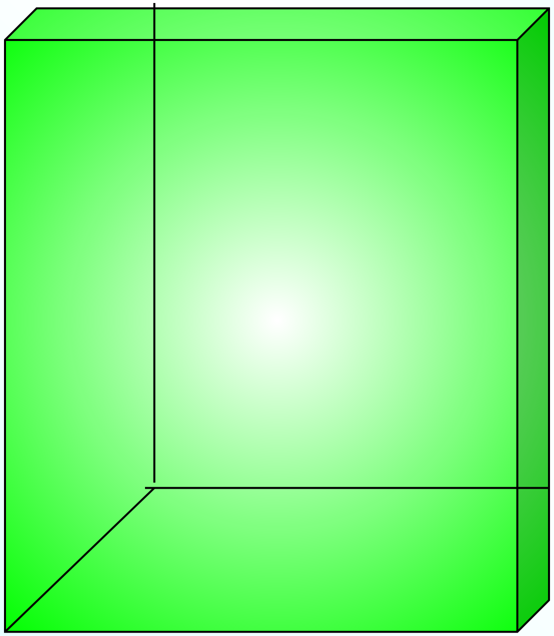
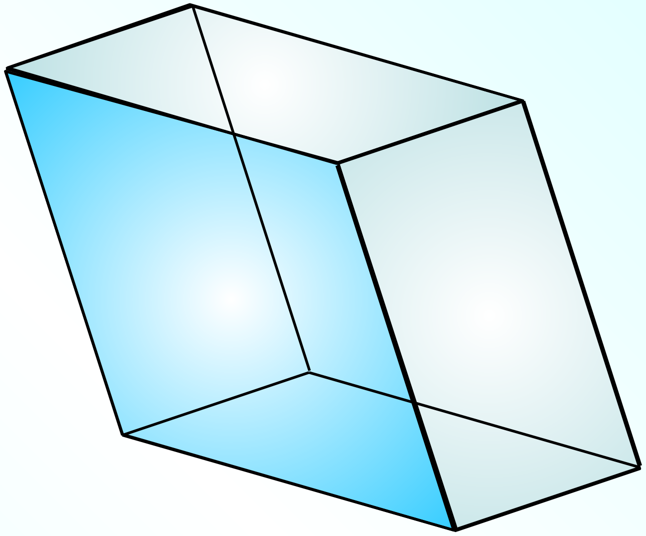
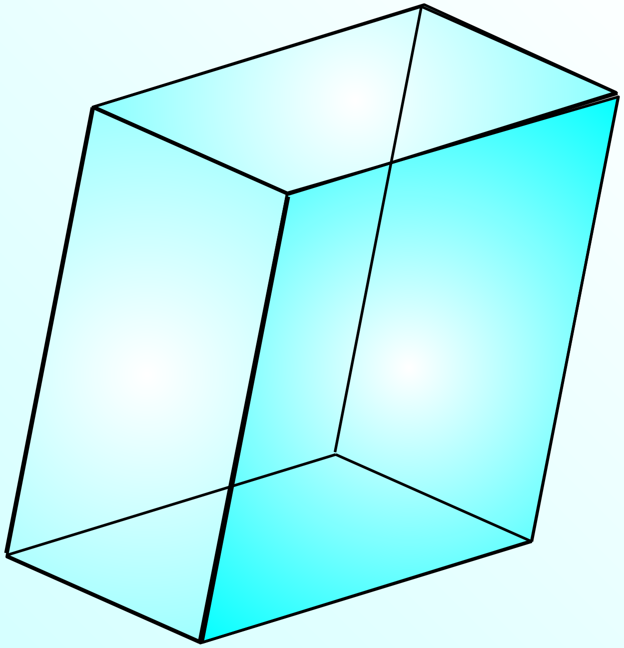
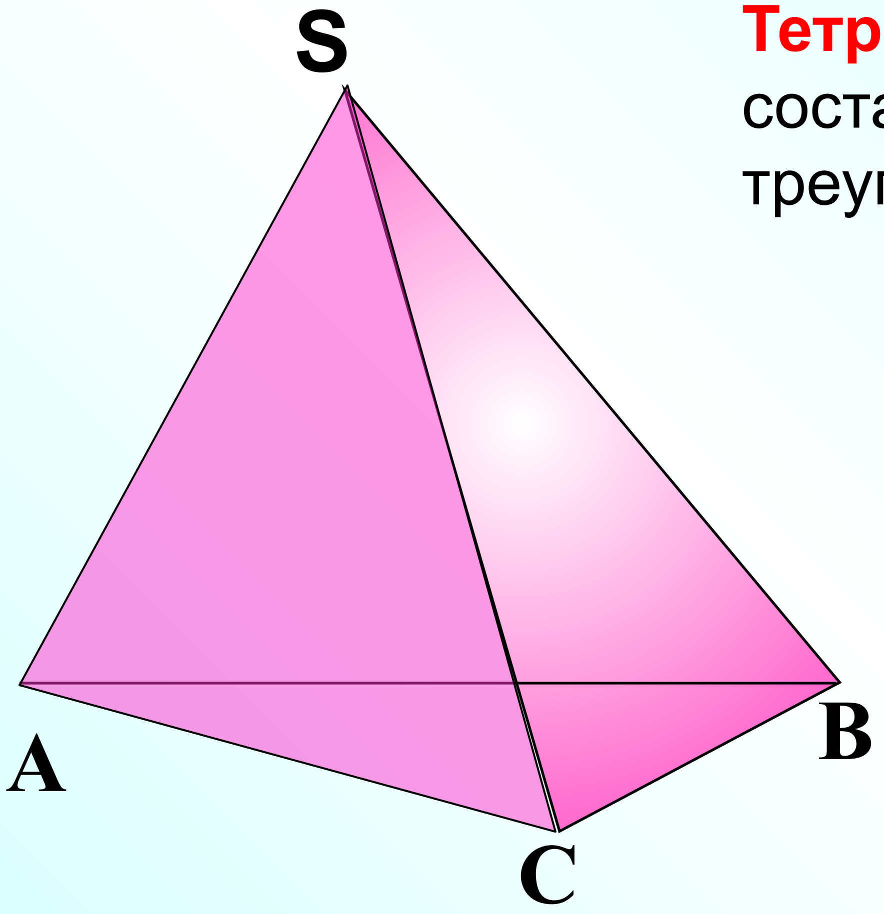
Понятие многогранника



Параллелепипед – поверхность, составленная из шести параллелограммов.

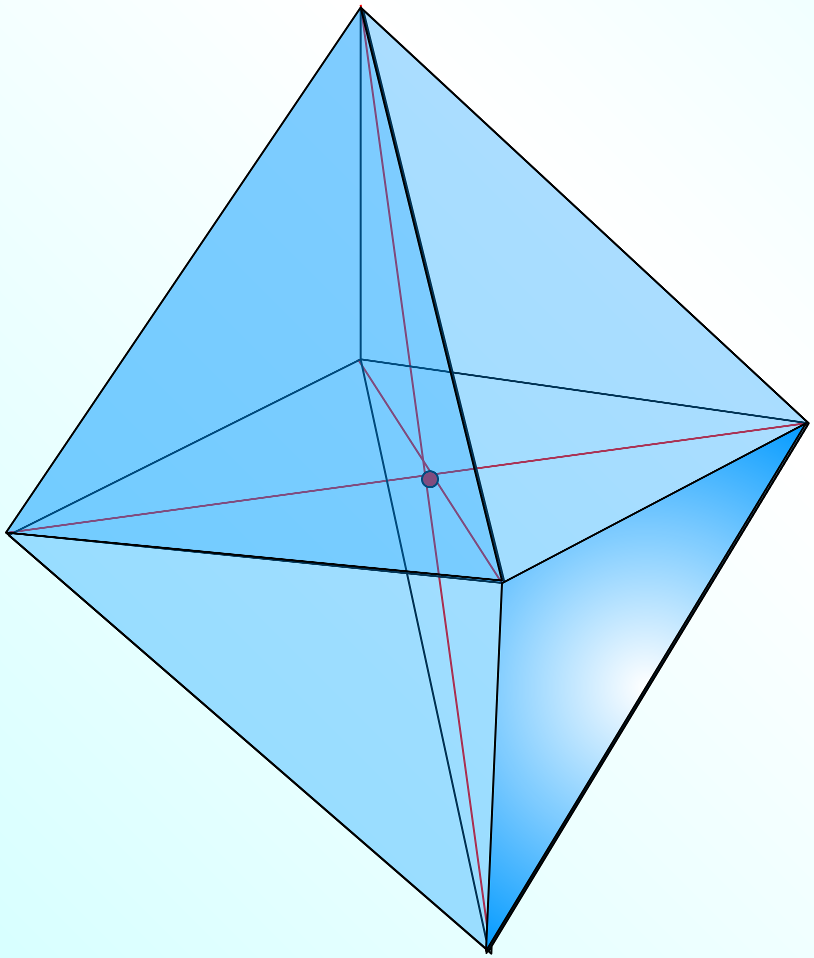






Тетраэдр – поверхность, составленная из четырех треугольников.

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или **многогранником**.



Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются **гранями.**

Стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер – **вершинами**.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

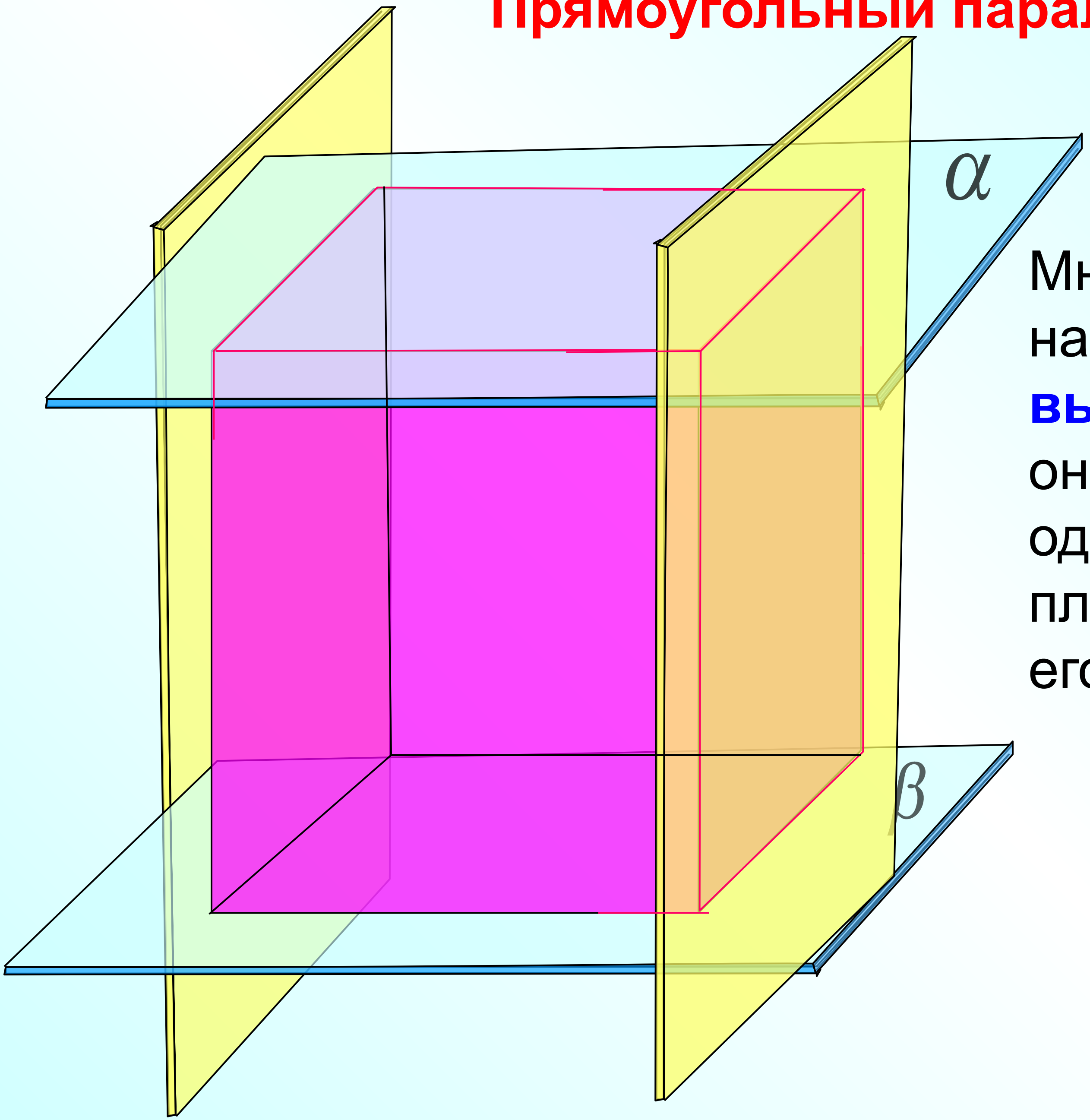
Октаэдр составлен из восьми треугольников.

Характеристики тел

Многогранник	Число сторон грани	Число граней, сходящихся в каждой вершине	Число граней	Число рёбер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Куб	4	3	6	13	8
Октаэдр	3	4	8	12	6
Икосаэдр	3	5	20	30	12
Додекаэдр	5	3	12	30	20

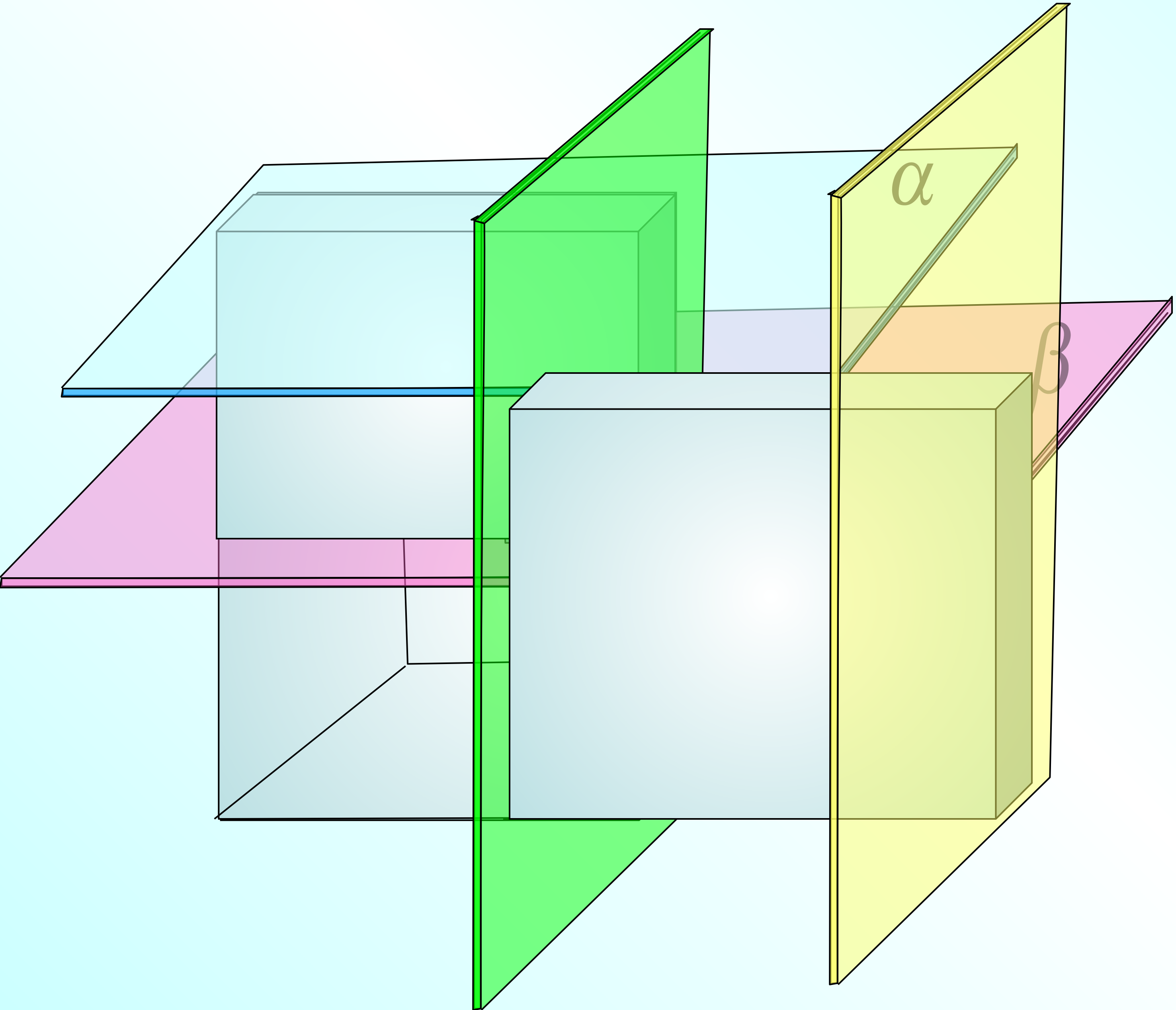
 Многогранник называется метрически правильным, если все его грани являются правильными многоугольниками. К ним относятся **куб, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр**.

Прямоугольный параллелепипед



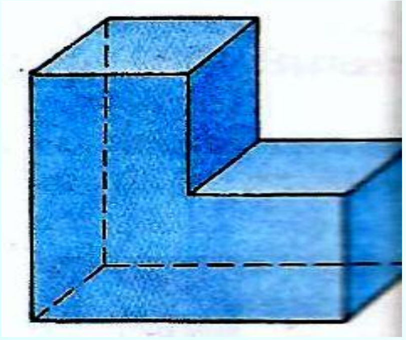
Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Невыпуклый многогранник



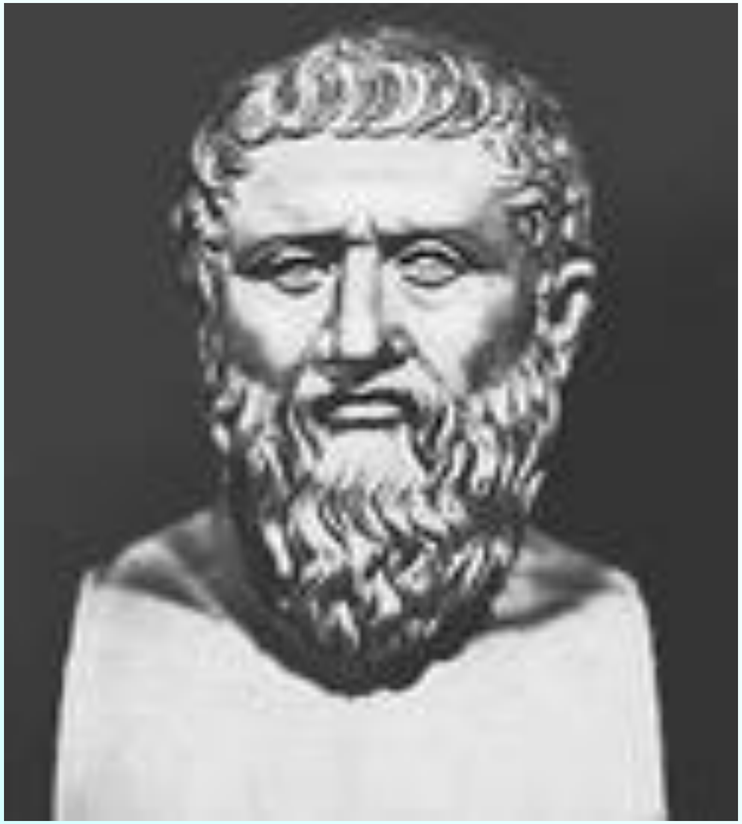
Выпуклый или нет

- Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр -выпуклые многогранники.
- В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360.



НЕВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК

Платон



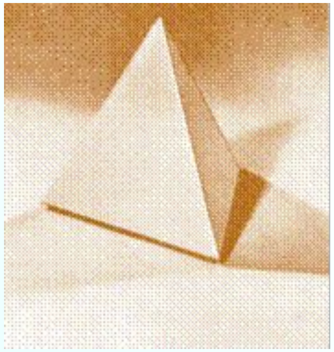
около 429 – 347 гг до н.э.

Платоновыми телами называются правильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все грани и углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.

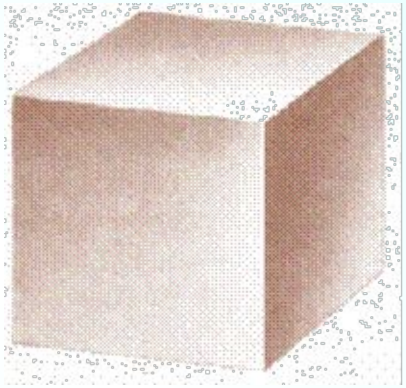
Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Однако между двумерным и трехмерным случаями есть важное отличие: существует бесконечно много различных правильных многоугольников, но лишь пять различных правильных многогранников.

Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида.

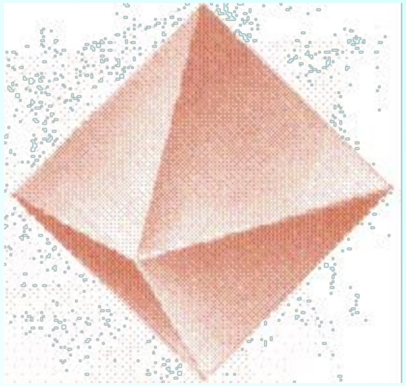
Платоновы тела



Тетраэдр

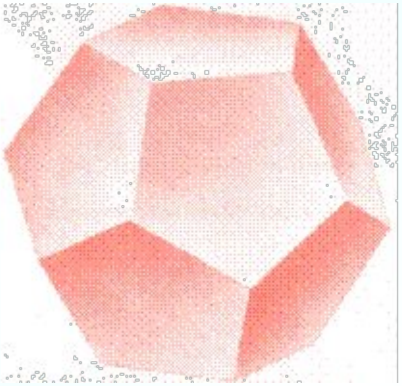


Гексаэдр



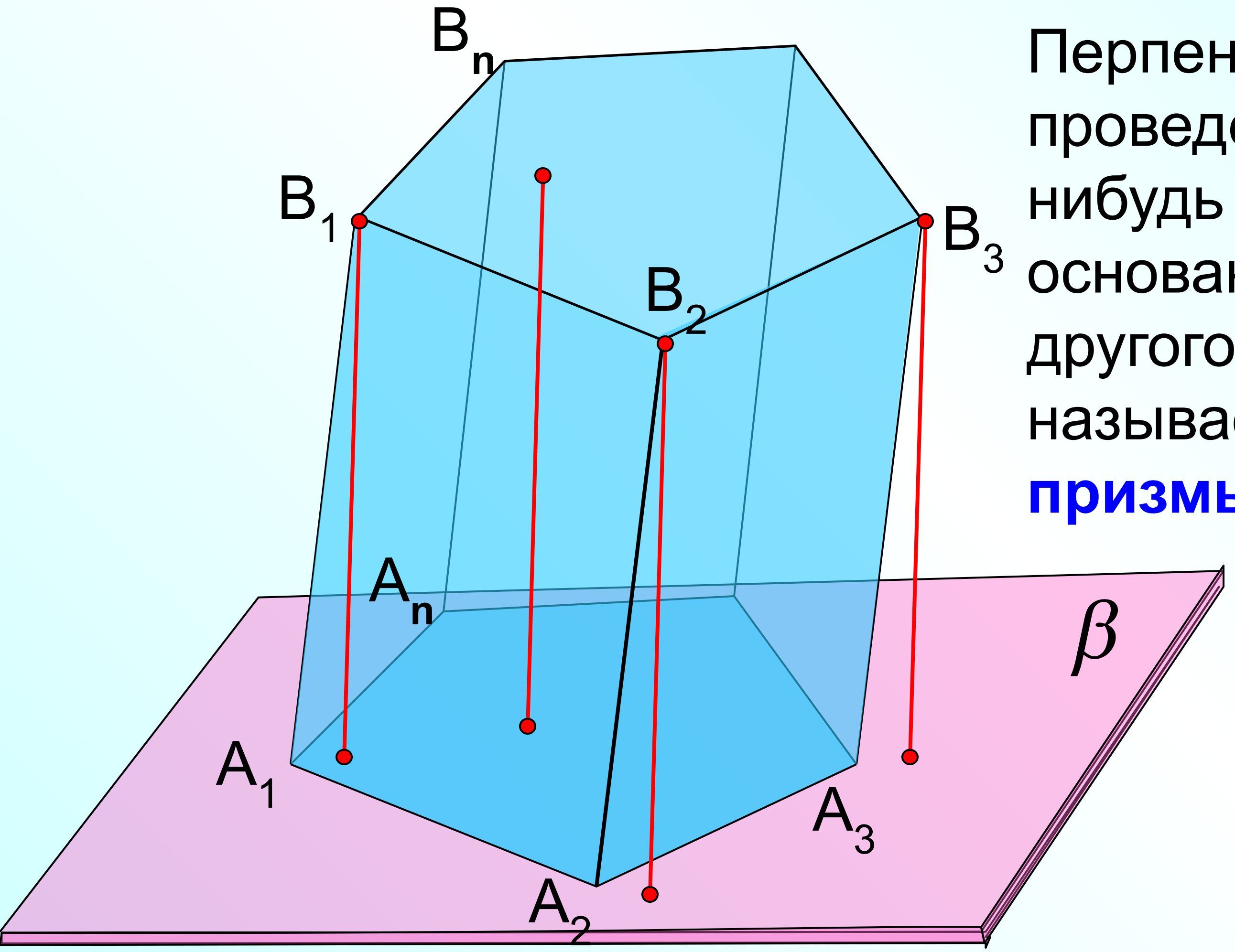
Октаэдр

Икосаэдр



Додекаэдр

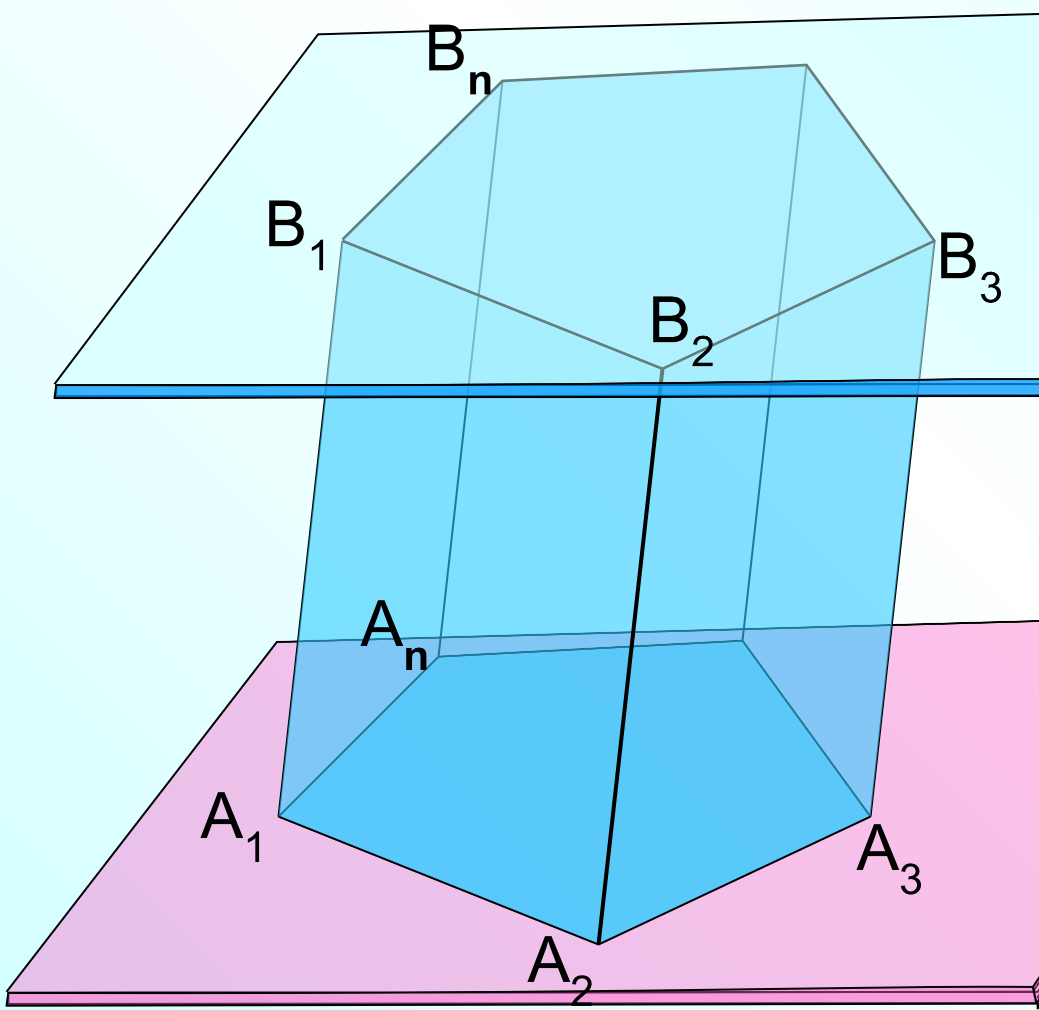
Призма



Отрезки A_1B_1, A_2B_2 и т.д. - **боковые ребра призмы**

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой призмы**.

Призма



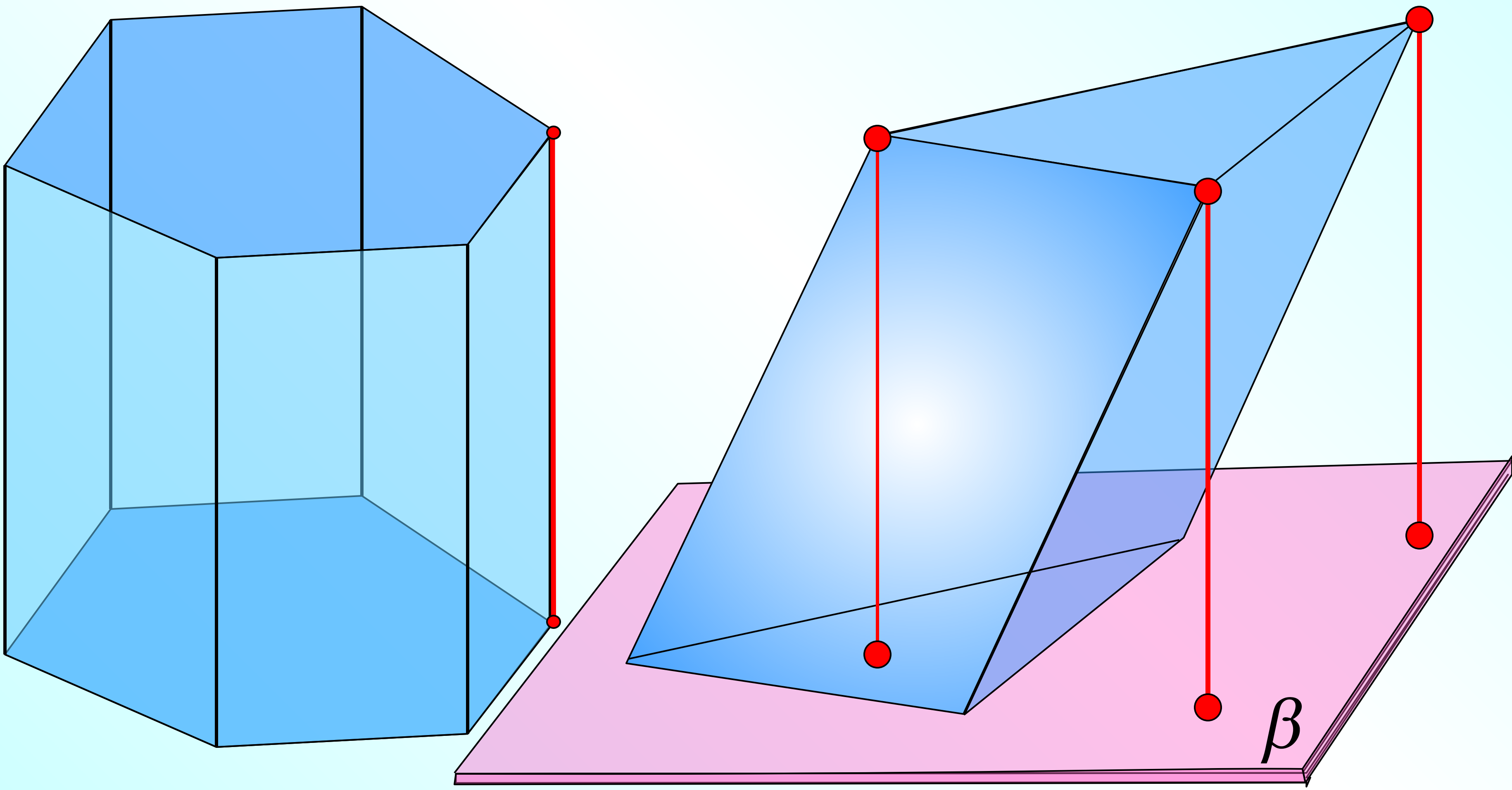
Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и ***n*** параллелограммов, называется призмой.

n-угольная призма.

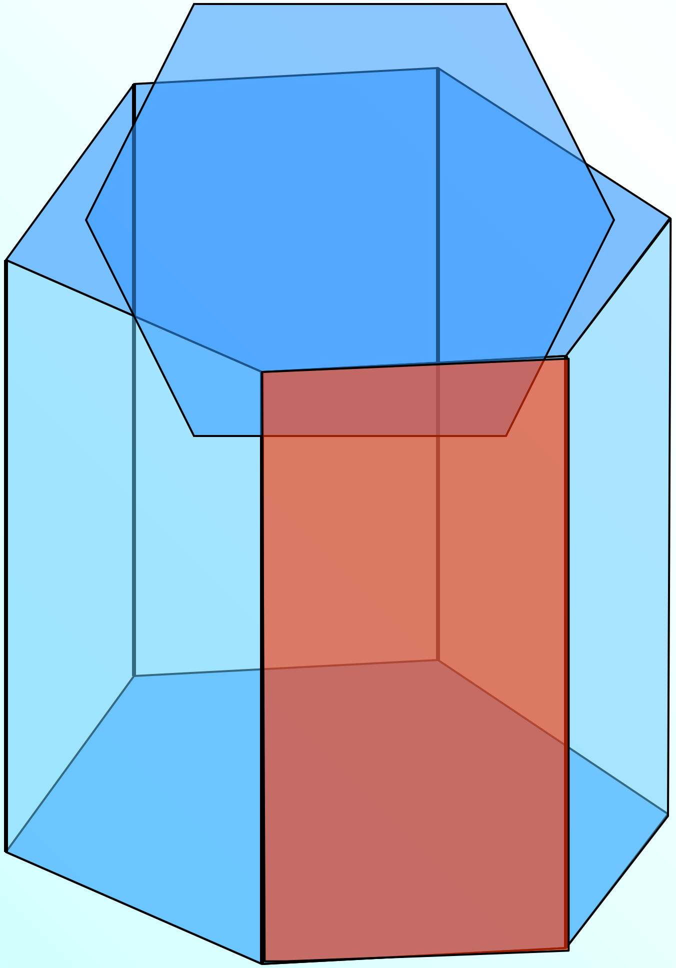
Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – **основания призмы**.

Параллелограммы $A_1B_1B_2B_2$, $A_2B_2B_3A_3$ и т.д. **боковые грани призмы**

Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае **наклонной**. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

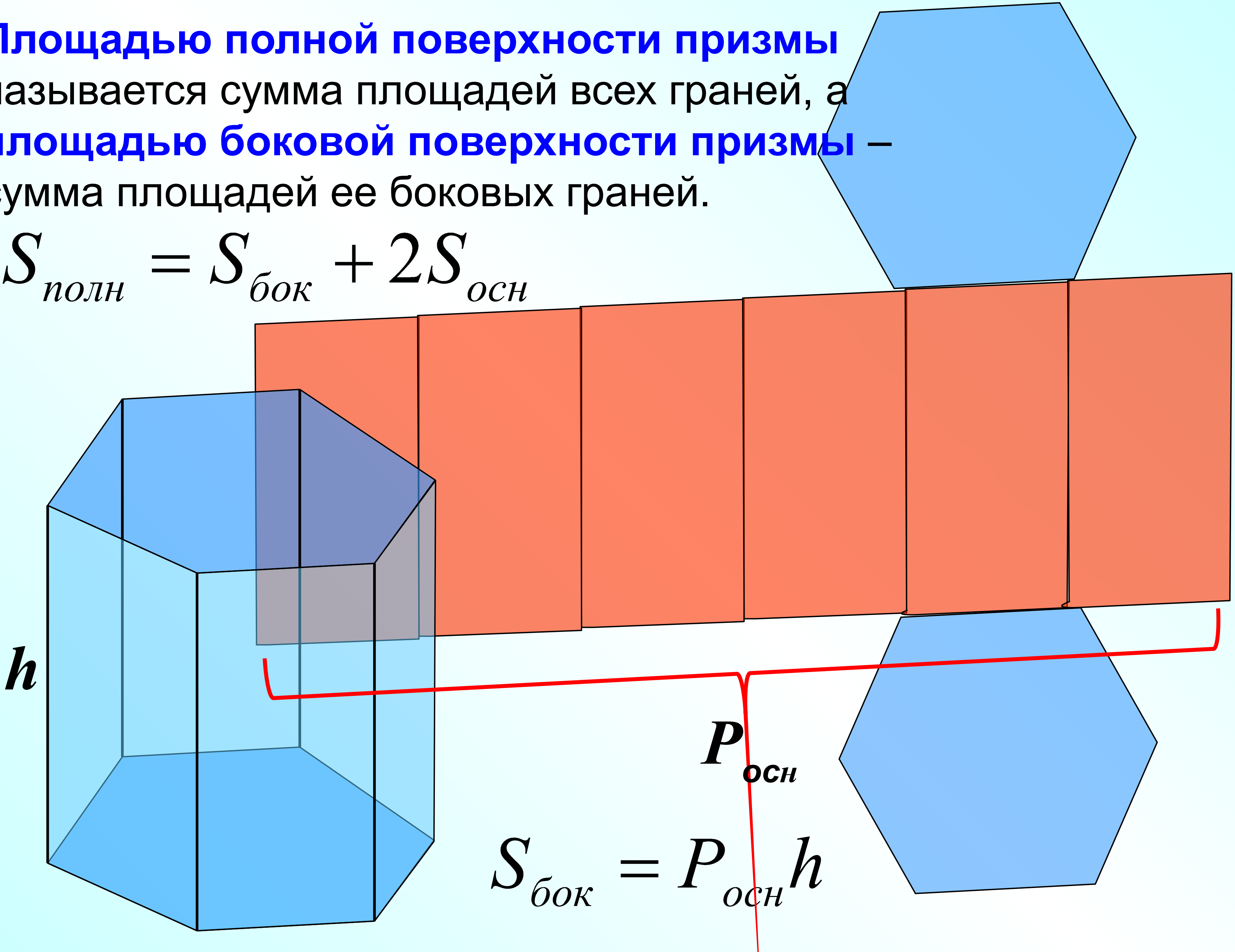


Прямая призма называется **правильной**, если ее основания - правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.



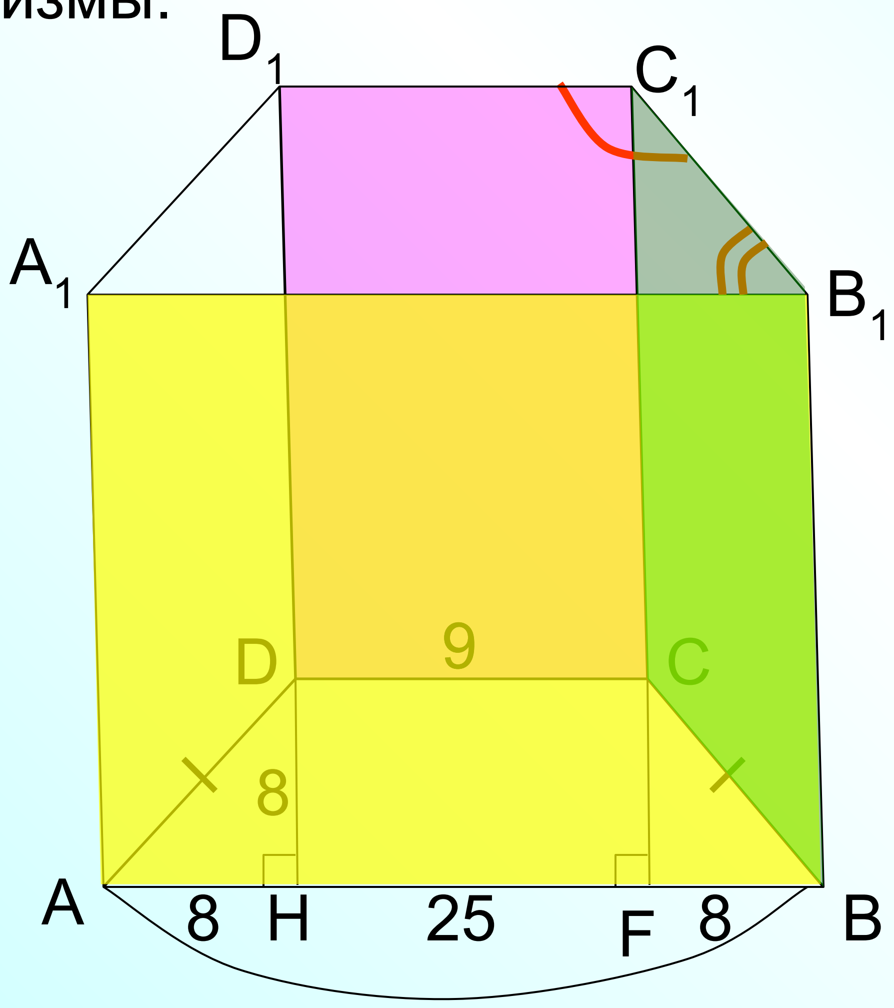
Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех граней, а **площадью боковой поверхности призмы** – сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

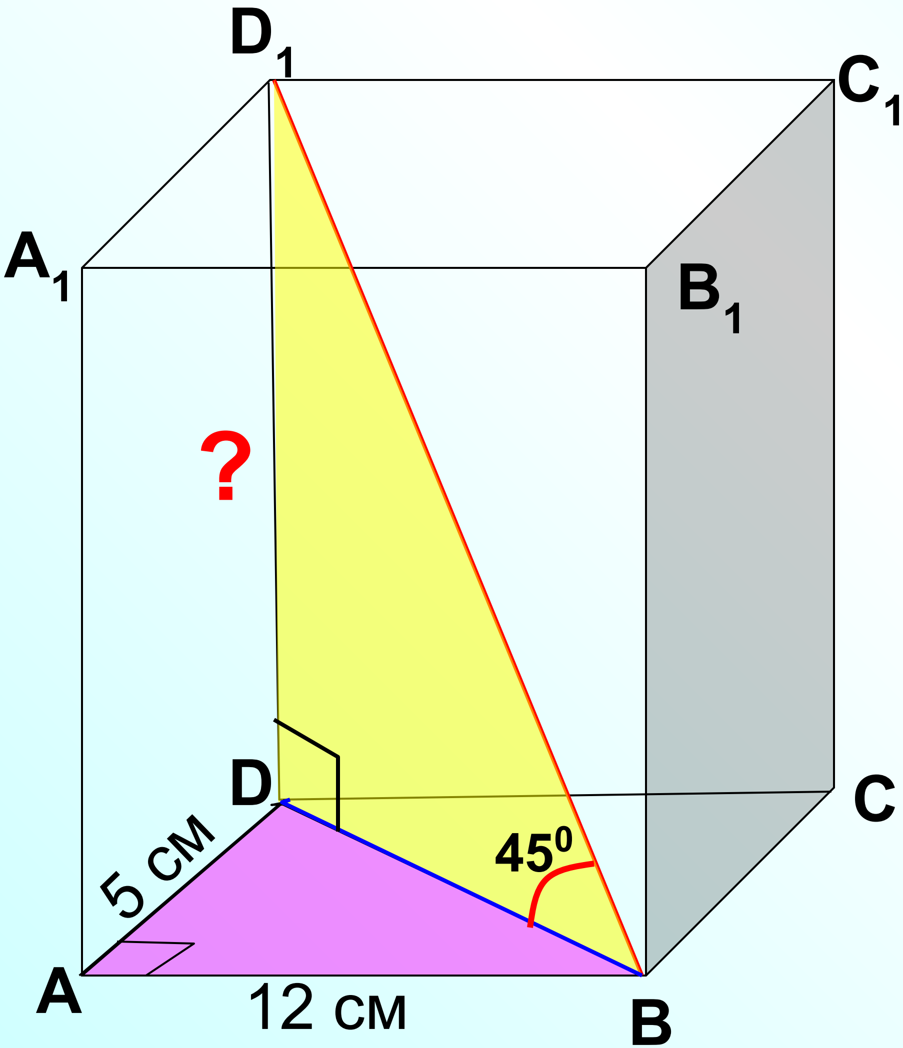


$$S_{бок} = P_{осн}h$$

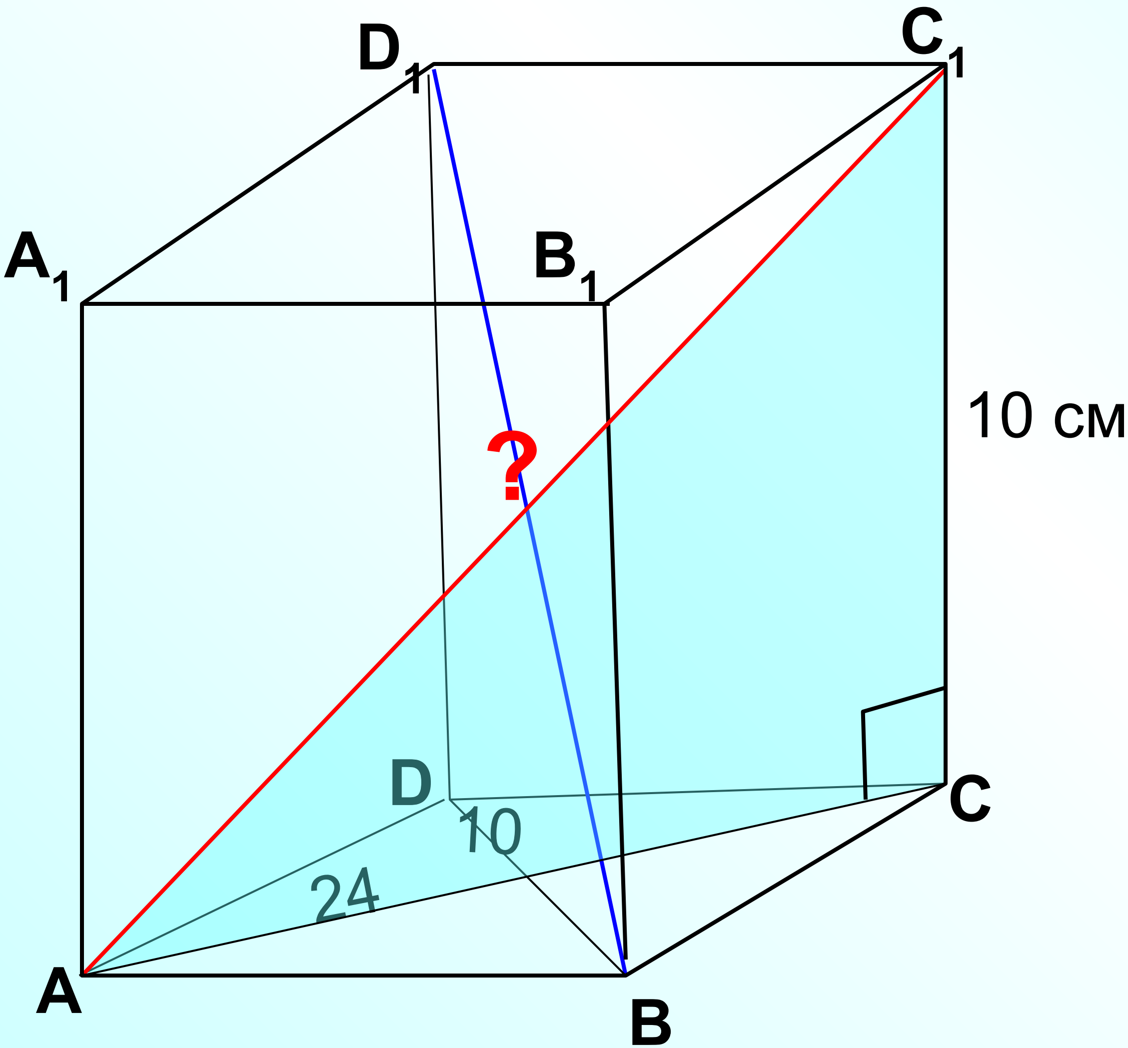
№ 222. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых ребрах призмы.



№ 219. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите боковое ребро параллелепипеда.



№ 220. Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

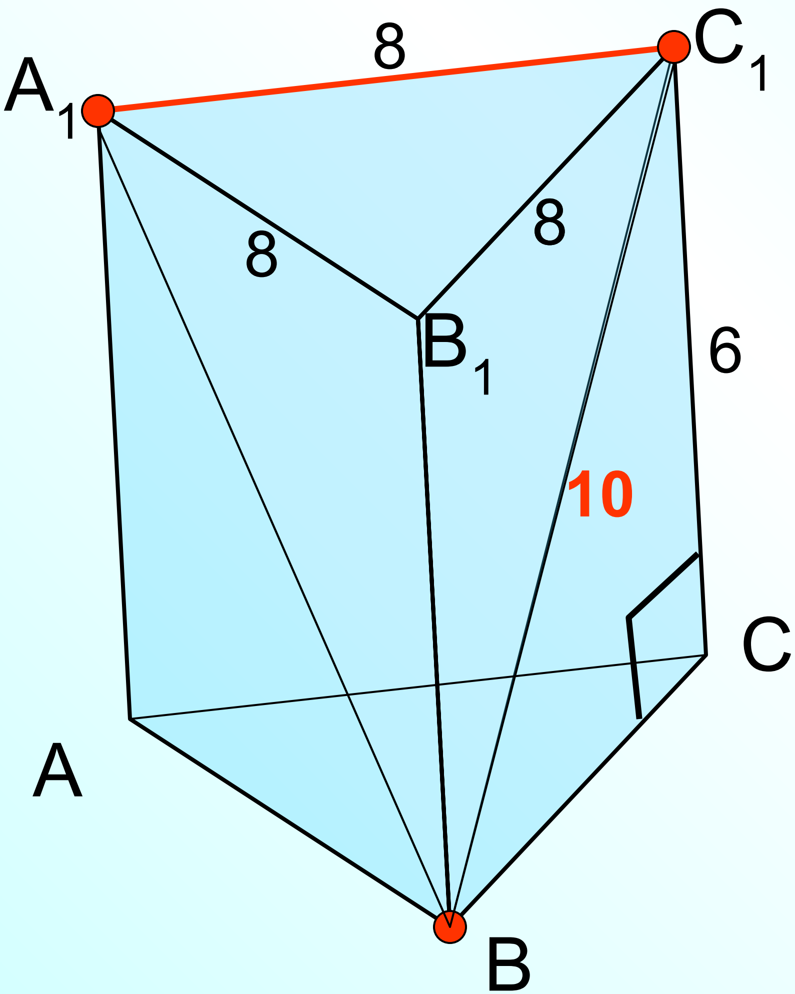


1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, а диагональ боковой грани равна 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

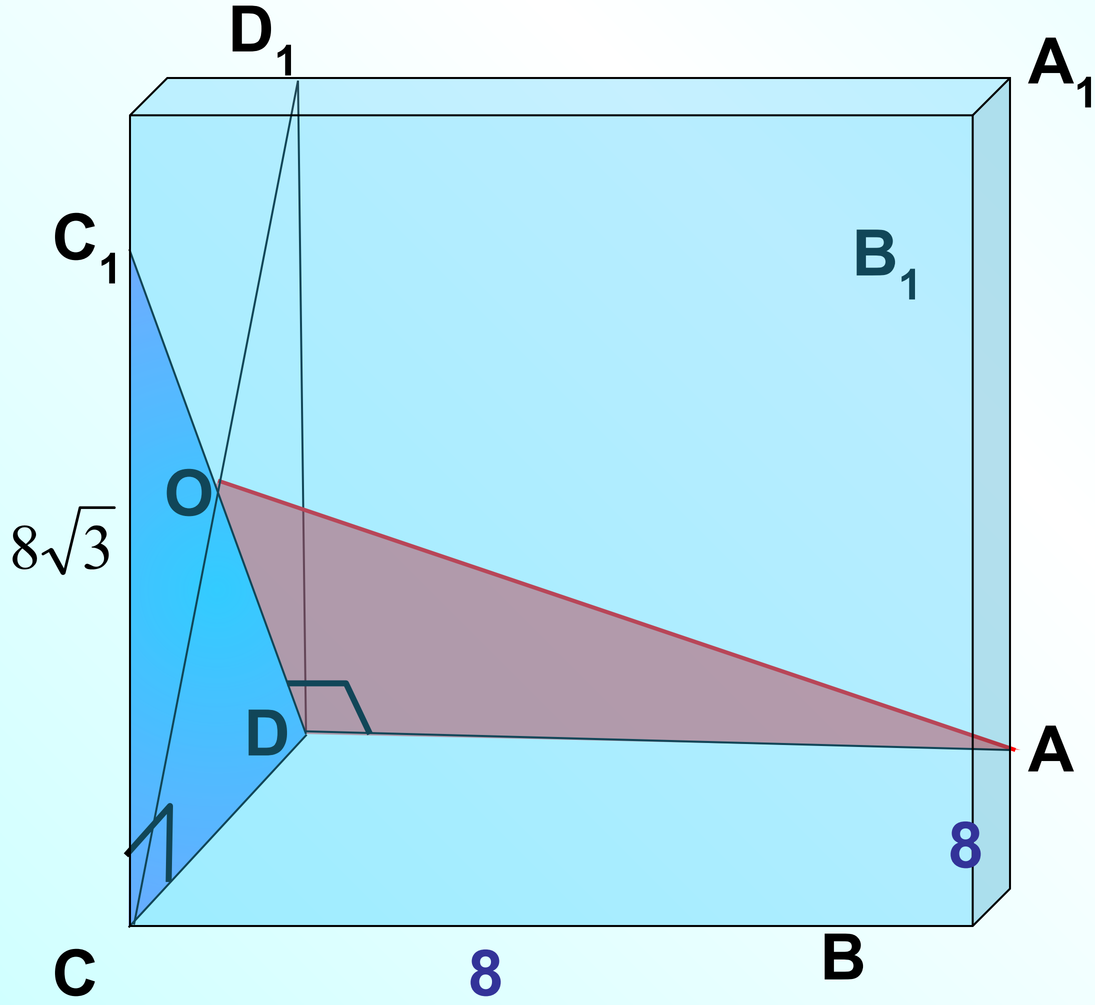
2. Основание прямой призмы – параллелограмм со сторонами 8 и 15 см и углом 120^{o}. Боковая поверхность призмы имеет площадь 460 $см^2$. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

3. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 13 и 12 см. Меньшая боковая грань и основание призмы **равновелики**. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

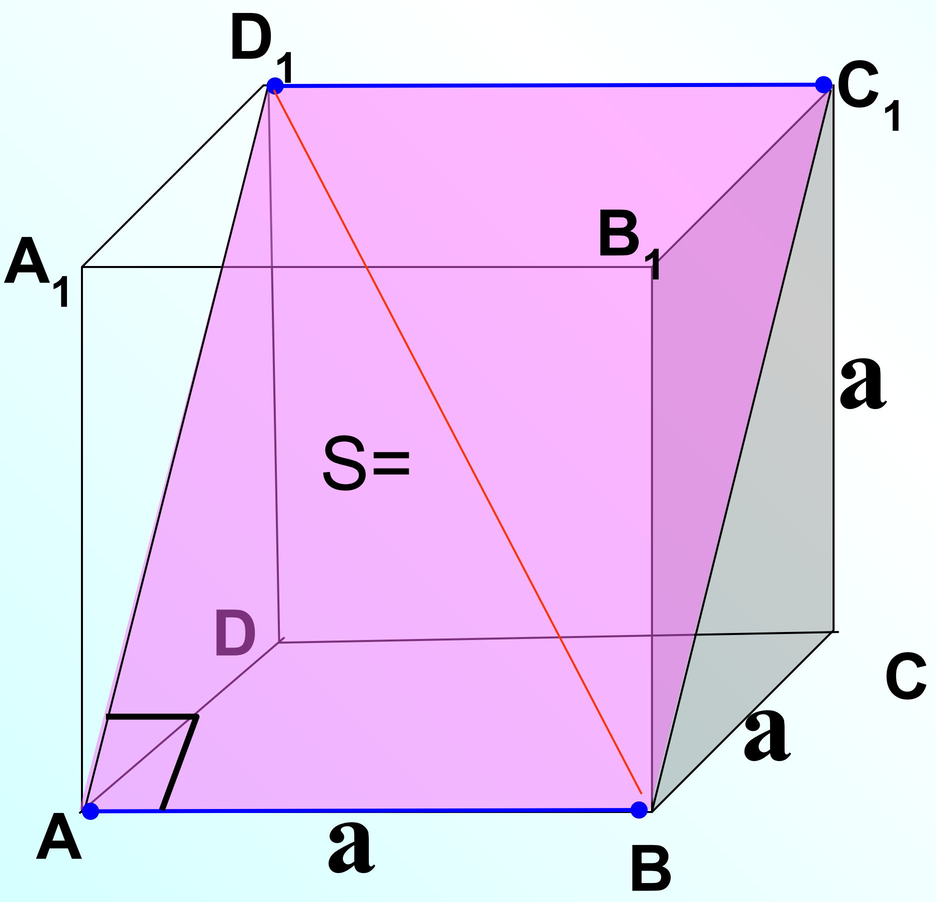
№ 221. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.



Высота правильной четырехугольной призмы равна $8\sqrt{3}$, а сторона основания – 8 см. Найдите расстояние между вершиной А и точкой пересечения диагоналей грани DD_1C_1C.



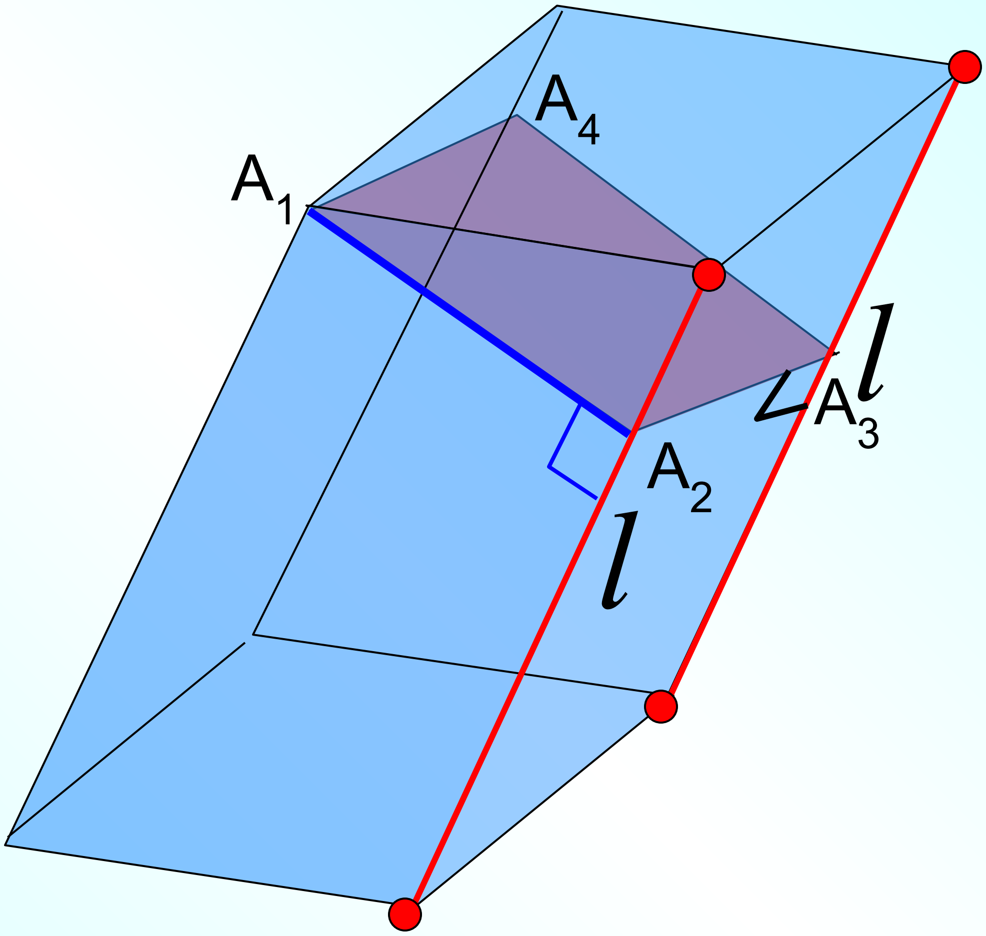
№ 223. Через два противолежащих ребра проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.



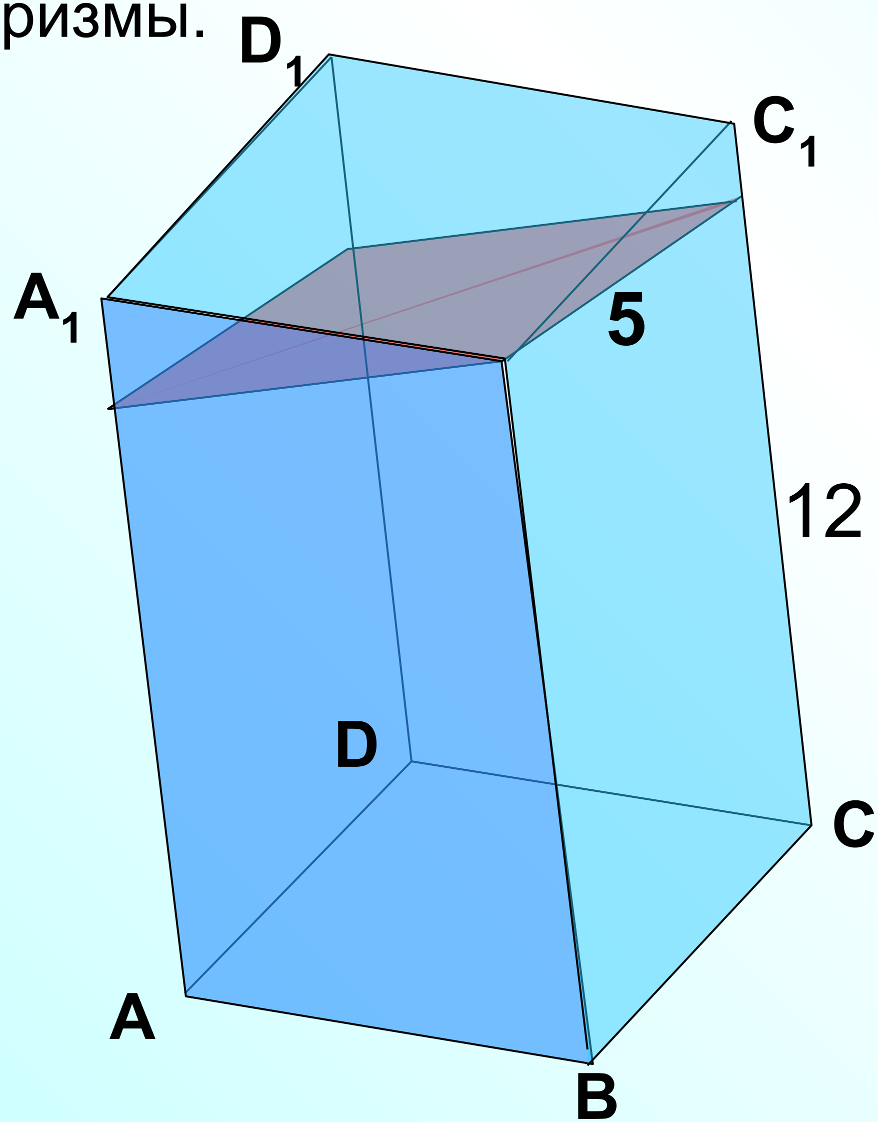
№ 236. Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

$$S_1 = A_1A_2 * l$$
$$S_2 = A_2A_3 * l$$
$$+$$
$$S_3 = A_3A_4 * l$$
$$S_4 = A_4A_1 * l$$

$$S_{бок} = P_{сеч} l$$

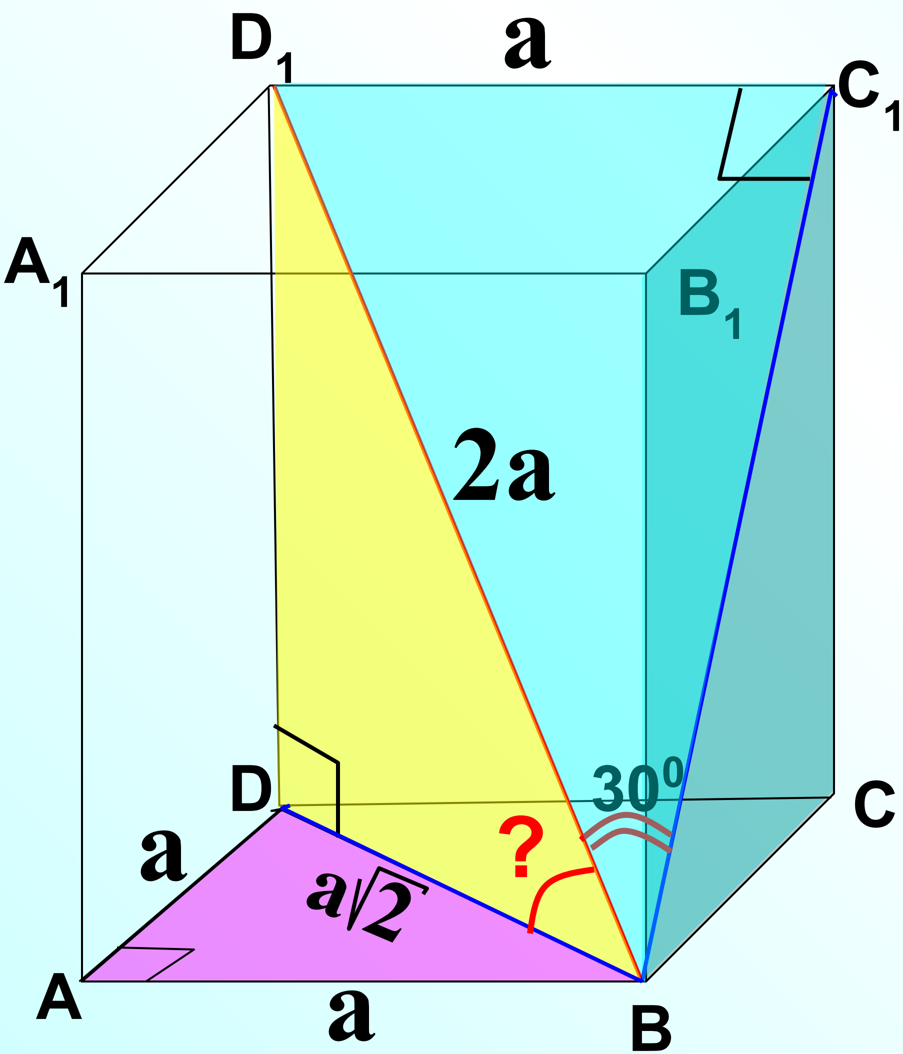


№ 237. Боковое ребро наклонной четырехугольной призмы равно 12 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

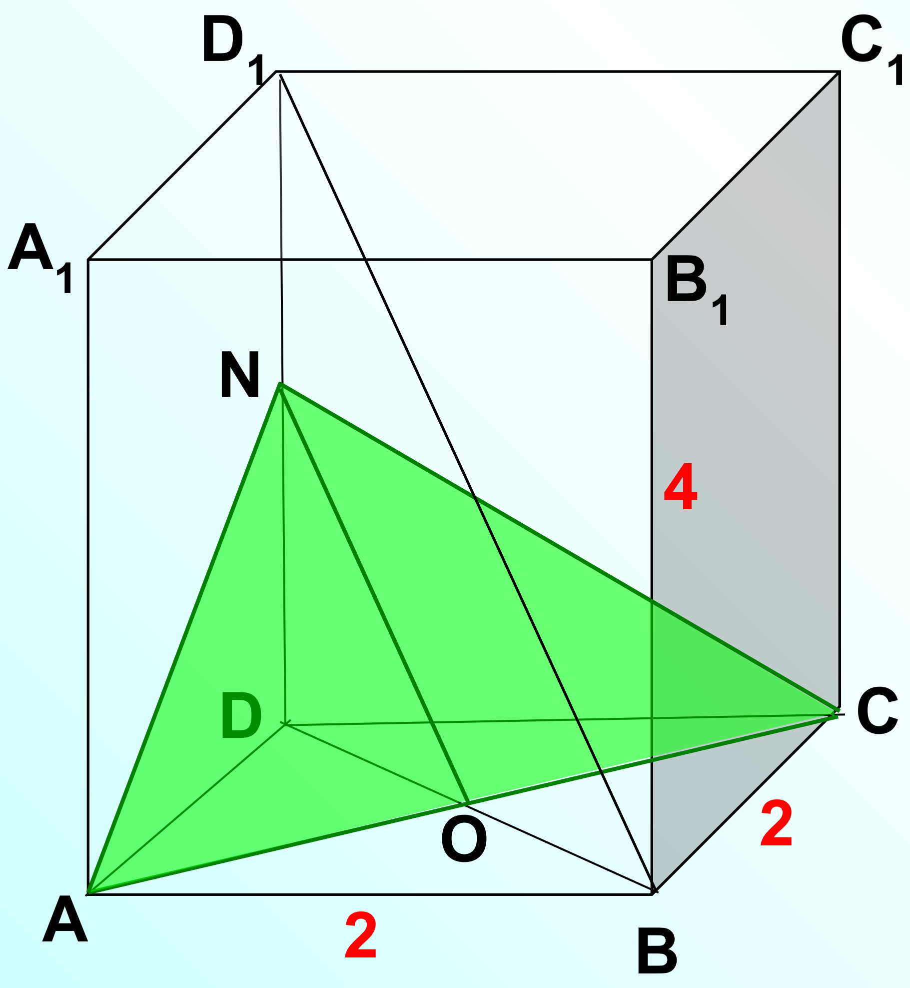


$$S_{бок} = P_{сеч} l$$

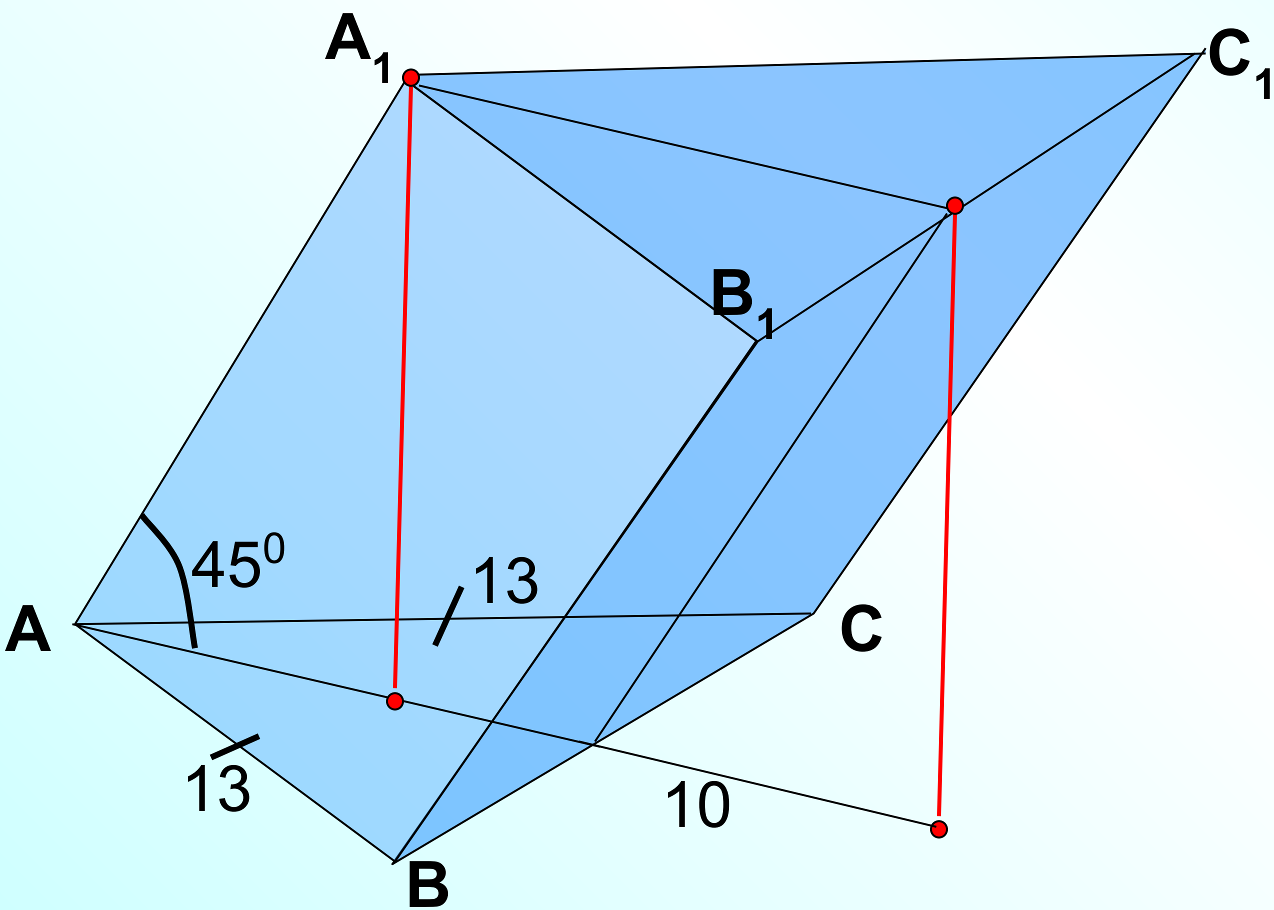
№ 225. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30^0. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.



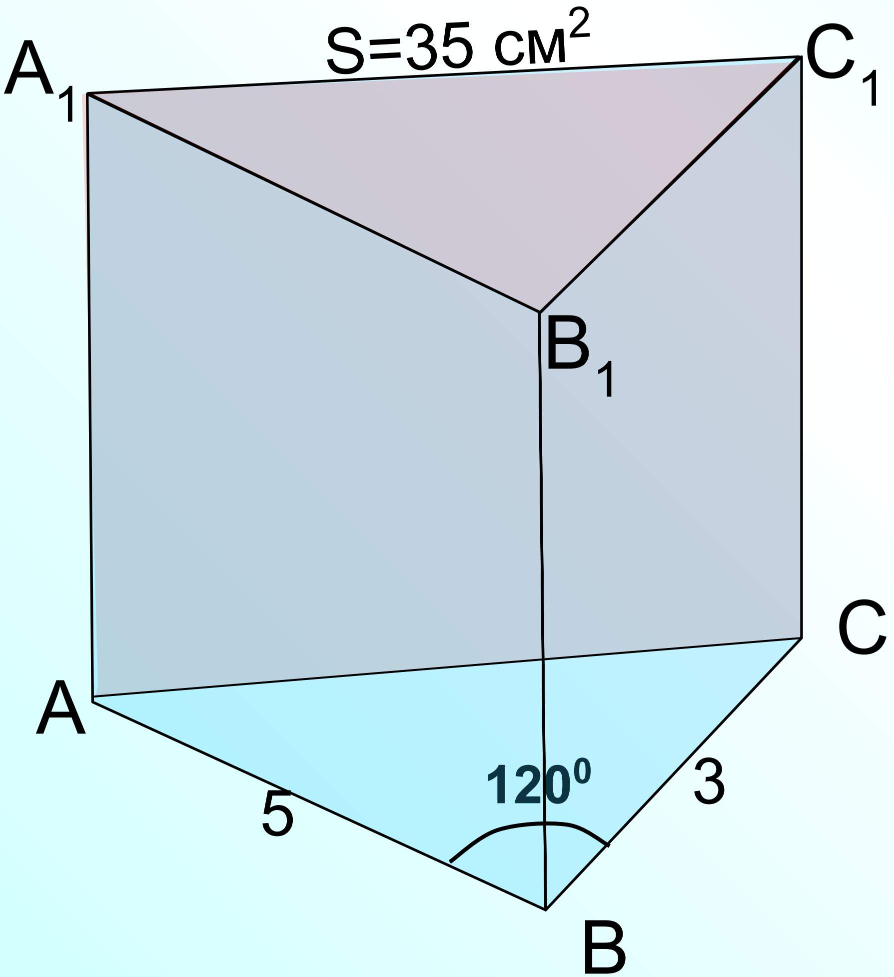
№ 226. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а ее высота 4 см.



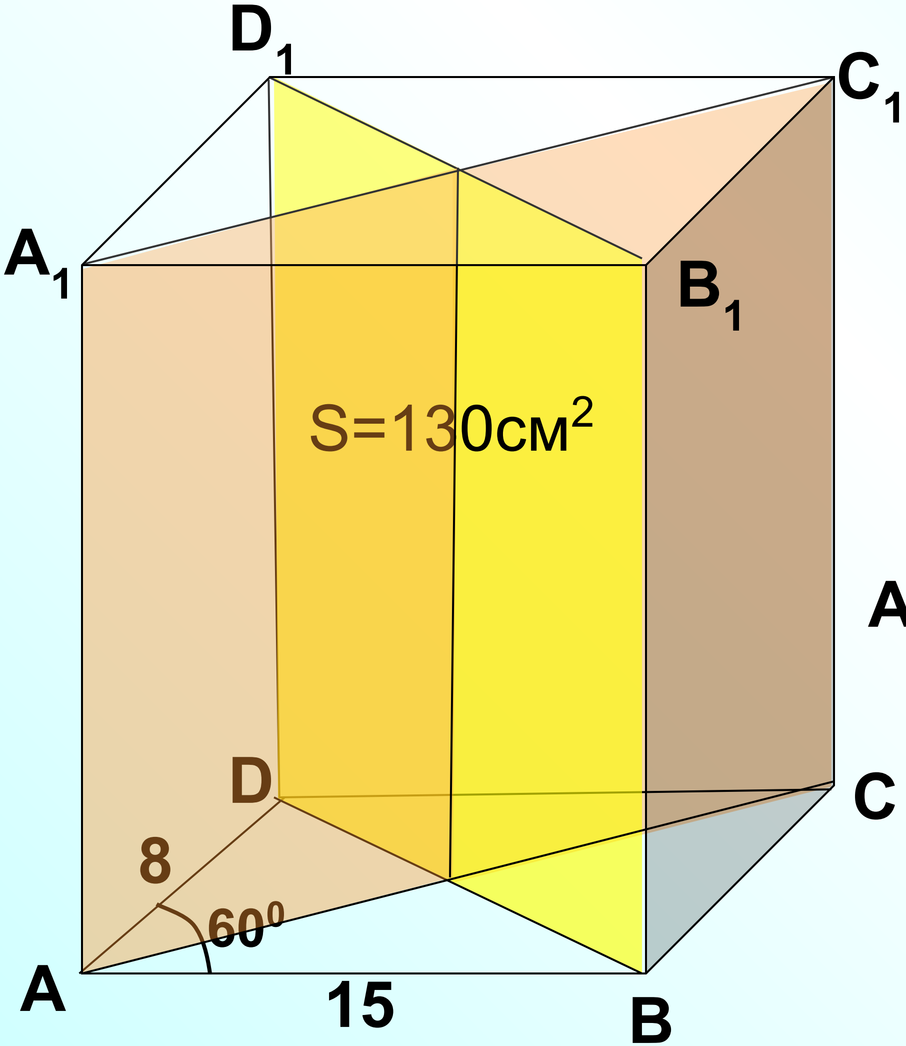
№ 228. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором AC=AB=13см, BC=10см,а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45^0. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

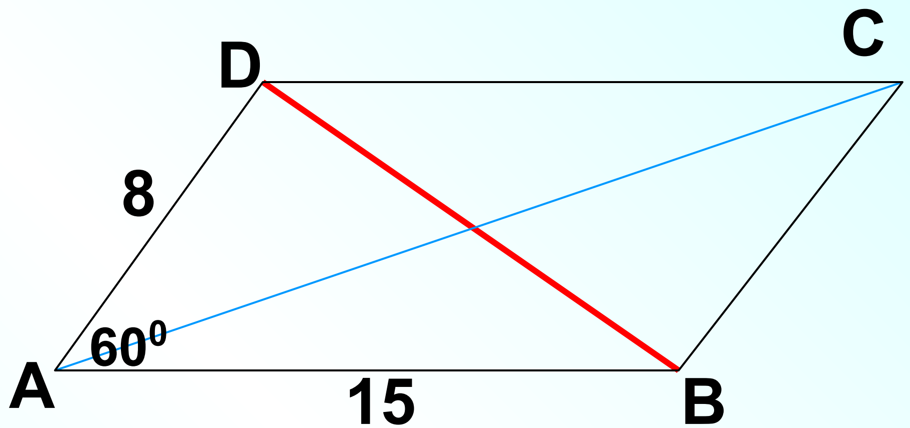


№ 230. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120^0 между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

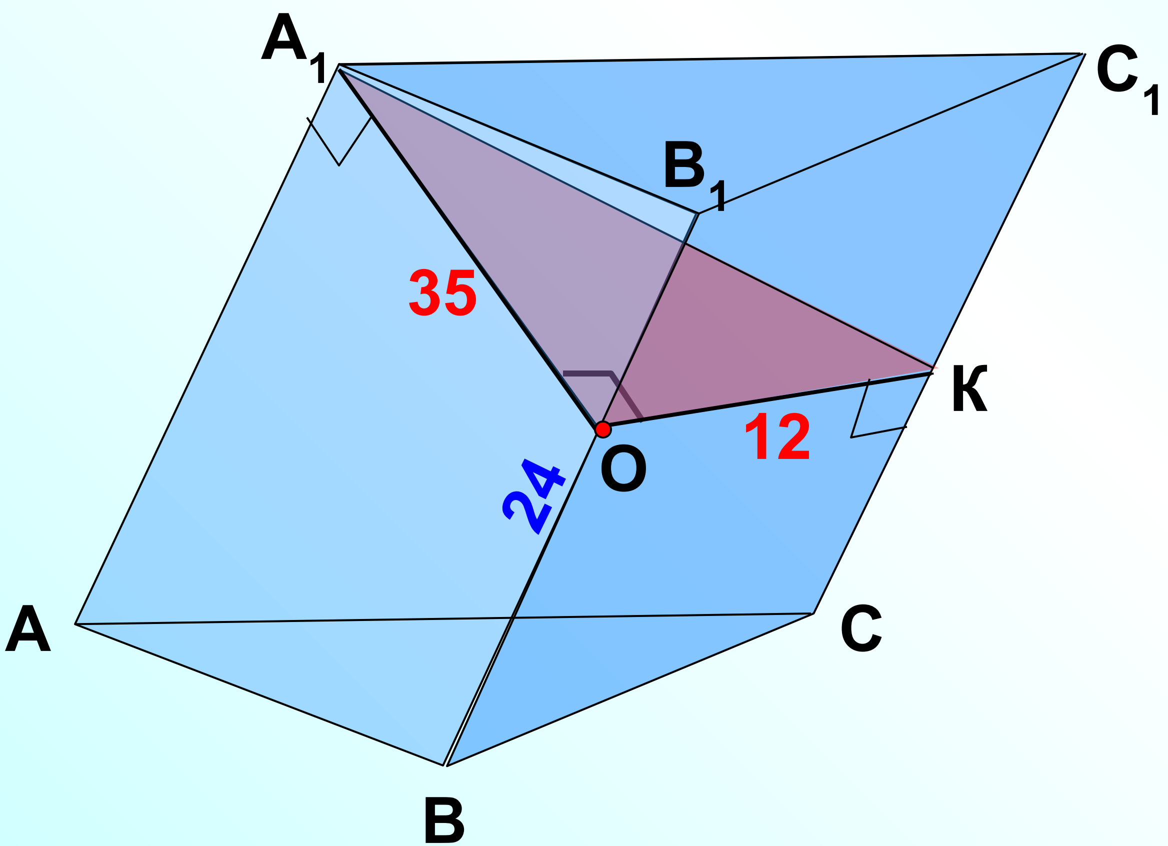


№ 231. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60^0. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

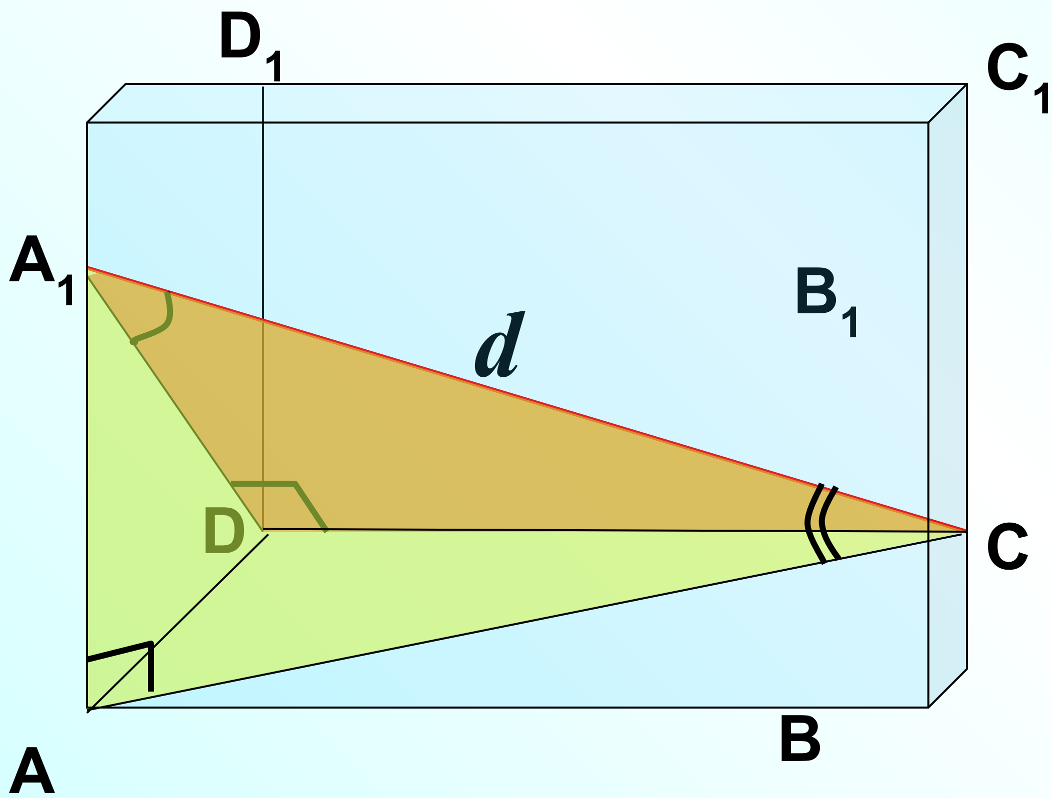




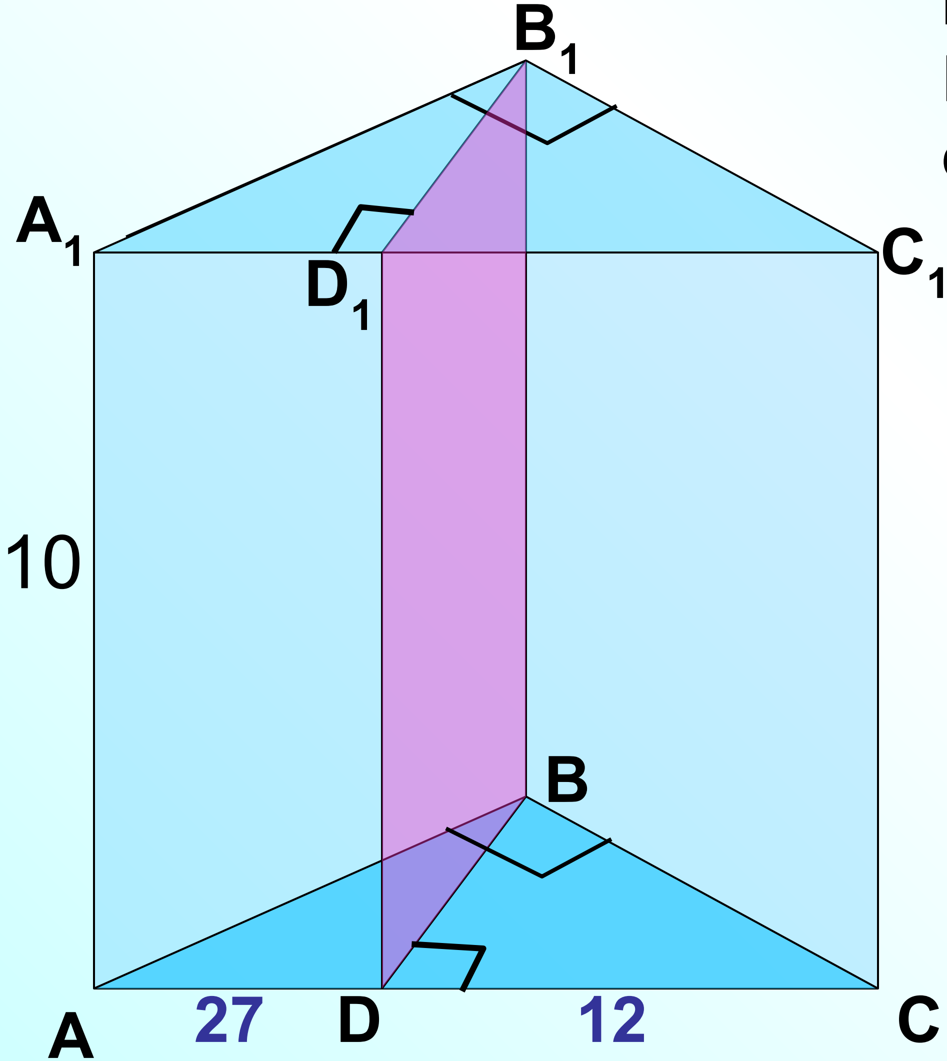
№ 238. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, отстоящее от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см, равно 24 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



№ 232. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из боковых граней – угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.



№ 233. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Через ребро BB_1 проведено сечение BB_1D_1D, перпендикулярное к плоскости грани AA_1C_1C. Найдите площадь сечения, если AA_1=10см, AD=27см, DC= 12см.

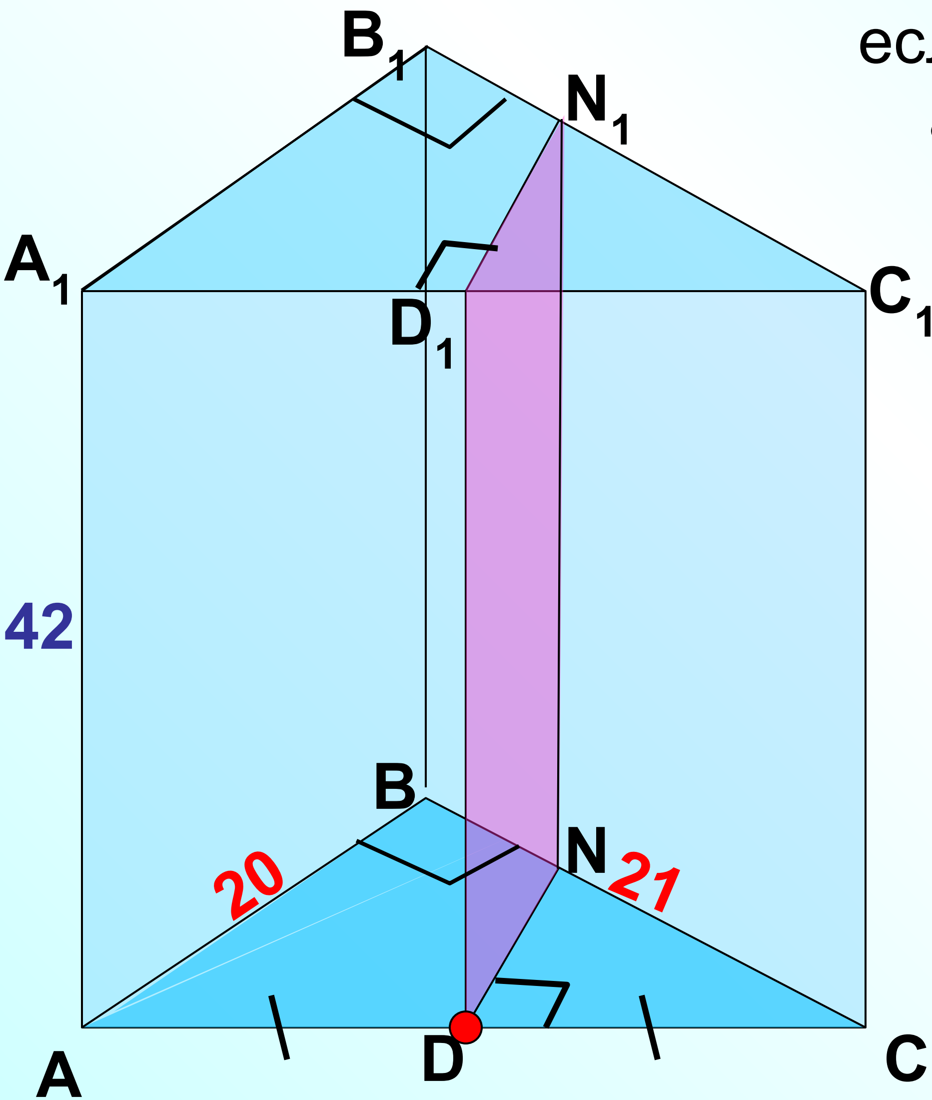


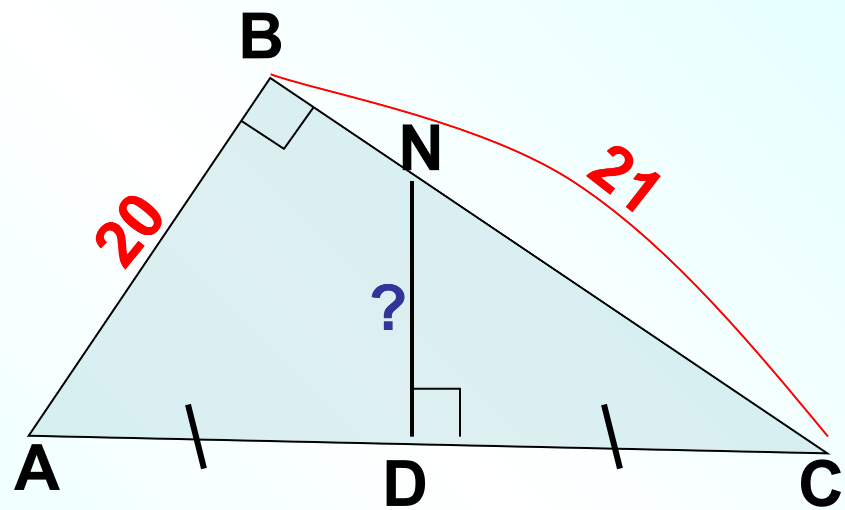
Из ΔABC

$$BD = \sqrt{\underset{9\cdot 3\cdot 3\cdot 4}{27\cdot 12}} = 3\cdot 3\cdot 2$$

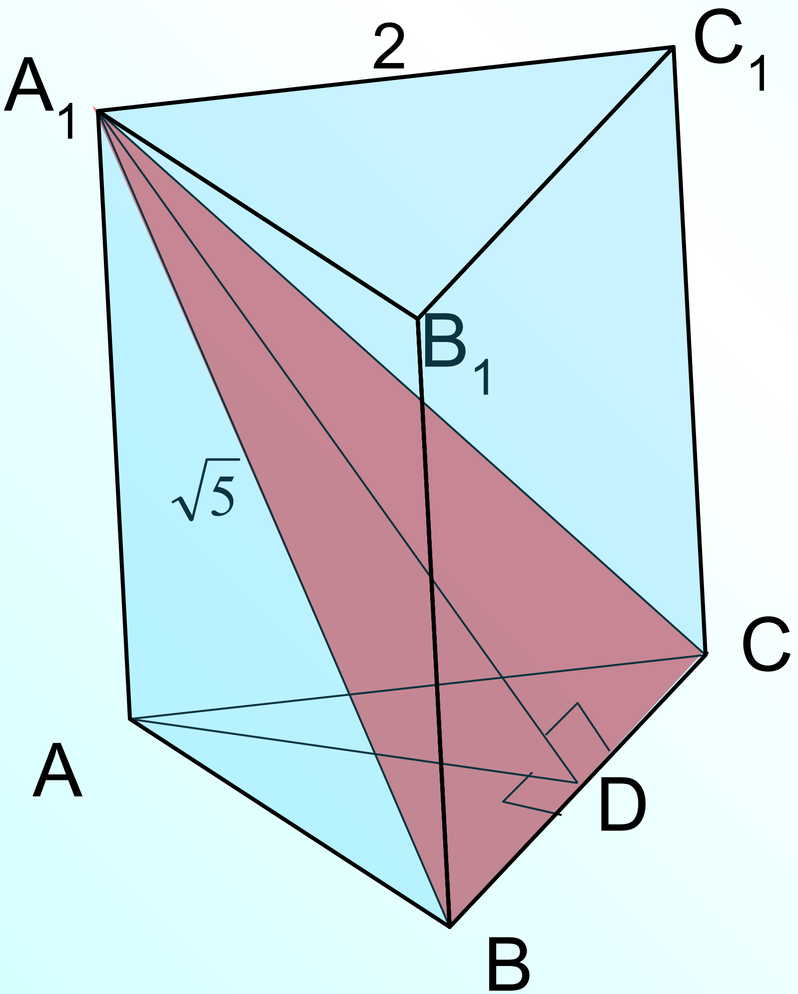
$S_{сеч}$ = 10 * 18

№ 234. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите $S_{сеч}$, если катеты равны 20см и 21см, а боковое ребро равно 42 см.

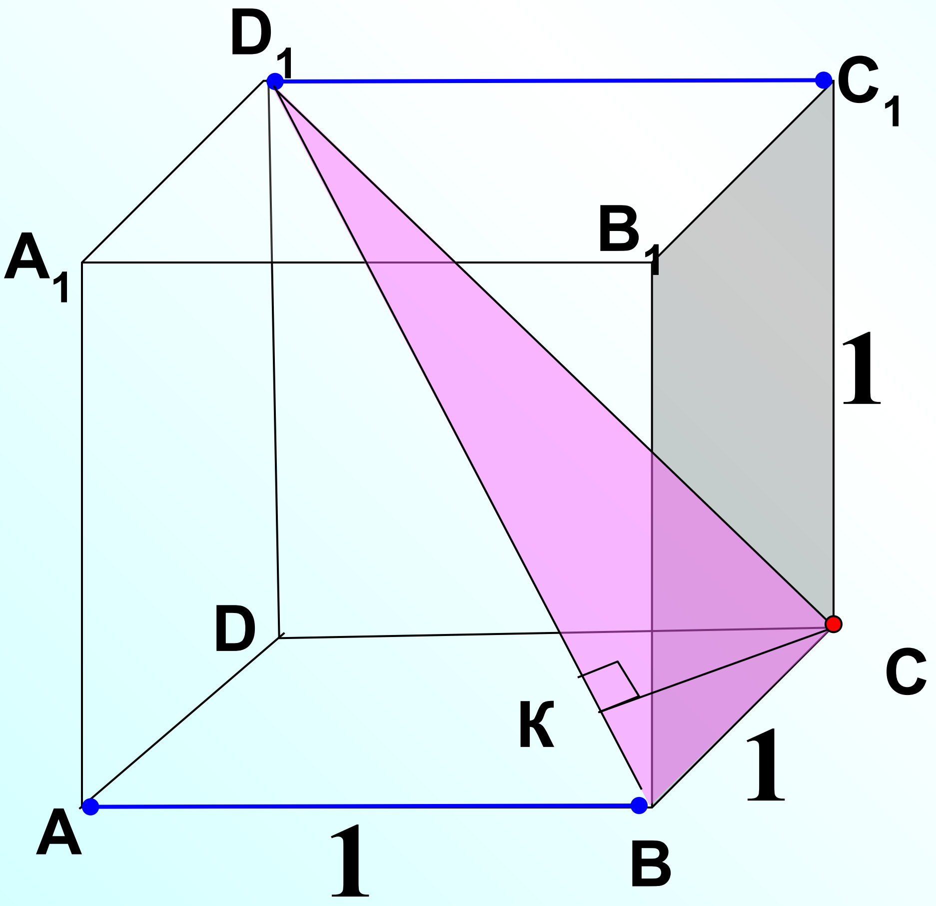




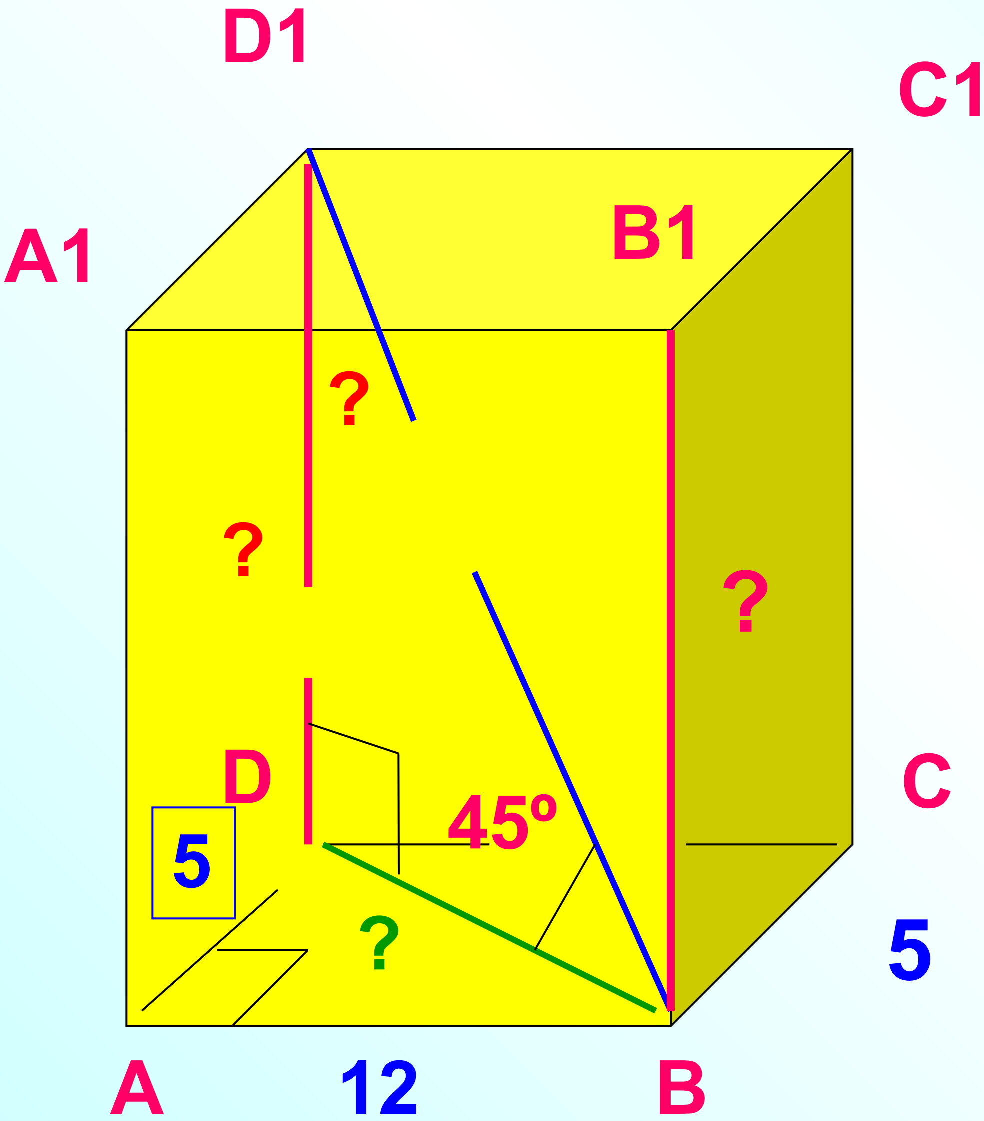
C2 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



C2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.



Задача № 219



План:

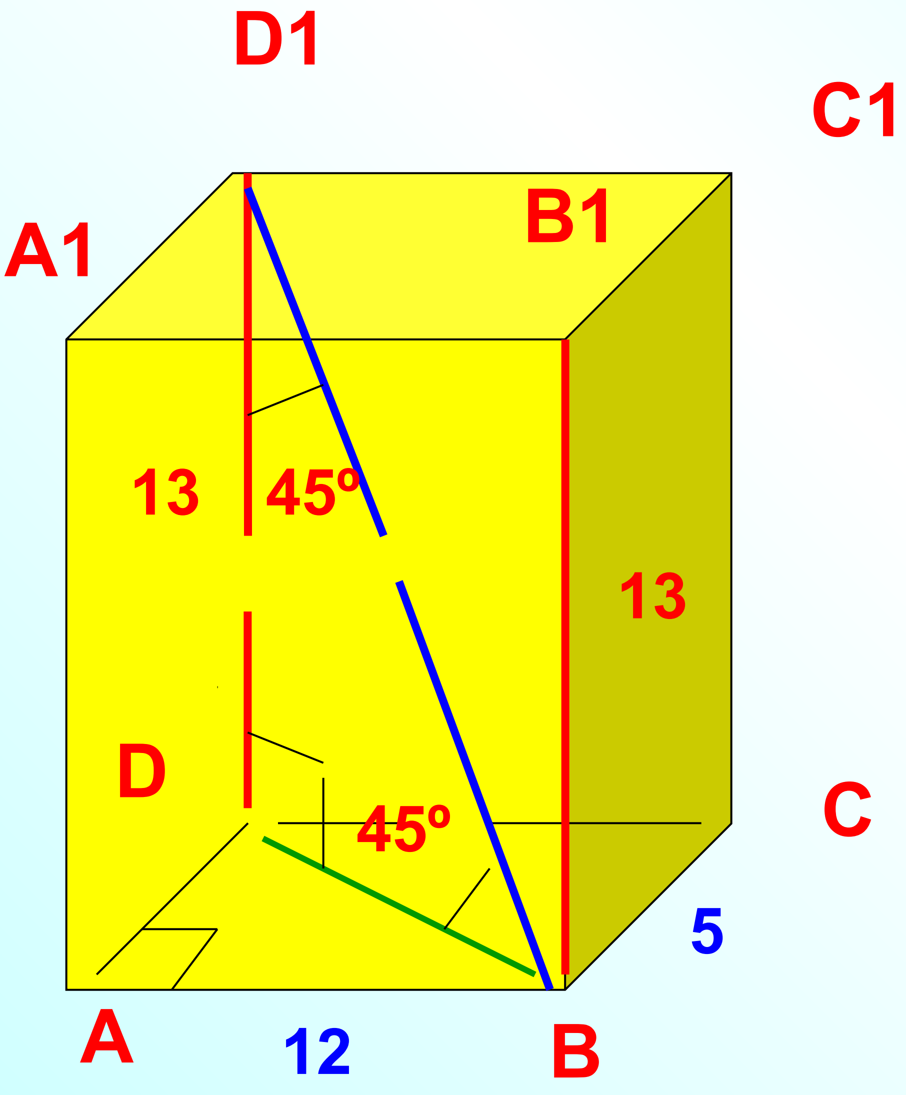
1) Доказать, что Δ BDD1- прямоуг.

2) Найти BD из ABCD

3) Из Δ BDD1 найти < DD1B.

4) Из Δ BDD1 найти DD1.

Задача № 219



Решение:

1) Δ BDD1-прямоуг., т.к. DD1$\perp$ пл. ABC (по усл. паралл-д – прямоугольный).

2) Δ ABD – прямоуг.

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ - по т. Пифагора.

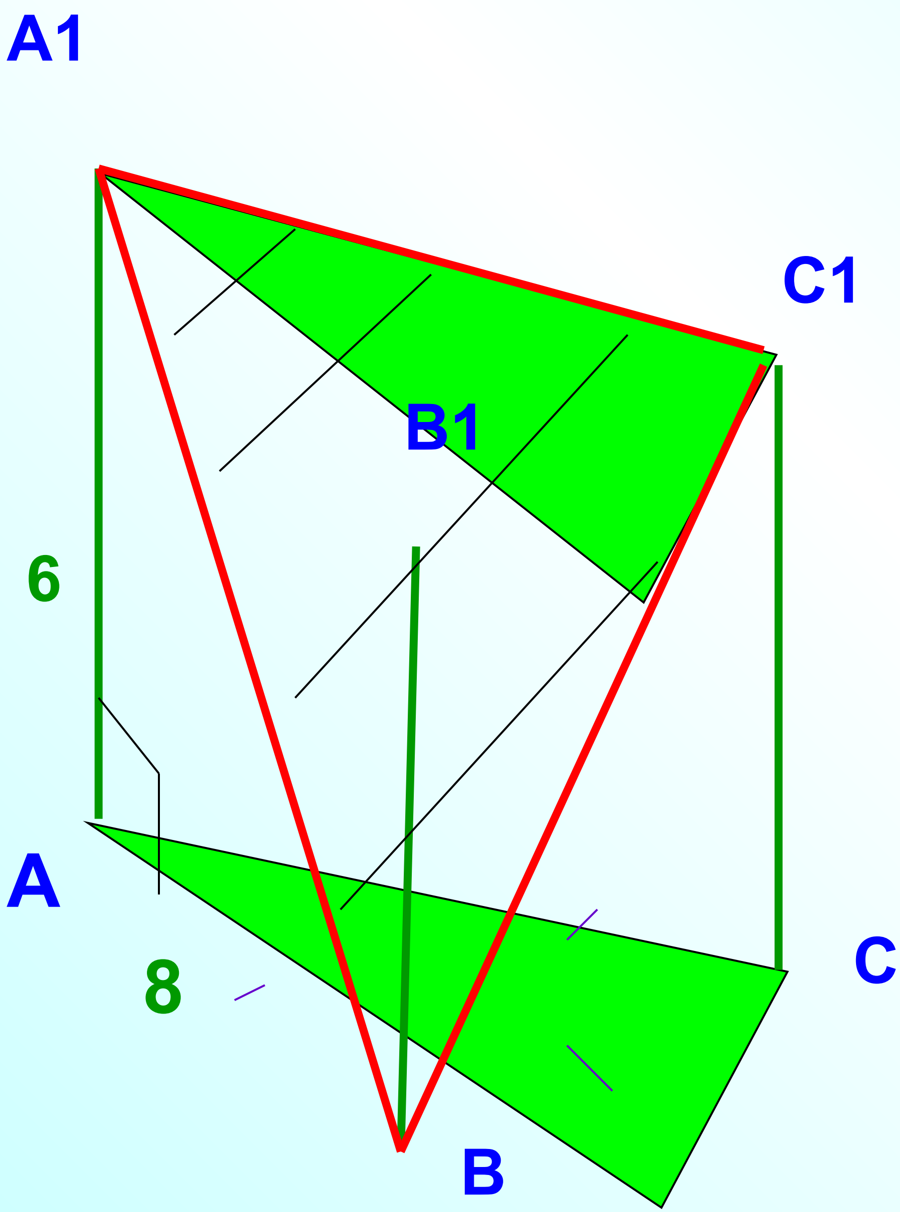
$BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см.

3) $\angle DD1B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

4) Δ BDD1 $\angle B = \angle D1 = 45^\circ \rightarrow$ Δ BDD1- равнобедренн.

DD1= DB = 13 см =BB1.

Задача № 221



План:

1) доказать:

ΔAA_1B- прямоуг.

2) найти A_1B;

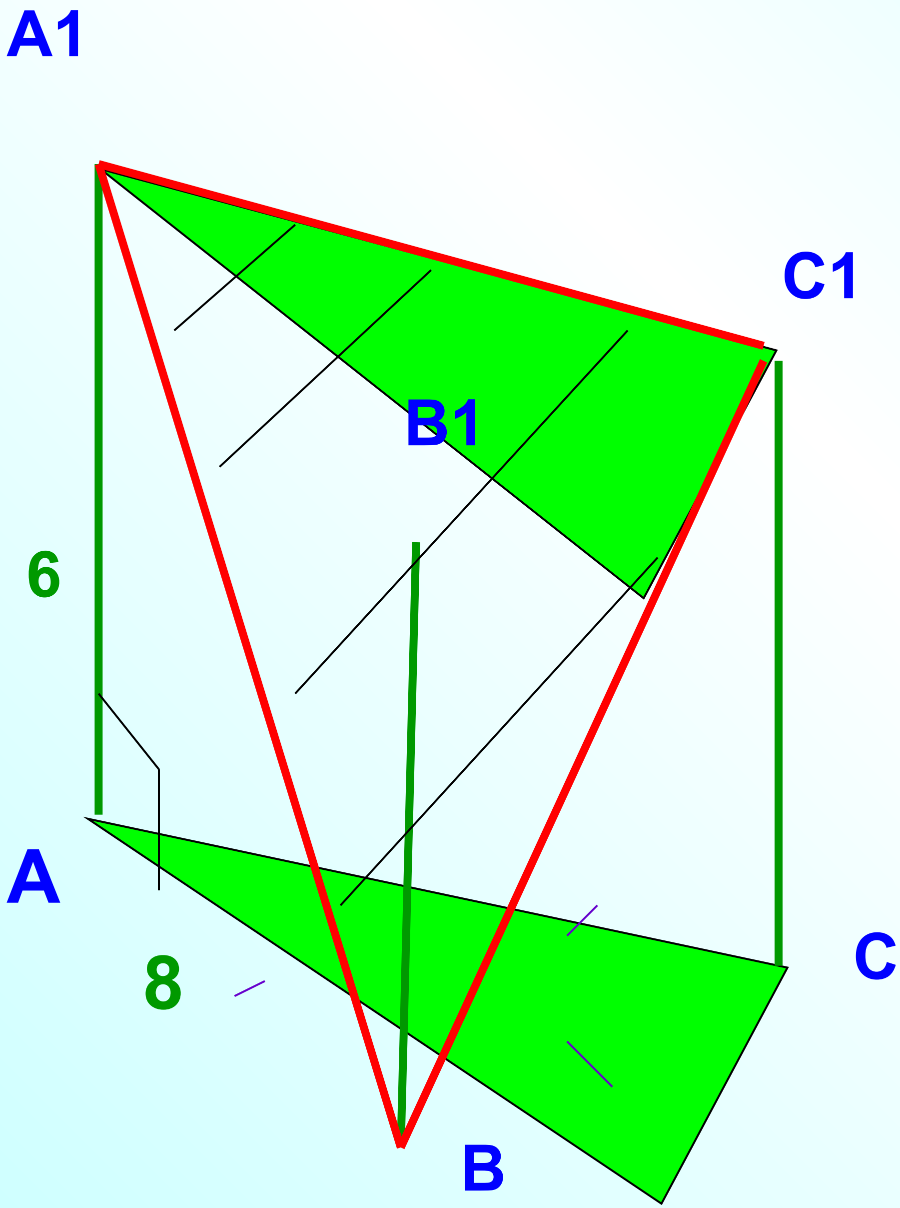
3)доказать: $A_1B=BC_1$;

4) найти по формуле Герона $S\ \Delta A_1C_1B$

$S=\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$

где $p=1/2(a+b+c)$.

Задача № 221



Решение:

1) ΔAA_1B- прямоуг.
Т.к. $AA1 \perp$ пл. ABC
(по усл. призма правильная)

2) $A_1B=\sqrt{AA1^2+AB^2}$- по
Т. Пифагора.
$A1B=\sqrt{6^2+8^2}=10$

3) A1B=BC1; т.к. $\Delta AA1B=\Delta BCC1$
- по двум катетам.

4) по формуле Герона S ΔA_1C_1B
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
где $p=1/2(a+b+c)=1/2(10+10+8)=14$
$S=\sqrt{14*(14-10)*(14-10)*(14-8)}=$
$=\sqrt{14*4*4*6}=4*2\sqrt{21}=8\sqrt{21}$ см²

Ответ: $S=8\sqrt{21}$ см²