Повторение курса алгебры

НОД и НОК

НОД — это наибольший общий делитель.
НОК — это наименьшее общее кратное.
Пример:
Например, найдём НОД для чисел 28 и 16. В первую очередь, раскладываем эти числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Получили два разложения $2 \times 2 \times 7$ и $2 \times 2 \times 2 \times 2$
Берем только повторяющие множители в первом и втором разложении.

$$2 \times 2 = 4$$

Теперь перемножаем оставшиеся множители и получаем НОД:
Число 4 является наибольшим общим делителем чисел 28 и 16. Оба этих числа делятся на 4 без остатка:
28 : 4 = 7
16 : 4 = 4

НОД (28 и 16) = 4

НОД и НОК

Пример:

Найдём НОК для чисел 9 и 12.

Разложим на множители число 9:

9	3
3	3
1	

$\Rightarrow$ 3×3

Разложим на множители число 12

12	2
6	2
3	3
1	

$\Rightarrow$ $2 \times 2 \times 3$

Выпишем первое разложение: **3 × 3**

Теперь допишем множители из второго разложения, которых нет первом разложении. В первом разложении нет двух двоек. Их и допишем: **3 × 3 × 2 × 2**

Теперь перемножаем эти множители:

3 × 3 × 2 × 2 = 36

Получили ответ 36. Значит наименьшее общее кратное для чисел 9 и 12 это число 36.

НОК (9 и 12) = 36

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где ($a \neq 0$), **x** — неизвестное.
Приведенное квадратное уравнение — уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, ($a = 1$).

Решение неполных квадратных уравнений

$ax^2 + bx = 0, a\neq0, b\neq0$

Вынесем общий множитель x за скобки.

Мы получим $x(ax+b)=0$.

Получим $x=0$ и $x=-\frac{b}{a}$.

Пример 1.

$$3x^2-12x=0$$

Разложим левую часть уравнения на множители и найдем корни:

$$3x^2-12x=0 \Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0; \\ x-4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; \\ x=4. \end{cases}$$

$ax^2 + c = 0, a\neq0, c\neq0$

Для решения данного неполного квадратного уравнения **выразим** x^2.

$$ax^2+c=0 \Leftrightarrow ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}.$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}};$$

Пример 2.

$$3x^2-48=0$$

$$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm4.$$

$ax^2 = 0, a\neq0$

Разделим обе части уравнения на a, мы получим $x^2=0$, $x=0$. Таким образом, данное квадратное уравнение имеет один корень $x=0$. В этому случае говорят, что квадратное уравнение имеет двукратный корень $x=0$.

Решение полного квадратного уравнения

Найдем решение полного квадратного уравнения **$ax^2 + bx + c = 0$**.

Решение с помощью дискриминанта

Дискриминантом квадратного уравнения D называется выражение **$b^2 — 4ac$**.

При решении уравнения с помощью дискриминанта возможны три случая:

1. **D > 0**. Тогда корни уравнения равны:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

2. **D = 0**. В данном случае решение даёт два двукратных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

3. **D < 0**. В этом случае уравнение **не имеет решения**.

Теорема Виета

Теорема Виета — сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна $-p$, а произведение корней равно q.

Обратная теорема — если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна p, а произведение этих числе равно q, то числа x_1 и x_2являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + 7x + 10 = 0$.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 - корни заданного уравнения. Тогда по теореме Виета $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = -7. \end{cases}$ Заметим, что произведение – положительное, а сумма – отрицательное число. Значит, оба корня – отрицательные числа. Подбираем пары множителей, дающих произведение 10 (-1 и -10; -2 и -5). Вторая пара чисел в сумме дает -7. Значит, числа -2 и -5 являются корнями данного уравнения.

Ответ: -2; -5.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен — многочлен вида $ax^2 + bx + c = 0$, где **x** — переменная, **a,b,c** — некоторые числа.

Значения переменной x, которые обращают квадратный трехчлен в нуль, называются корнями трехчлена. Следовательно, корни трехчлена — это корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Теорема. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1, x_2, то его можно записать в виде: $x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Пример 3.

Разложим на множители квадратный трехчлен: $2x^2+5x-3$

Сначала решим квадратное уравнение:

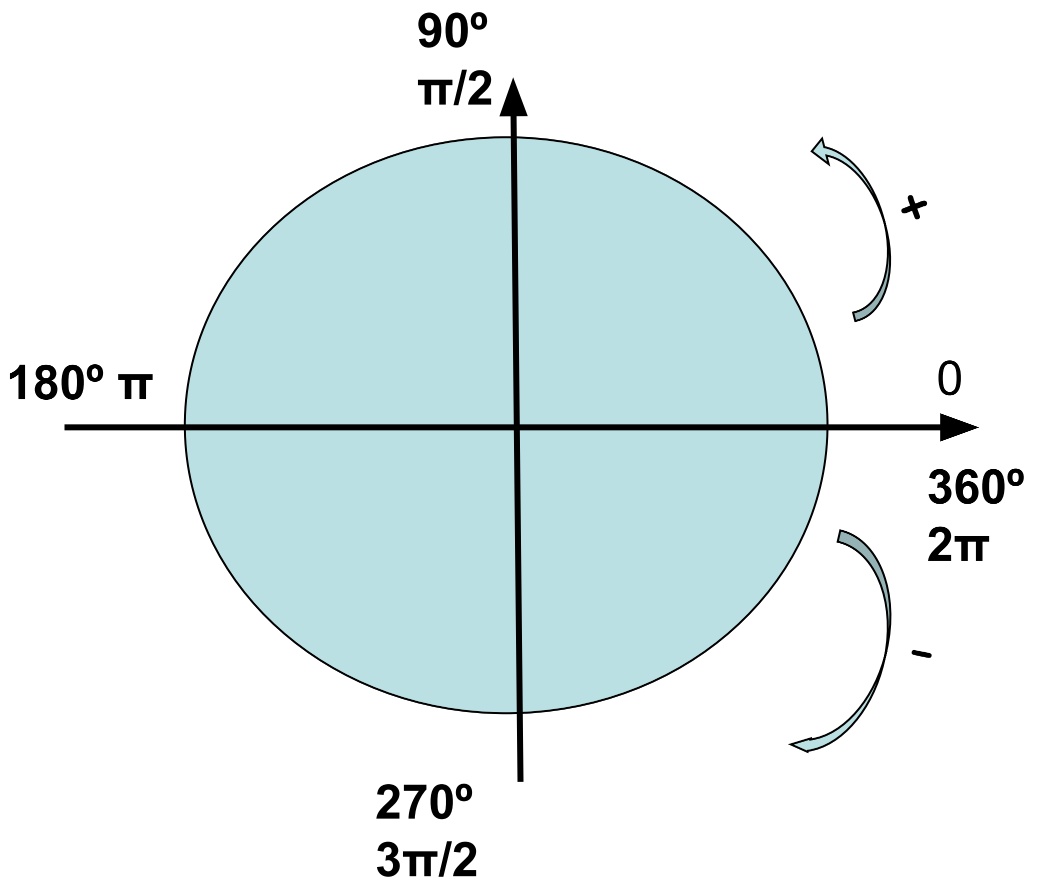
$$2x^2+5x-3=0. \quad x_{1-2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm7}{4}$$

Получим: $x_1=0.5$ и $x_2=-3$

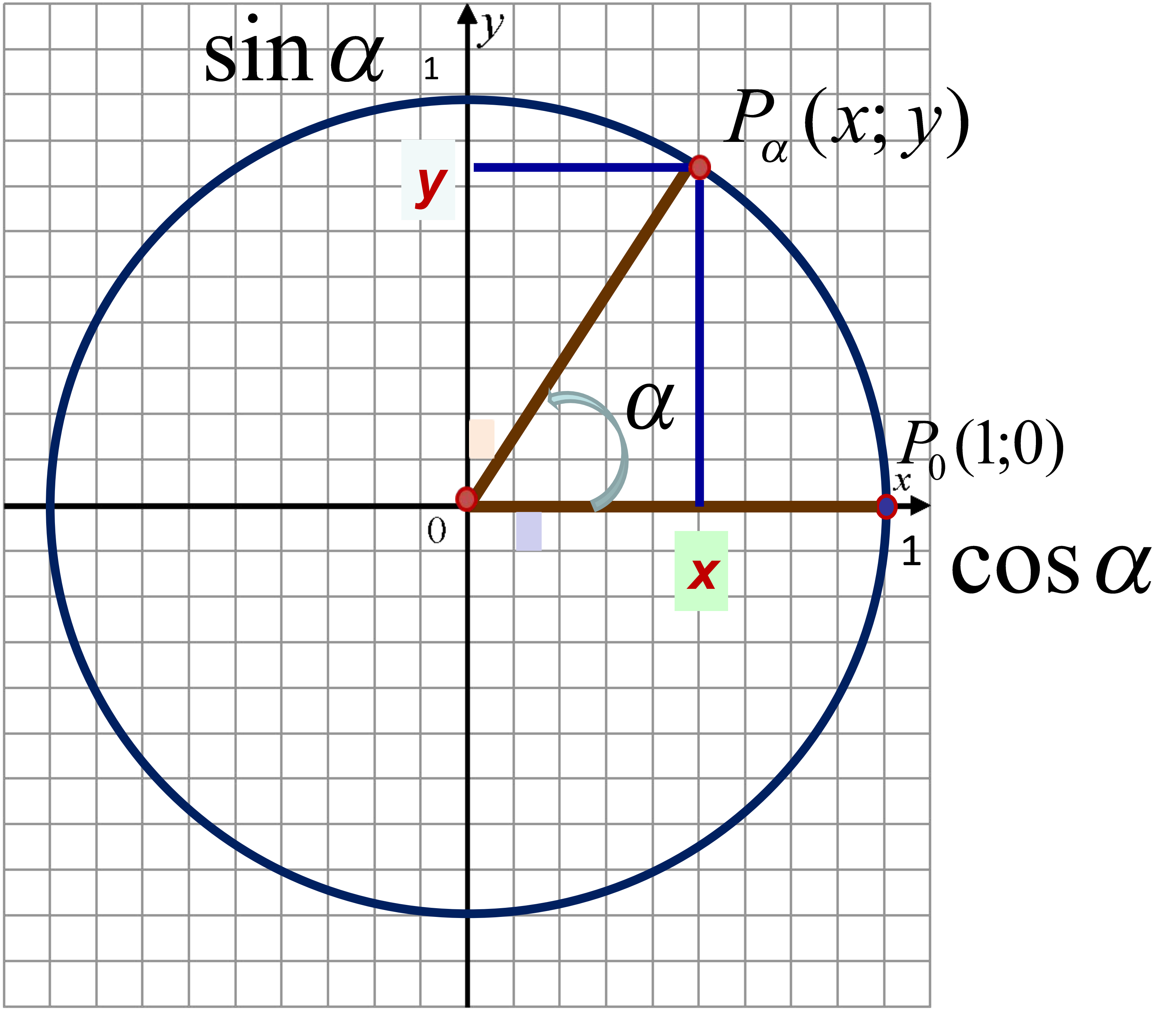
Теперь можно записать разложение данного квадратного трехчлена на множители: $2x^2+5x-3=2(x-0{,}5)(x+3)$.

Тригонометрия

Тригонометрический круг



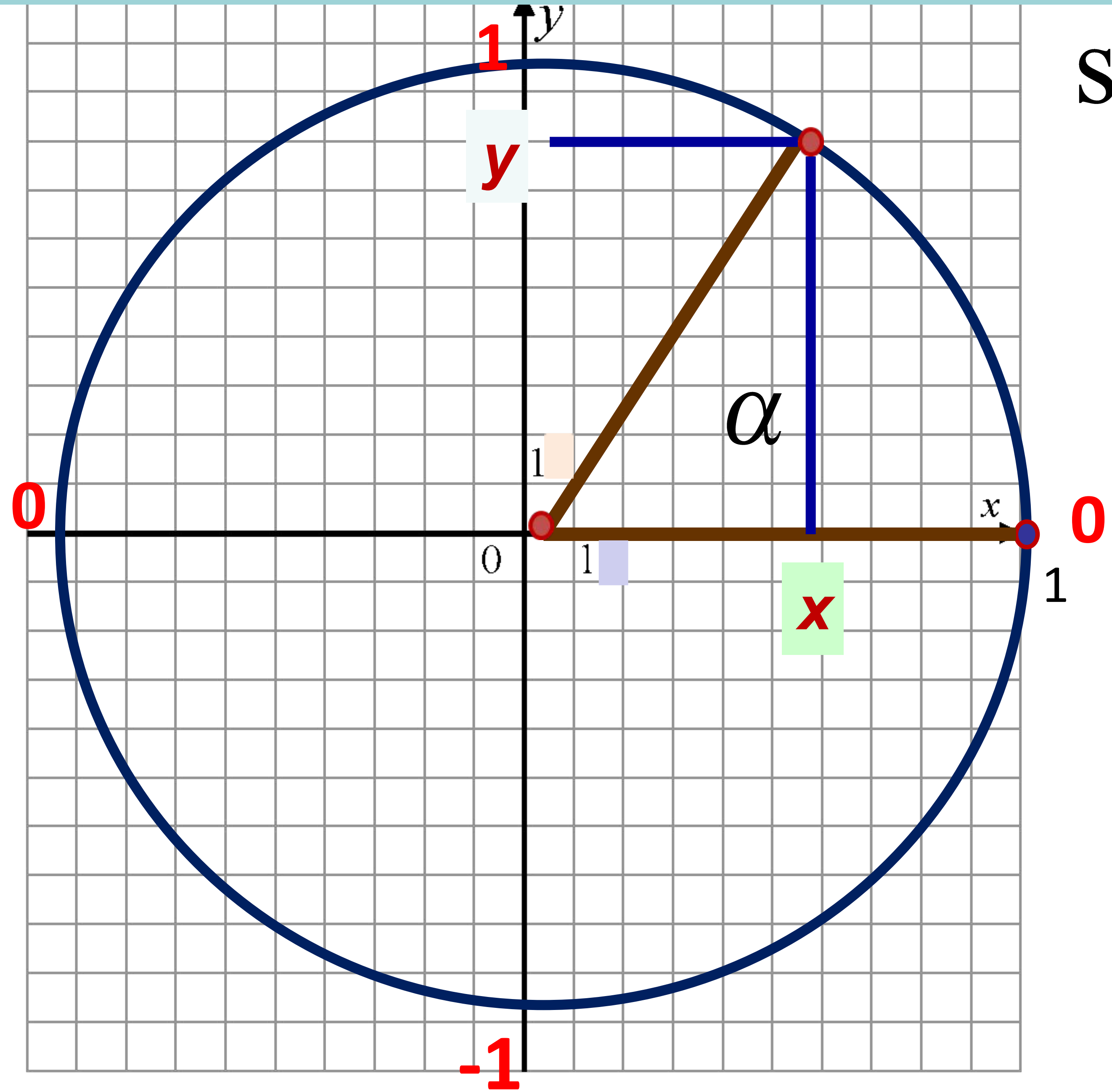
π = 180 °



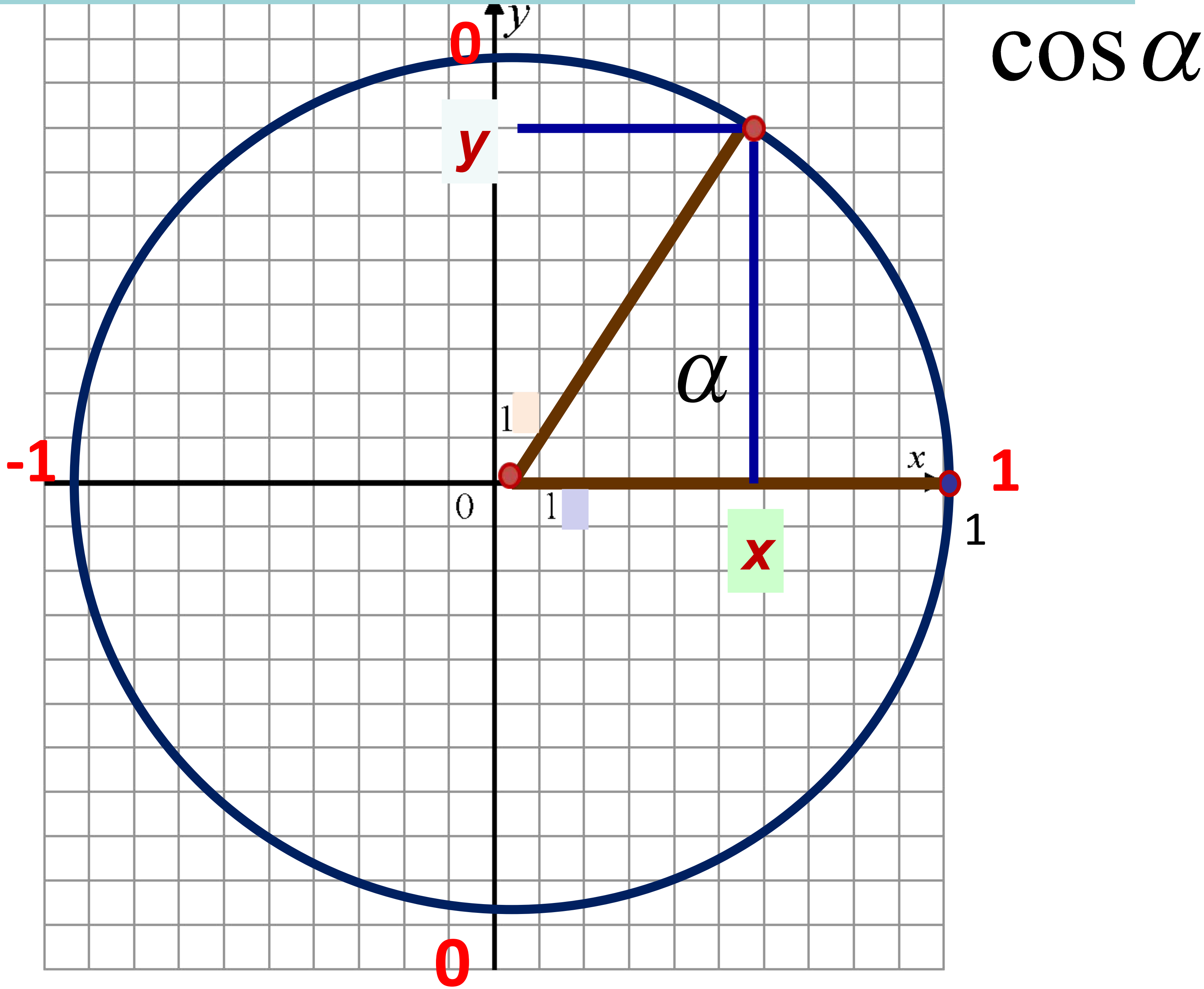
$\sin\alpha$
1
y
$P_\alpha(x; y)$
y
α
$P_0(1;0)$
x
0
1
x
$\cos\alpha$

Значение синуса в ключевых точках

$\sin\alpha$



Значение косинуса в ключевых точках



Ключевые точки на

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	0	-	0	-

Знаки по четвертям

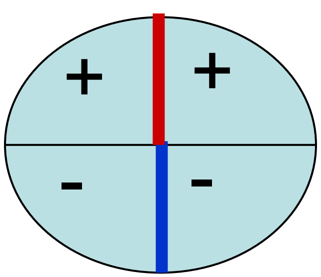
Синус: знаки соответствуют знакам по оси У,

Косинус: знаки соответствуют знакам по оси Х

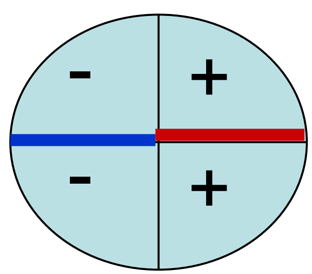
Тангенс и котангенс:

в 1 четверти знак плюс, далее знаки чередуются

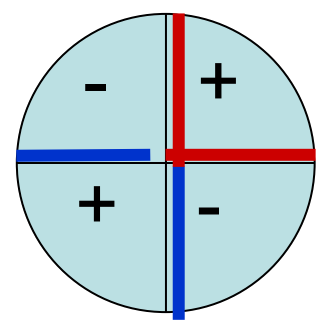
Sin



Cos



tg, ctg



Градусная мера угла в радианах

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot n \text{ рад}$$

- Радианная мера угла в градусах?

$$\alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} . \alpha^\circ$$

Таблица

Функция	Значения				
	0 0°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Четность, нечетность тригонометрических функций

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ tg(-\alpha) &= -tg\alpha \\ ctg(-\alpha) &= -ctg\alpha \end{aligned}}$$

Нечетные функции

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

Четная функция

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

5. $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\boldsymbol{Z}$

6. $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};\qquad \alpha,\beta\neq\pi n,\ \ n\in\boldsymbol{Z}$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

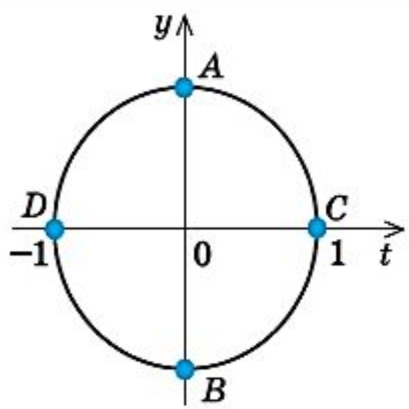
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

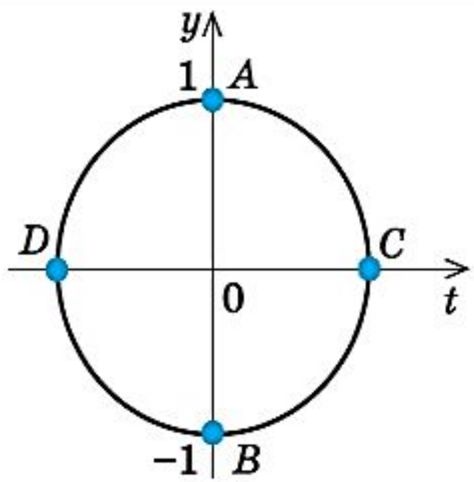
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Решения	Примеры
$\cos x = a$ $\lvert a\rvert > 1$: **Корней нет** $\lvert a\rvert \leqslant 1$: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$ ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}.$ Корней нет, поскольку $\sqrt{3} > 1.$ ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$	
	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ $\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in Z$ $\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Решения	Примеры
$\sin x = a$ $\lvert a \rvert > 1$: Корней нет $\lvert a \rvert \leqslant 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	1. ▶ $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z.$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁ 2. ▶ $\sin x = \sqrt{3}$. Корней нет, так как $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$	
	$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in Z$ $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{tg}\, x = a \\ x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\mathrm{tg}\, x = 0 \\ x = \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\mathrm{tg}\, x = 1$ ▶ $x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n,\ n \in Z.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Формула	Пример
$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{ctg}\, x = a \\ x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$ Частный случай $\boxed{\begin{gathered}\mathrm{ctg}\, x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\end{gathered}}$	$\mathrm{ctg}\, x = 7$ ▶ $x = \mathrm{arcctg}\, 7 + \pi n,\ n \in Z.$ ◁

Тригонометрические уравнения, решаемые вынесением за скобки….

$\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

$\cos x(\cos x - 2) = 0.$

$\cos x = 0$ или $\cos x - 2 = 0.$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение

▶ Пусть $\sin x = t$, тогда получаем:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{2}$,

   тогда $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◁

Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным

$6\cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$.

$6(1-\sin^2 x) + 5 \sin x - 7 = 0$.

$6\sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Далее применяем формулу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Однородные тригонометрические уравнения 1 степени

$\sin x - 2\cos x = 0$..

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Однородные тригонометрические уравнения 2 степени

$$\sin^2 x - 6 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 0.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Степени и корни

Свойства корней n-й степени

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = a, если\ \ a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = -a, если\ \ a < 0$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|,\ если\ \ n - четное$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a,\ если\ \ n - нечетное$$

Решение иррациональных уравнений

1) $\sqrt[2n]{f(x)} = a, \quad a = const \langle\ 0,$ решений нет

2) $\sqrt[2n]{f(x)} = a, \quad a = const \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}$

3) $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi^{2n}(x), \\ \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$

4) $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geq 0 \text{ или } \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$

Решение иррациональных уравнений

1) $\sqrt[2n]{f(x)} = a, \quad a = const \langle\ 0,$ решений нет

2) $\sqrt[2n]{f(x)} = a, \quad a = const \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}$

3) $$\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi^{2n}(x), \\ \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$$

4) $$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) \geq 0 \text{ или } \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{2x+6} = 2x;$$

возведем в квадрат обе части уравнения, чтобы избавиться от знака корня;

$$(\sqrt{2x+6})^2 = (2x)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x + 6 = 4x^2;$$

перенесем $2x + 6$ *в правую часть уравнения изменив знак;*

$$0 = 4x^2 - 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 2x - 6 = 0;$$

найдем корни квадратного уравнения $4x^2 - 2x - 6 = 0;$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 100;$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{100}}{2 \cdot 4} = 1,5;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{100}}{2 \cdot 4} = -1;$$

Проверка:

$$x_1 = 1,5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2 \cdot 1,5 + 6} = 2 \cdot 1,5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = 3;$$

$$x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2 \cdot (-1) + 6} = 2 \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4} = -2 \quad \Rightarrow \quad 2 \neq -2$$

Ответ: $x = 1,5.$

Пример 1: Решить уравнение $\sqrt{x-1}=3-x$

$$\sqrt{x-1}=3-x$$

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(3-x)^2$$

$$x-1=9-6x+x^2$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$x_1=2,\ \ x_2=5$$

Проверка: $x_1=2$

$\sqrt{2-1}=3-2$ - верно

$$x_2=5$$

$\sqrt{5-1}\neq 3-5$ – неверно

Ответ: $x=2$

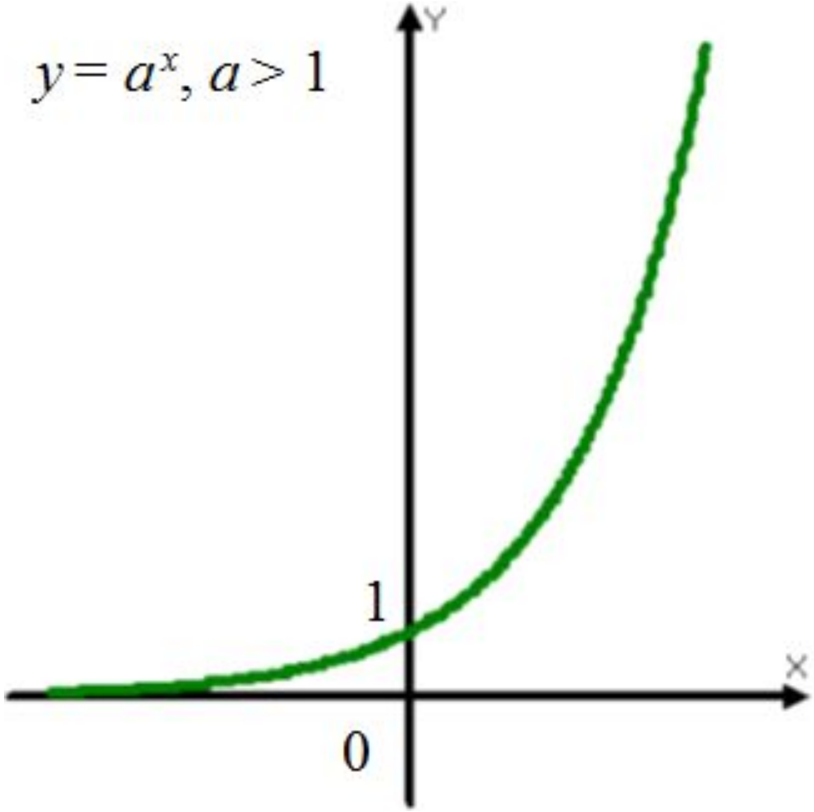
Пример 2: Решить уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$

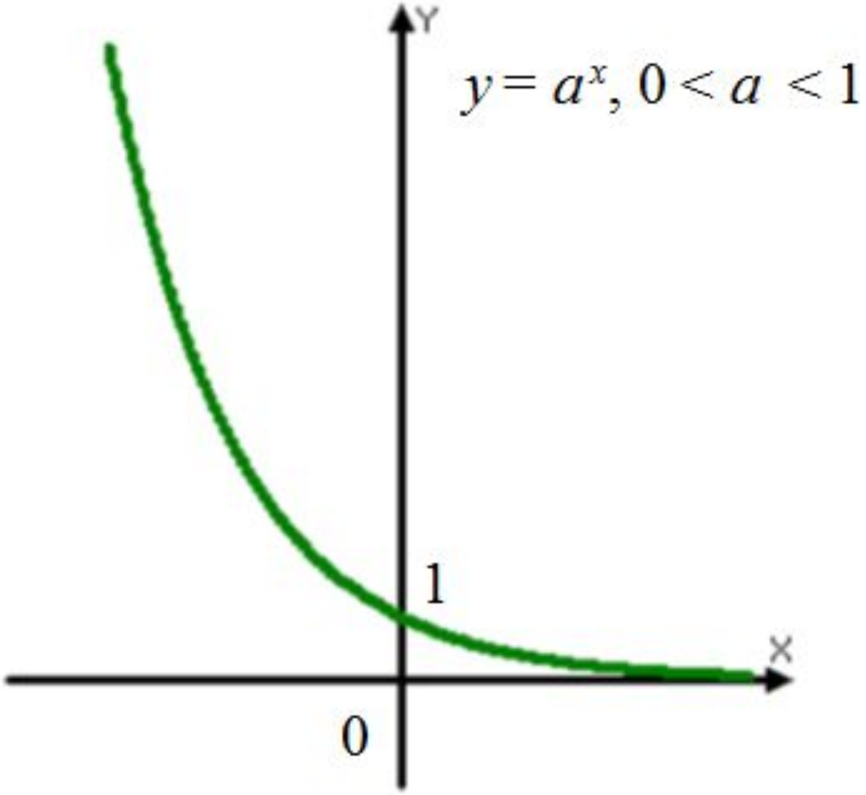
$$\sqrt{x-2}=x-8$$

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2 \\ x-8\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=11$$

Ответ: $x=11$

Показательная фукция





Показательные уравнения

.

1) $a^{f(x)}=1 \Rightarrow a^{f(x)}=a^{0} \Rightarrow f(x)=0$

$2^{x+1}=1, \quad 2^{x+1}=2^{0}, \ x+1=0......$

2) $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$

$2^{x+1}=2^{x^{2}-2}, \quad x+1=x^{2}-2......$

Показательные уравнения

3) ***Вынесение за скобки общего множителя***

$$2^{x+2} - 2^{x} = 12, \qquad 2^{x}(2^{2} - 1) = 12.....$$

4) ***Приведение к квадратному уравнению***

$$4^{x} - 3 \cdot 2^{x} + 4 = 0, \qquad 2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 4 = 0,$$

$$\textit{Пусть } 2^{x} = t, \textit{ тогда....}$$

Показательные уравнения

5) ***Однородные уравнения***

$$5\cdot 4^x - 3\cdot 6^x + 9^x = 0, \qquad ,$$

Делим обе части на 4^x *или на* 9^x

Плучаем…уравнение..квадратное…

Показательные уравнения

6) $2^{x+2} - 2^{2-x} = 15$

$$2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} - 15 = 0$$

$$4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} - 15 = 0$$

$$Пусть\, 2^x = t, тогда$$

$$4 \cdot t - \frac{4}{t} - 15 = 0 \mid \cdot t$$

$$4t^2 - 15t - 4 = 0......$$

Показательные неравенства

1) $a^{f(x)} > a^{g(x)}$,

$$\text{если } 0 < a < 1, \text{ то } f(x) < g(x)$$

$$0{,}2^{x+1} \le 0{,}2^{x^2-2}$$

$$\text{Так как } 0{,}2 < 1, \text{ то}$$

$$x + 1 \ge x^2 - 2\ldots\ldots$$

Показательные неравенства

1) $$a^{f(x)} \rangle a^{g(x)},$$

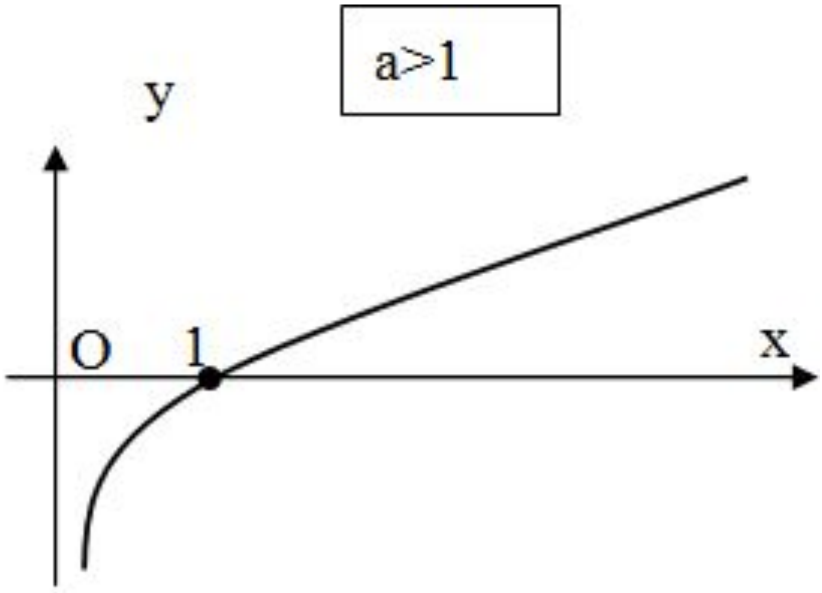
$$если\ a \rangle 1,\ то\ f(x) \rangle g(x)$$

$$2^{x+1} \le 2^{x^2-2}$$

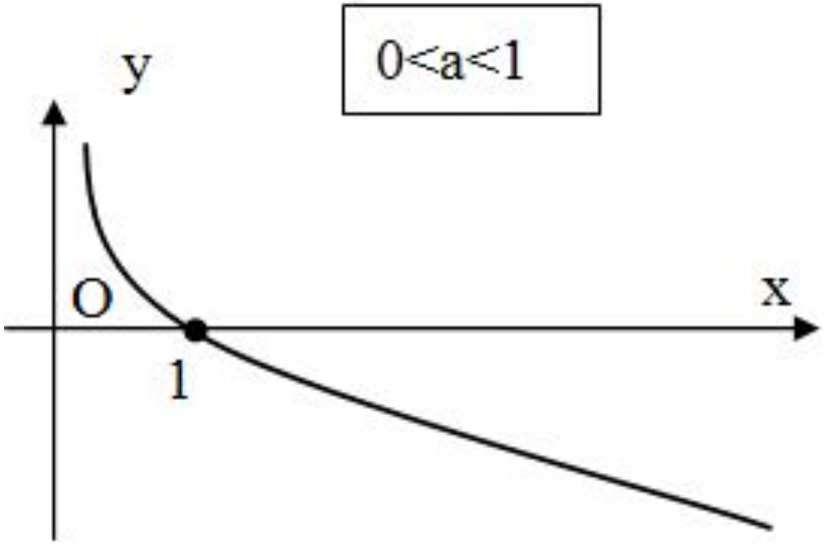
$$Так\ как\ 2 \rangle 1,\ то$$

$$x+1 \le x^2-2......$$

Логарифмическая функция



$$y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$$



Основные свойства логарифмов

$$1.\ \log_a 1 = 0$$

$$2.\ \log_a a = 1$$

$$3.\ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$4.\ \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5.\ \log_a x^p = p \log_a x$$

$$6.\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$7.\log_{a\,\mathrm{g}} x = \frac{1}{g} \log_a x$$

$$8.\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Логарифмические уравнения

1) $$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_2(x+4) = 5 \Leftrightarrow x+4 = 2^5......$$

2) $$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \rangle\ 0 \textit{ или } g(x) \rangle\ 0 \end{cases}$$

$$\log_2(x+4) = \log_2(x^2-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = x^2 - 1 \\ x+4 \rangle\ 0..... \end{cases}$$

3) *Приведение к квадратному уравнению*

$$\log_2^2 x + 5\log_2 x - 4 = 0$$

$$\textit{Пусть } \log_2 x = t......$$

4) *Применение свойств логарифмов*

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x),$$

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a h(x),$$

$$\begin{cases} f(x)g(x) = h(x) \\ f(x) \rangle 0 \\ g(x) \rangle 0 \\ h(x) \rangle 0...... \end{cases}$$

Логарифмические уравнения

5)

$$\log_{g(x)} f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^a \\ g(x) \rangle\, 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_x (x+4) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x^2 \\ x \rangle\, 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

$$\log_a f(x) \rangle \log_a g(x) \Rightarrow$$

$$Если\ a \rangle 1,\ то\ f(x) \rangle g(x)$$

$$\log_2(x+4) \rangle \log_2(x^2-1) \Rightarrow \begin{cases} x+4 \rangle x^2-1 \\ x^2-1 \rangle 0.... \end{cases}$$

(обязательно проверяем меньшее в системе…)

Логарифмические неравенства

$$\log_a f(x) \rangle \log_a g(x) \Rightarrow$$

$$Если\ 0 \langle a \langle 1,\ то\ f(x) \langle g(x)$$

$$\log_{\frac{2}{3}}(x+4) \rangle \log_{\frac{2}{3}}(x^2-1) \Rightarrow \begin{cases} x+4 \langle x^2-1 \\ x+4 \rangle 0.... \end{cases}$$

(обязательно проверяем меньшее в системе…)

Логарифмические неравенства

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{\textit{или}} \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$