Лекция №13

Линейные операторы

▪ Пусть V и W – линейные пространства, размерности которых равны соответственно n и m, т.е. $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{dim}\,\boldsymbol{W} = \mathbf{m}$.

Отображение $A{:}\,V \to W$, сопоставляющее каждому элементу x пространства V некоторой элемент y пространства W, называется оператором из V в W.

<u>Определение.</u> Оператор A, действующий из V в W, называется линейным, если для любых элементов x_1 и x_2 пространства V и любого $\lambda \epsilon R$ выполняется:

1) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;

2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Если пространство W совпадает с пространством V, то линейный оператор, действующий из V в V называется линейным преобразованием пространства V.

Из определения линейного оператора следует, что:

1) $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

2) $A(-\alpha) = -A(\alpha)$.

Примеры линейных операторов:

1. Поворот плоскости на фиксированный угол вокруг начала координат.
2. Проекция плоскости на некоторую прямую, проходящую через начало координат.
3. Операция дифференцирования на множестве многочленом степени $\leq n$.
4. Операция скалярного произведения на фиксированный вектор a пространства R^3 $A(x) = (a, x)$.

Матрица линейного преобразования

- Фиксируем в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ базис $\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \cdots, \boldsymbol{l_n}$. Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ – линейное преобразования, $\boldsymbol{x}$ – произвольный элемент $\boldsymbol{V}$, тогда:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1 l_1} + \cdots + \boldsymbol{x_n l_n} \text{ и}$$

$$\boldsymbol{\varphi(x)} = \boldsymbol{x_1 \varphi(l_1)} + \cdots + \boldsymbol{x_n \varphi(l_n)}$$

$$\boldsymbol{\varphi(l_1)} = \boldsymbol{a_{11} l_1} + \boldsymbol{a_{21} l_2} \ldots + \boldsymbol{a_{n1} l_n}$$

$$\boldsymbol{\varphi(l_2)} = \boldsymbol{a_{12} l_1} + \boldsymbol{a_{22} l_2} \ldots + \boldsymbol{a_{n2} l_n}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\boldsymbol{\varphi(l_n)} = \boldsymbol{a_{1n} l_1} + \boldsymbol{a_{2n} l_2} \ldots + \boldsymbol{a_{nn} l_n}$$

Пусть $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$.

Тогда

$$\left(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l_1}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l_2}), \dots, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l_n})\right) = (\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_n})A$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l_1}), \dots, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l_n})\right) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{l_1}, \dots, \boldsymbol{l_n}) \cdot A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ – называется матрицей линейного преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $\boldsymbol{l_1}, \dots, \boldsymbol{l_n}$.

Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису

- Пусть $\boldsymbol{V}$ – линейное пространство, $\boldsymbol{\varphi}$ – линейное преобразование $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$.

$\boldsymbol{l_1}, \dots, \boldsymbol{l_n}$ - базис в $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{l'_1}, \dots, \boldsymbol{l'_n}$ - базис в $\boldsymbol{V}$.

Пусть

$$\boldsymbol{l'_1 = C_{11}l_1 + C_{21}l_2 + C_{n1}l_n}$$

$$\boldsymbol{l'_2 = C_{12}l_1 + C_{22}l_2 + C_{n2}l_n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\boldsymbol{l'_n = C_{1n}l_1 + C_{2n}l_2 + C_{nn}l_n}$$

т.е. $(\boldsymbol{l'_1}, \boldsymbol{l'_2}, \dots, \boldsymbol{l'_n}) = (\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, \dots, \boldsymbol{l_n}) \cdot \mathbf{C}$

где $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ - матрица перехода от базиса $\{\boldsymbol{l}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{l}'_i\}$ $\boldsymbol{rang}\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{n}$, т.к. $\boldsymbol{l}'_1, \dots, \boldsymbol{l}'_n$ - линейно независимы. Поэтому существует $\boldsymbol{C}^{-1}$ и

$$(\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_n) = (\boldsymbol{l}'_1, \dots, \boldsymbol{l}'_n)\boldsymbol{C}^{-1}$$

Теорема 1. Матрица $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ линейного преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ в базисах $\{\boldsymbol{l}_i\}$ и $\{\boldsymbol{l}'_i\}$ линейного пространства V связаны соотношением

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}, \text{ где}$$

$\boldsymbol{C}$ – матрица перехода от базиса $\{\boldsymbol{l}_i\}$ к базису $\{\boldsymbol{l}'_i\}$.

Определение. Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются подобными, если существует невырожденная матрица Q такая, что

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}.$$

Пример 1. Линейное преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ переводит базисный вектор $\boldsymbol{l_1}$ в вектор $\boldsymbol{l_1 + 2l_2}$, а вектор $\boldsymbol{l_2}$ в вектор $\boldsymbol{2l_1 - 3l_2}$.

Пусть также $\boldsymbol{l'_1 = l_1 + l_2}$ и $\boldsymbol{l'_2 = 2l_1 + 3l_2}$.

Требуется:

1) найти матрицу $\boldsymbol{A}$ преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $\{\boldsymbol{l_i}\}$;
2) найти координаты вектора $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l'_1})$ в базисе $\{\boldsymbol{l_i}\}$;
3) найти матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{l_i}\}$ к базису $\{\boldsymbol{l'_i}\}$;
4) найти матрицу $\boldsymbol{B}$ преобразования $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $\{\boldsymbol{l'_i}\}$.