Полярная система координат.

Полярная система координат на плоскости определяется заданием некоторой точки O, луча, исходящего из этой точки, и единицы масштаба l (рис. 1). Точка O называется *полюсом*, а луч - *полярной осью*.

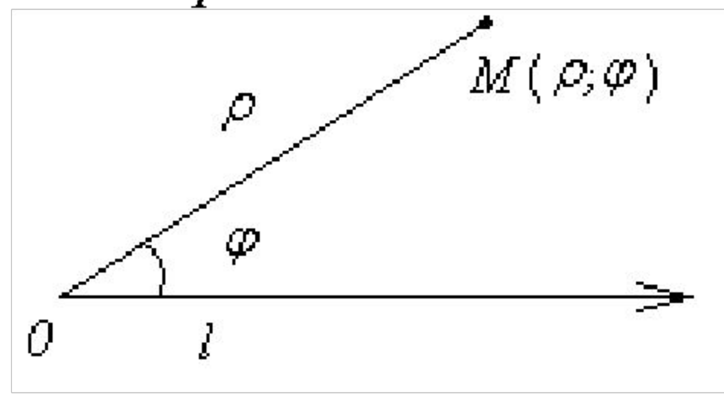


Рис.1

Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим через ρ и φ ее расстояние от полюса и угол, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки до направления OM.

Эти числа называются полярными координатами точки M, причем величина ρ называется полярным радиусом, а φ- полярным углом точки M.

По самому своему определению величина ρ положительная. Задание пары чисел (ρ, φ) однозначно определяет точку M на плоскости. Между полярными (ρ, φ) и декартовыми (x, y) координатами в случае, если начало координат совмещено с полюсом, а ось Ox идет по полярной оси, имеются следующие соотношения:

$$x = \rho \cos \varphi, \;\; y = \rho \sin \varphi \qquad (1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \; tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Полярные уравнения линий.

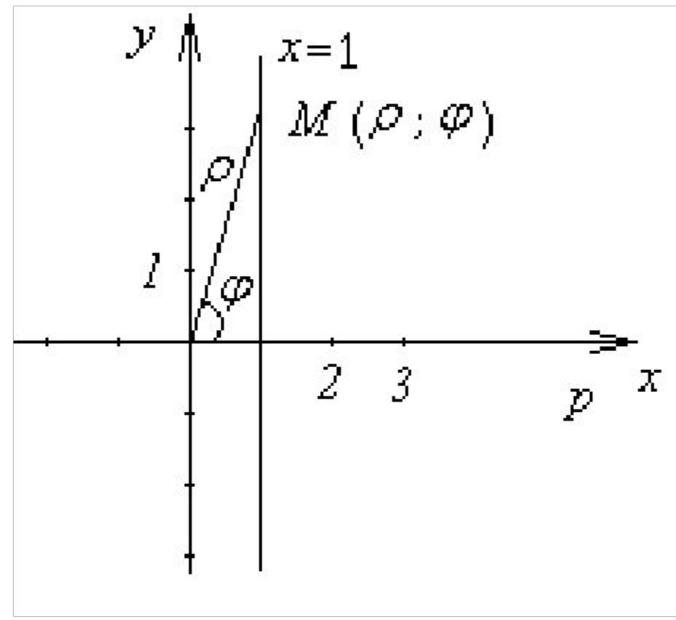
В полярных координатах линия задается уравнением $\Phi(\rho,\varphi)=0$, связывающим полярные координаты ее текущей точки. Если возможно, это уравнение разрешают обычно относительно ρ, и тогда полярное уравнение линии принимает вид $\rho=\rho(\varphi)$. Если функция $\rho(\varphi)$ непериодическая, то углу φ, обычно, придают все возможные для данной функции значения, не ограничиваясь изменением его только в пределах первого периода.

Чтобы перейти от уравнения линии $F(x,y)=0$ в декартовых координатах к ее полярному уравнению, нужно подставить в декартово уравнение вместо x, y их выражения из формулы (1). Обратный переход от полярного уравнения $\Phi(\rho,\varphi)=0$ к декартову уравнению той же линии осуществляется с помощью формул (2).

Пример. Найти полярной уравнение прямой $x=1$.

Решение: Используя первую из формул (1), найдем, что на данной прямой полярные координаты связаны условием $\rho\cos\varphi=1$, или $\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

Это и есть уравнение данной прямой. Поскольку ρ- величина положительная, угол φ должен меняться так, чтобы $\cos\varphi$ был положителен, т.е. находиться в I и IV четвертях.

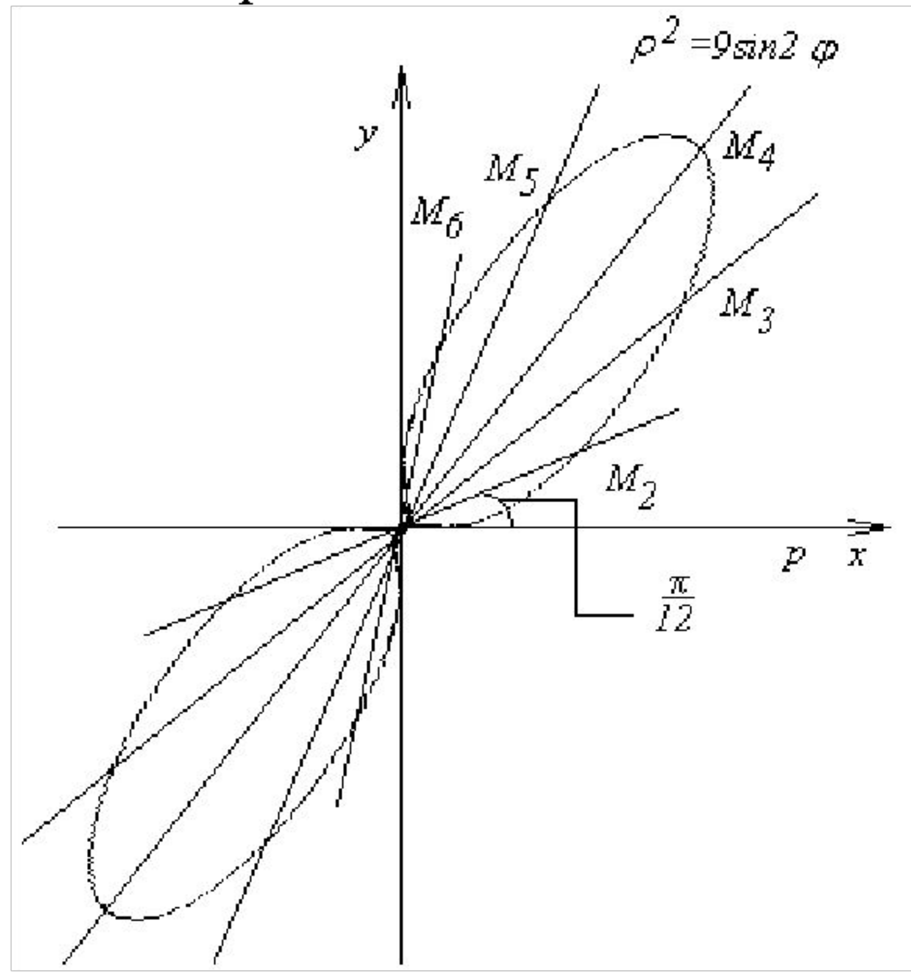


Пример. Дано полярное уравнение линии $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$. Построить эту линию по точкам, задавая углу φ значения через промежуток $\frac{\pi}{12}$. Найти ее декартово уравнение, расположив декартовы оси так, как показано на рис. 2.

Решение: Поскольку левая часть данного уравнения неотрицательна, то угол φ может изменяться только в тех пределах, для которых $\sin 2\varphi \geq 0$, т.е. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Для вычисления значений ρ (ограничиваясь точностью 0,01) составляем следующую таблицу:

№ точек	φ	2φ	$\sin 2\varphi$	$Q=3\sqrt{\sin 2\varphi}$
1	0	0	0	0
2	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	0,50	2,12
3	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0,87	2,79
4	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	3
5	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	0,87	2,79
6	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	0,50	2,12
7	$\frac{\pi}{2}$	π	0	0

При изменении угла φ в пределах III четверти $\sin 2\varphi$ будет принимать те же значения, что и в I четверти.



Поэтому линия будет симметрично расположена относительно начала координат. Для ее построения проводим из полюса лучи, соответствующие выбранным значениям φ, и на каждом луче откладываем вычисленные значения полярного радиуса. Полученные точки соединяем плавной кривой. Построенная линия носит название лемнискаты Бернулли. Уравнение в декартовых координатах $\left(x^2+y^2\right)^2=18xy$.

Параметрические уравнения кривой. Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на некотором промежутке I числовой оси (промежуток I может быть интервалом (a,b), отрезком $[a,b]$, а также одним из полуинтервалов $(a,b]$ или $[a,b)$, причем не исключаются случаи, когда $a=-\infty$ и (или) $b=+\infty$). Уравнения

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ t\in I \qquad (3)$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой Γ в декартовой прямоугольной системе координат, если выполнено следующее условие: для всякого значения *параметра* $t\in I$ точка $M(\varphi(t),\psi(t))$ принадлежит кривой Γ и, наоборот, для всякой точки $M(x,y)$ кривой Γ существует такое значение параметра $t\in I$, что $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Исключением параметра t из (3) уравнение кривой может быть представлено в виде $F(x,y)=0$.

Аналогично определяются параметрические уравнения кривой в полярных координатах.

Пример. Показать, что параметрические уравнения

$$x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi),$$

определяют окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение: Если точка $M(x, y)$ такова, что $x = a\cos t$ и $y = a\sin t$ для некоторого значения $t \in [0, 2\pi)$, то

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2,$$

т.е. точка $M(x, y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Верно и обратное: если точка $M(x, y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = a^2$, то, полагая $t = (\overline{OM}, i)$, $t \in [0, 2\pi)$, получим $x = a\cos t$ и $y = a\sin t$.

Пример. Кривая Г задана полярным уравнением $r = 2R\sin\varphi$. Составить параметрические уравнения этой кривой в полярных и декартовых прямоугольных координатах, выбирая в качестве параметра полярный угол φ.

Решение: Нетрудно убедиться, что заданная кривая-окружность радиуса R с центром в точке $C(0, R)$. Параметрические уравнения этой кривой в полярных координатах:

$$r = 2R\sin t,\ \varphi = t,\ t \in [0, \pi).$$

Параметрические уравнения в декартовых прямоугольных координатах получаются, если в формулы перехода $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ вместо r и φ подставить их выражения в виде функций параметра t.

В итоге получим:

$$\begin{cases} x = r(t)\cos\varphi(t) = R\sin 2t, \\ y = r(t)\sin\varphi(t) = R(1 - \cos 2t), t \in [0, \pi). \end{cases}$$