мин.

время обслуж. – в пределах от 3.5 до 3.8 мин.

Тогда:

	-1	+1	
Тприх:	5	6	
Тобсл:	3.5	3.8	

Пример. Построение модели

Расчет коэффициентов:

$$b_0 = 6.948$$

$$b_1 = -1.681$$

$$b_2 = 0.632$$

N	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$y_{ср}$
1	+	-	-	9.2	8.2	7.2	7.6	7.3	7.956
2	+	-	+	10	9.3	9	8.9	9.3	9.3
3	+	+	-	4.7	4.9	4.6	4.6	4.5	4.676
4	+	+	+	4.7	5.7	6	6.5	6.4	5.857

Модель:

$$y = 6.948 - 1.681 \cdot x_1 + 0.632 \cdot x_2$$

Пример. Проверка адекватности

Выборочная дисперсия: $S^2 = 0.382$

Дисперсия адекватности: $S_{\text{ад}}^2 = 0.034$

Критерий Фишера: $F = \dfrac{S_{\text{ад}}^2}{S^2} < 1 \Longrightarrow$ Модель адекватна

Пример. Проверка линейности

Опыт в центре эксперимента:

-1 +1 0

Тприх: 5 6

Тобсл: 3.5 3.8

N	x_0	x_1	x_2	y_{cp}
1	+	-	-	7.956
…		…		…
4	+	+	+	5.857
5	+	0	0	

Пример. Проверка линейности

Опыт в центре эксперимента:

-1 +1 0

Тприх: 5 6 5.5

Тобсл: 3.5 3.8 3.65

N	x_0	x_1	x_2	$y_{ср}$
1	+	-	-	7.956
…		…		…
4	+	+	+	5.857
5	+	0	0	7.791

Критерий Стьюдента:

$$t = \frac{\left|b_0 - y_0\right| \cdot \sqrt{N}}{S^2} = 2.73 \quad > \quad t_{табл} = 2.131 \quad \Rightarrow$$

Модель НЕ линейна

Пример. Проверка значимости коэффициентов

Модель: $$y = 69.48 - 16.81 \cdot x_1 + 6.32 \cdot x_2$$

Критерий Стьюдента: $$t = \frac{|b_i| \cdot \sqrt{N}}{S^2} > t_{\text{табл}}$$

Коэффициенты:

$$t_1 = 5.44$$ → Значим

$$t_2 = 2.04$$ → НЕ Значим

Принятие решений после построения линейной модели

Модель: адекватна неадекватна

(увеличение точности)

линейна нелинейна

(планы 2-го порядка)

Коэф-ты: значимынезначимы

1) узкие интервалы варьирования

2) большая ошибка эксперимента

Планы второго порядка

Уравнение второго порядка

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{1 \le i < j \le k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot x_i^2$$

ПФЭ

$$N = ?^k$$

Планы второго порядка

Уравнение второго порядка

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{1 \le i < j \le k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot x_i^2$$

ПФЭ

$$N = 3^k$$

Центральный композиционный план

$$N = N_0 + 2k + n_0$$

$$N_0 = 2^{k-l}$$

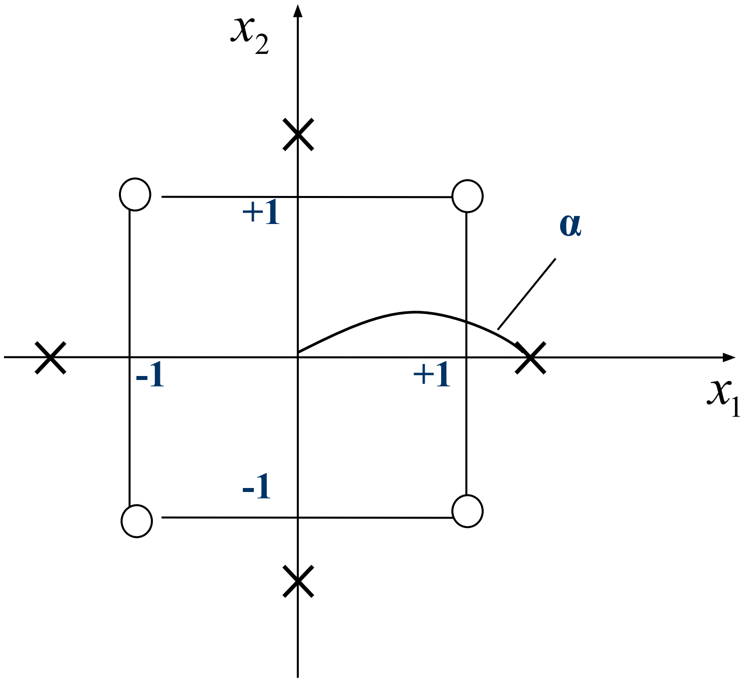
Опыты из планир-я 1-го порядка

Центральный композиционный план (ЦКП) для двух факторов

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$$

5 уровней:

-α -1 0 +1 +α



ЦКП для двух факторов

Составная часть ЦКП	№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
Ядро плана	**1**	+	–	–	+	+	+
	2	+	+	–	–	+	+
	3	+	–	+	–	+	+
	4	+	+	+	+	+	+
«Звездный» план 2^2	**5**	+	$-\alpha$	**0**	**0**	α^2	**0**
	6	+	α	**0**	**0**	α^2	**0**
	7	+	**0**	$-\alpha$	**0**	**0**	α^2
	8	+	**0**	α	**0**	**0**	α^2
Центр. Точка	**9**	+	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Количество опытов ЦКП

k	Ядро плана	3^k	$N=2^{k-d}+2k+1$
2	2^2	9	9
3	2^3	27	15
4	2^4	81	25
5	2^{5-1}	243	27

Выбор «звездного» плеча (для ортогонального планирования)

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{N_0 \cdot N} - N_0)/2}$$

$$N = N_0 + 2k + 1$$

k	Ядро плана (N_0)	α
2	2^2	1,000
3	2^3	1,215
4	2^4	1,414
5	2^5	1,596
6	2^{6-1}	1,547

Расчет коэффициентов

Пусть b_0 b_1 b_2 b_3 $b_{12}=b_4$ $b_{13}=b_5$ $b_{23}=b_6$ $b_{11}=b_7$ …

$$b_i = \frac{\sum_{l=1}^{N} x_{il} \cdot \bar{y}_l}{\sum_{l=1}^{N} x_{il}^2} \qquad b_0 = \frac{\sum_{l=1}^{N} \bar{y}_l}{N}$$

Дисперсии оценивания

$$S^2\{b_i\} = \frac{S^2}{\sum_{l=1}^{N} x_{il}^2} \qquad S^2\{b_0\} = \frac{S^2}{N}$$

где S^2 – выборочная дисперсия

Проверка значимости коэффициентов

Критерий Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{b_i}{\sqrt{S^2\{b_i\}}}$$

Коэффициент значим, если

$$t_{\text{расч}} \geq t_{\text{табл}}(\alpha; f = N(n-1))$$

Задача оценки точности

Задача 1: оценка точности и достоверности при заданном методе реализации модели, при заданном объеме выборки;

Задача 2: оценка необходимого числа реализаций при заданных точности и достоверности результатов.

Желаемую степень точности можно задавать:

а) в виде доли стандартного отклонения;

б) в процентах от величины среднего значения;

в) в абсолютных величинах.

Оценивание среднего значения совокупности (задача 2)

Задача: необходимо построить такую оценку истинного среднего значения совокупности, что

$$P\left\{\mu - d \le \overline{X} \le \mu + d\right\} = 1 - \alpha$$

где $\overline{X}$ — выборочное среднее,

$(1-\alpha)$ — вероятность того, что интервал $\mu \pm d$ содержит $\overline{X}$

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$n = \left(\sigma Z_{\alpha/2}\right)^2 \Big/ d^2$$

где $Z_{\alpha/2}$ — двусторонняя стандартная нормальная статистика (допустимая величина риска);

d — допустимая разность между оценкой и истинным значением параметра;

σ — величина изменчивости совокупности,

Оценивание среднего значения совокупности (задача 1)

Задача: какой точности d мы достигнем при заданном объеме выборки n?

$$P\left\{\mu - d \le \overline{X} \le \mu + d\right\} = 1 - \alpha$$

Достигаемая точность:

$$d = \frac{\sqrt{S^2} \cdot t}{\sqrt{n}}$$

где S^2 — выборочная дисперсия, полученная на выборке n;

t — критерий Стьюдента

Пример. Оценка точности

σ - неизвестна.

Точность в долях стандартного отклонения: $d = \dfrac{\sigma}{4}$

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$\left(\text{при}\ \alpha = 0.05 \quad Z_{\alpha/2} = 1.96\right)$$

$$n = \frac{\left(\sigma \cdot Z_{\alpha/2}\right)^2}{d^2} = \frac{\sigma^2 \cdot Z_{\alpha/2}^2 \cdot 4^2}{\sigma^2} = 16 \cdot 1.96^2 = 61.46 = 62$$

Оценивание дисперсии совокупности

Задача: построение доверительных интервалов

$$P\left\{(1-d)\sigma^2 \le S^2 \le (1+d)\sigma^2\right\} = 1-\alpha$$

где $0 \le d \le 1$ — число, характеризующее степень близости оценки S^2 к истинной дисперсии σ^2.

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$n = 1 + \frac{2\left(Z_{\alpha/2}\right)^2}{d^2}$$

Сравнение двух распределений

Задача: проверка близости распределения отклика модели к некоторому другому распределению.

Под желаемой точностью (d) будем понимать максимальную разность сравниваемых распределений во всех точках

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$n = \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2$$

где λ — табличное значение функции Колмогорова.

Стратегическое и тактическое планирование

Стратегическое планирование (первая составляющая планирования экспериментов с моделями систем) ставит целью решение задачи получения необходимой информации о системе с помощью модели, с учетом ограничения на ресурсы.

Тактическое планирование (вторая составляющая) — это определение способа проведения каждой серии испытаний модели, предусмотренных планом эксперимента.

Некоторые проблемы стратегического планирования

- ***сложность построения плана эксперимента;***
- ***наличие большого количества факторов***;
- ***многокомпонентность функции отклика;***
- ***ограниченность ресурсов проведения эксперимента***.

Этапы стратегического планирования

- **построение структурной модели** осуществляется исходя из того, что должно быть сделано;
- **построение функциональной модели** производится исходя из того, что может быть сделано.

Структурная модель

Структурная модель плана эксперимента характеризуется числом факторов и числом уровней для каждого фактора.

Число элементов эксперимента $N_c = q_1 q_2 \ldots q_k$

где k — число факторов эксперимента;

q_i — число уровней i-го фактора.

Число уровней зависит от предполагаемой функциональной зависимости между откликом и факторами.

Если уровни равноотстоят друг от друга и если $q_i = q_j$ для всех факторов, то получаем ПФЭ q-го порядка.

$$N_c = q^k$$

Функциональная модель

Функциональная модель определяет количество необходимых элементов структурной модели .

Модель полная, если $N_ф = N_с$ (ПФЭ),

Модель неполная, если $N_ф < N_с$ (ДФЭ).

Примеры критериев оптимальности

Оптимальное решение задачи

Быстро ------------------------------ Медленно
Дешево ------------------------------ Дорого
Примерно ------------------------------ Точно

Предложенное решение задачи

Не существует «универсального» критерия оптимальности. Исследователь задает его в процессе планирования работы.

Выбор критерия оптимальности

- Если для каждого из экспериментов, приводящих к желаемому результату, можно оценить величину «затрат», то задача заключается в выборе такого эксперимента, при котором «затраты» минимальны.
- «Стоимостный» подход возможен только в том случае, когда все эксперименты приводят к одинаковой точности результата.

Подбор компонентов функциональной модели

Можно варьировать: количество факторов k,
число уровней q,
количество повторений эксперимента p.

Учитываются: затраты времени на 1 опыт τ,
стоимость опыта c.

Полное число опытов при симметрично повторяемом эксперименте:

$$N = pq^k$$

Общее время, требуемое для проведение эксперимента:

$$T = \tau \cdot N$$

Общие затраты: $C = c \cdot T$

Пример. Стратегия поездки из пункта А в пункт Б

Из пункта А в пункт Б можно попасть разными путями, за разное время, затратив разное количество денег (горючее, амортизация а/м, штрафы, заработок за счет попутных пассажиров). Каждый водитель формирует свой критерий оптимальности, например:

- Экономия денег (аккуратная езда, выбор оптимальной скорости, соблюдение правил, подбор попутчиков) за счет времени;
- Экономия времени (быстрая езда) за счет денег (штрафы, без попутчиков, повышенный износ автомашины), безопасности, душевного спокойствия и комфорта (тряска, рывки).
- Повышение безопасности за счет времени;
- Сохранение душевного спокойствия (избегание улиц с интенсивным движением, строгое выполнение правил) за счет времени и денег (более длинный путь).