Производная и дифференциал.

Техника дифференцирования элементарных функций.

$$c' = 0, \quad c = const$$

$$x' = 1$$

$$(kx + b)' = k$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования.

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(c \cdot u(x)\right)' = c \cdot u'(x)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(uvw\right)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

1.Применение формул и правил дифференцирования.

1. Продифференцировать функцию: $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$

$$y' = \left(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3\right)' = \left(2x^3\right)' - \left(4x^2\right)' + (5x)' - 3' =$$

$$= 2 \cdot \left(x^3\right)' - 4 \cdot \left(x^2\right)' + 5 \cdot x' - 0 = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 =$$

$$= 6x^2 - 8x + 5$$

2. Продифференцировать функцию: $y=(2x+3)\cdot\sin x$

$$y'=[(2x+3)\cdot\sin x]'=(2x+3)'\sin x+(2x+3)\cdot(\sin x)'=$$

$$=\left[(2x)'+3'\right]\cdot\sin x+(2x+3)\cdot\cos x=(2+0)\cdot\sin x+(2x+3)\cdot\cos x=$$

$$=2\sin x+(2x+3)\cdot\cos x$$

3. Продифференцировать функцию: $y=\sqrt{x}\cdot\cos x\cdot\ln x$

$$y'=\left(\sqrt{x}\cdot\cos x\cdot\ln x\right)'=$$

$$=\left(\sqrt{x}\right)'\cos x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\cos x)'\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\cos x\cdot(\ln x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(-\sin x)\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\cos x\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\ln x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\sin x\cdot\ln x+\frac{\sqrt{x}\cdot\cos x}{x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\sin x\cdot\ln x=\frac{(2+\ln x)\cdot\cos x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\sin x\cdot\ln x$$

4. Продифференцировать функцию: $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$

$$y' = \left(\frac{x^3}{\cos x}\right)' = \frac{\left(x^3\right)' \cos x + x^3 \cdot \left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cos x + x^3 \left(-\sin x\right)}{\cos^2 x} = \frac{x^2 \left(3\cos x - x \cdot \sin x\right)}{\cos^2 x}$$

5. Продифференцировать функцию: $y = \dfrac{\tan x}{7}$

$$y' = \left(\frac{\tan x}{7}\right)' = \left(\frac{1}{7} \cdot \tan x\right)' = \frac{1}{7} \cdot (\tan x)' = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{7\cos^2 x}$$

6. Продифференцировать функцию: $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

$$y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{7}{6}}$$

$$y' = \left(2x^{\frac{7}{6}}\right)' = 2 \cdot \left(x^{\frac{7}{6}}\right)' = 2 \cdot \frac{7}{6} x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt[6]{x}$$

7. Продифференцировать функцию: $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}} = 4 \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$y' = \left(4 \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 4 \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= -\frac{8}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}} = -\frac{8}{3x \cdot \sqrt[5]{x^2}}$$

2.Применение формул и правил дифференцирования.

8. Продифференцировать функцию:

$$y = 5^x + \arcsin x + \arctan x - 3arc\cot x$$

$$y' = \left(5^x + \arcsin x + \arctan x - 3arc\cot x\right)' =$$

$$= \left(5^x\right)' + \left(\arcsin x\right)' + \left(\arctan x\right)' - 3 \cdot \left(arc\cot x\right)' =$$

$$= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{1+x^2} =$$

$$= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2}$$

9. Продифференцировать функцию: $y = x \cdot \arccos x$

$$y' = (x \cdot \arccos x)' = x' \arccos x + x \cdot (\arccos x)' =$$

$$= 1 \cdot \arccos x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

10. Продифференцировать функцию: $y=\frac{1}{x}+\frac{1+e^x}{1-e^x}$

$$y'=\left(\frac{1}{x}+\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{\left(1+e^x\right)'\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\cdot\left(1-e^x\right)'}{\left(1-e^x\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{e^x\left(1-e^x\right)-\left(1+e^x\right)\cdot\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{e^x\left(1-e^x\right)+e^x\left(1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{e^x\left(1-e^x+1+e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}$$

Производная от сложной функции.

Функция, заданная в виде y=f(g(x)),называется сложной функцией, составленной из функций g и f, или суперпозицией функций g и f. (функция, аргументом которой служит функция, называется сложной)

элементарная функция ***сложная функция***

$$y = \sin x \qquad\qquad y = \sin\left(x^2 - x\right)$$

аргумент

элементарная функция	***сложная функция***
$y = x^3$	$y = (4x - 1)^3$
$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{\underbrace{1 + x^2}}$
$y = \ln x$	$y = \ln(2x + 3)$

Теорема:

Если функция $f(u)$ дифференцируема по u, а функция $u(x)$ дифференцируема по x, то производная сложной функции $y=f(u(x))$ по независимой переменной x определяется равенством

$$y'(x) = f'(u)\,u'(x)$$

или

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Доказательство:

Пусть дана функция $y=f(u(x))$.

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta x \cdot \Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Примеры.

Вычислить производные для функций:

1) $y = \left(x^3 - 4x + 1\right)^3$

$$y = u^3, \qquad u = x^3 - 4x + 1$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(u^3\right)' \cdot \left(x^3 - 4x + 1\right)' = 3u^2 \cdot \left(3x^2 - 4\right) =$$

$$= 3\left(x^3 - 4x + 1\right)^2 \left(3x^2 - 4\right)$$

$$2)\quad y=\ln\sqrt[3]{\cos^2 4x}$$

$$\boxed{y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x}$$

$$y=\ln\sqrt[3]{\cos^2 4x}=\ln(\cos 4x)^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\ln(\cos 4x)$$

$$y=\frac{2}{3}\ln u,\quad u=\cos v,\quad v=4x$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=\left(\frac{2}{3}\ln u\right)'\cdot(\cos v)'\cdot(4x)'=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot 4=-\frac{8}{3}\cdot\frac{\sin v}{\cos v}=-\frac{8}{3}\tan v=-\frac{8}{3}\tan 4x$$

2) $y = \ln \sqrt[3]{\cos^2 4x}$

$$y = \ln \sqrt[3]{\cos^2 4x} = \ln(\cos 4x)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \ln(\cos 4x)$$

$$y' = \left(\frac{2}{3} \ln \cos 4x\right)' = \frac{2}{3} \cdot \left(\ln \underbrace{\cos 4x}_{u}\right)' = \left[(\ln u)' = \frac{u'}{u}\right] =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\overbrace{\cos 4x}^{u}\right)'}{\cos 4x} = \left[(\cos u)' = -u' \sin u\right] = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-(4x)' \sin 4x}{\cos 4x}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} \tan 4x$$

3) $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$

$$y' = \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 4}\right)' = \left[\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\right] =$$

$$= \frac{\left(2x^2 - 3x + 4\right)'}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}} = \frac{4x - 3}{2\sqrt{2x^2 - 3x + 4}}$$

4) $\quad y = \sin^4 x - \cos^4 x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - ?$

$$y' = \left(\sin^4 x - \cos^4 x\right)' = \left[\left(\underbrace{\sin x}_{u}\right)^4\right]' - \left[\left(\underbrace{\cos x}_{u}\right)^4\right]' = \left[\left(u^4\right)' = 4u^3 \cdot u'\right] =$$

$$= 4 \cdot (\sin x)^3 \cdot (\sin x)' - 4 \cdot (\cos x)^3 \cdot (\cos x)' =$$

$$= 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x + 4 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x =$$

$$= 4 \sin x \cdot \cos x \cdot \left(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}\right) = 2 \sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$