Лекция 1

Тема: Дифференциальное исчисление функции одной переменной

§1. Производная функции

ОПР. **Производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует и конечен

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Для обозначения производной функции используют символы: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}.$

Функция, имеющая конечную производную в точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке, а операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференци-руемой в этом промежутке.

Связь дифференцируемости и непрерывности функции

Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение неверно, т. е., если функция непрерывна в точке, то она может быть не дифференцируемой в этой точке.

Например, функция $y = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке ***x = 0***.

1.1. Техника дифференцирования

Правила дифференцирования

Пусть $u=u(x)$ $v=v(x)$ и дифференцируемые функции $c=const$ независимой переменной ***x***,

1. $(c)'=0,\ (x)'=1$	**4.** $(uv)'=u'v+uv'$
2. $(cu)'=cu'$	5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$	6. $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

Таблица производных

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u',\qquad \alpha = const$	
2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u'$	3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$
4. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$	5. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\, u'$
6. $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}u'$	7. $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u\ln a}u'$
8. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$	9. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

10. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$	**11.** $\left(\arccos u\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
12. $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$	13. $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$
14. $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u}u'$	15. $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = \dfrac{-1}{1+u^2}u'$

Пример

Найти производные первого порядка функций

1).

$$y = 2x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} + 4$$

Решение. Применим формулу производной суммы

$$y' = 2\left(x^3\right)' + 3\left(\sqrt{x}\right)' - \frac{1}{2}\left(x^{-2}\right)' + (4)' =$$

Далее используем формулы:

(1): $(x^3)' = 3x^2 \cdot (x)' = 3x^2$

(3): $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(1):

$$(x^{-2})' = -2x^{-2-1} \cdot (x)' = -2x^{-3}$$

Правило (1): $(4)' = 0$ Тогда:

$$y' = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \left(-2\right) x^{-3} + 0 =$$

$$= 6x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3}.$$

2) $y = 2^x \cdot \cos x;$

Решение. Используем правило дифференцирования произведения

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$y' = \left(2^x \cdot \cos x\right)' = \left(2^x\right)' \cos x + 2^x \left(\cos x\right)'$$

Далее, по таблице производных имеем:

Формула (5): $\left(2^x\right)' = 2^x \ln 2$

Формула (10):

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$y' = \left(2^x \cos x\right)' = \left(2^x\right)' \cos x + 2^x \left(\cos x\right)' =$$

$$= 2^x \ln 2 \cos x + 2^x \left(-\sin x\right) = 2^x \left(\ln 2 \cos x - \sin x\right).$$

3) Производная сложной функции.

Вычислить производную $y = \sin 7x;$

Решение. Используем формулу

$$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$$

В данном случае $u = 7x$ Тогда:

$$y' = (\sin 7x)' = \cos 7x \cdot (7x)' =$$

$$= \cos 7x \cdot 7 \cdot (x)' = 7\cos 7x$$

1.2. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке ***x*** производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$

Тогда $$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Причем, $\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\text{á.ì .ô}} + \underbrace{\alpha(x)\Delta x}_{\text{á.ì .ô}}.$

Слагаемое $f'(x)\Delta x$ - **главная часть приращения функции** .

ОПР. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть приращения функции, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается :

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Так как дифференциал независимой переменной ***x*** равен приращению этой переменной: $dx = x'\Delta x = \Delta x$, то

$$dy = f'(x)dx$$

1.3. Геометрический смысл производной

Производная от функции $y = f\left(x\right)$ в точке x_0 **равна угловому коэффициенту касательной** к графику функции в точке с абсциссой x_0:

$$k_{\text{êàñ}} = tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

1.4. Уравнения касательной и нормали

Уравнение касательной можно найти, используя уравнение прямой, проходящей через данную $(x_0; f(x_0))$ точку в заданном направлении k: $y - y_0 = k(x - x_0)$

А так как $k = f'(x_0)$

то $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

уравнение касательной.

Уравнение нормали

Прямая перпендикулярная касательной в точке касания называется нормалью к кривой.

Угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности:

$$k_N = -\frac{1}{k_K}$$

Потому **уравнение нормали** в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Экономический смысл производной. Эластичность

Пусть функция ***u=u(t)*** выражает количество произведенной продукции ***u*** за время ***t***. Необходимо найти производи-тельность труда в момент t_0.

времени

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$

количество произведенной продукции изменится от $u_0 = u(t_0)$ до

$$u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$$

Средняя производительность труда за этот период времени:

$$z_S = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

ОПР. Производительностью труда в момент t_0 называется предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$u'(t_0) = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}$$

ОПР. Эластичностью функции *y=f(x)* в точке ***x*** называется предел

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = f'(x)\frac{x}{y}$$

Эластичность функции показывает на сколько процентов изменится зависимая переменная ***y***, если независимая переменная ***x*** получит приращение в 1%.

В анализе и прогнозах ценовой политики применяется понятие эластичности спроса.

Пусть ***D=D(p)*** – функция спроса (зависит от цены товара ***p***). Тогда под эластичностью спроса понимается процентное изменение спроса при изменении цены товара на 1%.

Различают следующие виды спроса:

1. **Если $|E(D)|>1$**, то спрос считается **эластичным**;
2. **Если $|E(D)|=1$**, то спрос **нейтрален**;
3. **Если $|E(D)|<1$**, то спрос **неэластичен**;
4. **Если $E(D)=0$**, то спрос **совершенно неэластичен**.

Упражнение

Пусть функция спроса задана зависимостью

$$D(p) = 5e^{-2p^2}.$$

Найти при каких значениях цены ***p*** спрос будет эластичным.