

МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ И  
СОЦИАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ РЕСПУБЛИКИ  
КАЗАХСТАН  
ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ  
ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ



Кафедра: Кафедра «биофизики, информатики и математики»

На тему: «Ошибка измерения. Учет ошибки шкалы прибора и систематических ошибок. Оценка суммарной погрешности».

Подготовил: Темиров А.  
Группа: 304 «А» ОЗР  
Приняла: Сапрыгина. М.Б

# План

## ❖ Введение

1 Ошибка измерения

2. Измерительные шкалы

3. Классификация погрешности

## ❖ Заключение

## ❖ Литература

В основе точных естественных наук лежит **измерение**, под которым понимается процесс количественного сравнения некоторого свойства объекта с мерой этого свойства или со стандартом (эталоном). Измерения делятся на *прямые* и *косвенные*. При прямом измерении результат получается непосредственно из измерения самой величины (например, измерение длины проградуированной линейкой, времени - секундомером и т.д.). Однако прямые измерения не всегда возможны или достаточно точны. В этих случаях прибегают к косвенным измерениям, при которых искомое значение величины находится по известной зависимости между ней и непосредственно измеряемыми величинами. Таким образом, с точки зрения эксперимента, любое косвенное измерение сводится к совокупности прямых измерений (например, нахождение плотности тела по измеренным его массе и геометрическим размерам, скорости - по величине пути, пройденного телом за известное время и т.д.).

**Точность измерений** отражает близость результатов к истинному значению измеряемой величины. Разность между результатом измерения некоторой величины  $x_{\text{изм}}$  и его истинным значением  $x_{\text{ист}}$  называется **абсолютной погрешностью** (ошибкой) измерения  $\Delta x$ :

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}} \quad (1)$$

Однако качество измерения обычно характеризуется **относительной погрешностью** (ошибкой)  $\delta x$ , которая представляет собой отношение (часто выраженное в процентах) абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}} \quad (2)$$

Действительно, одна и та же абсолютная погрешность в 1 г, не существенная при измерении массы винтовки, становится неприемлемой при определении массы пули. Это связано с тем, что в первом случае относительная погрешность измерения составляет величину порядка  $10^{-4}$  (или 0,01%), а во втором - уже десятки процентов.

# Измерительные шкалы

Рассмотрим подробнее особенности различных измерительных шкал. **С. Стивенсом** предложена классификация из четырех типов шкал измерения:

- 1) номинативная (номинальная, шкала наименований);**
- 2) порядковая (ординальная);**
- 3) интервальная (шкала равных интервалов);**
- 4) шкала равных отношений.**

**ШКАЛА НАИМЕНОВАНИЙ** (от лат. *nomen* – имя, название) используется для идентификации элементов множества. На этой шкале определены две операции - «равно» и «не равно». Номинальная шкала допускает те преобразования, которые, у одинаковых объектов оставляет одинаковые имена (идентификаторы). Это могут быть имена собственные, названия городов и т.д. Рассмотрим пример трех множеств из пяти элементов. Первое множество образуют фамилии людей, второе - знаки зодиака, третье - номера комнат. Элементы этих множеств приведены в таблице. Элементы номинальной шкалы.

№	Множество 1 «фамилии»	Множество - 2 «знаки зодиака»	Множество - 3 «номера комнат»
1	Иванов		27
2	Сидоров		81
3	Петров		108
4	Алексеев		312
5	Яковлев		105

Значения на номинальной шкале всего лишь дают возможность отличить один объект от другого. Эти значения не могут быть упорядочены и рассматриваются изолированно друг от друга.

Специально отметим, что числа, приведенные в последнем столбце (Множество - 3), числами не являются. Это «имена» комнат. С ними нельзя, например, выполнить действие сложения:  $27+81=108$ . Тем более, на номинальной шкале нельзя выполнять арифметические операции умножения и деления.

**ШКАЛА ПОРЯДКА**, как и шкала наименований, является качественной, но позволяет не только именовать, но и ранжировать элементы множества. Порядковая шкала допускает только монотонные преобразования, то есть такие, которые не нарушают порядок следования значений измеряемых величин. Самый яркий пример порядковой шкалы - это шкала Мооса для твердости минералов.

При построении шкалы твердости рассуждали следующим образом: тальк - самый мягкий минерал, им ничего нельзя поцарапать, поэтому ему присвоена самая низкая твердость. Гипс царапает тальк, следовательно, он тверже и ему присваивается твердость, равная двум. В свою очередь, кальцит царапает гипс, значит, он еще тверже и ему приписывается твердость 3. Самым твердым оказывается алмаз, который царапает все минералы и ни один минерал не царапает его.

Минерал	Твердость по Моосу
Тальк	1
Гипс	2
Кальцит	3
Флюорит	4
Апатит	5
Ортоклаз	6
Кварц	7
Топаз	8
Корунд	9
Алмаз	10

упорядочены. В рассмотренном примере минералы строго упорядочены по своей твердости. Пусть мы хотим определить твердость неизвестного минерала. Проведем серию испытаний, пытаясь поцарапать известные минералы. Допустим, оказалось, что мы можем поцарапать кварц, но не можем корунд. Значит наш минерал тверже кварца, но мягче корунда. Следовательно, твердость нашего минерала равна 8. Отметим, что мы не знаем *насколько* наш минерал тверже кварца, такую информацию порядковая шкала не содержит.

### Другой пример - это школьные отметки

Уровень знаний	Отметка
Совершенно неудовлетворительно	1
Неудовлетворительно	2
Удовлетворительно	3
Хорошо	4
Отлично	5

Отметки имеют свои имена (1, 2, 3, 4, 5) и упорядочены. Нам известно, что 4 означает более высокий уровень знаний, чем 3, но не известно насколько. С отметками нельзя выполнять арифметические операции:  $5-4=1$ ,  $3-2=1$ ,  $5-4=3-2$  и т.д.. Ясно, что различие в знаниях между отличником и хорошистом не такое же, как между троечником и двоечником. Это общеизвестный факт. С другой стороны в образовательных учреждениях широко практикуется средний балл. Для определения среднего балла складывают, например, все отметки за год и делят на их количество. Это недопустимо. Ни складывать, ни делить отметки нельзя, так как они расположены на порядковой шкале\*.



только ранжировать элементы множества, но и задает известные интервалы между элементами. Интервальная шкала допускает линейные преобразования вида:

$$y = a \cdot x + b$$

где  $a$  - положительное число,  $b$  - положительное или отрицательное число. Изменение  $a$  приводит к изменению масштаба шкалы, изменение  $b$  вызывает сдвиг по шкале, то есть положение нуля на интервальной шкале не определено. Интервальные шкалы используются, например, для измерения температуры. При этом температурные интервалы равны, а положение нуля зависит от вида температурной шкалы, например по Цельсию, или по Фаренгейту. Если это неизвестно, то для описания закономерностей следует использовать отношение интервалов:

$y_1 - y_2$	=	$(ax_1 + b) - (ax_2 + b)$
$y_3 - y_4$		$(ax_3 + b) - (ax_4 + b)$

Принцип построения большинства интервальных шкал основан на правиле «трех сигм»: примерно 97,7—97,8 % всех значений признака при нормальном его распределении укладываются в диапазон  $M \pm 3\sigma$ . Можно построить шкалу в единицах долей стандартного отклонения, которая будет охватывать весь возможный диапазон изменений признака, если крайний слева и крайний справа интервалы оставить открытыми.

Американский психолог Р. Кеттелл предложил шкалу стенов — «стандартных десятков». Построение такой шкалы начинается с определения среднего арифметического значения в «сырых» баллах, которое принимается за точку отсчета. Вправо и влево отмеряются интервалы, равные  $1/2$  стандартного отклонения. Справа от среднего значения будут располагаться интервалы, равные 6, 7, 8, 9 и 10 стенов, слева — интервалы, равные 5, 4, 3, 2 и 1 стенов. На оси «сырых» баллов размечаются границы интервалов в единицах «сырых» баллов. Иногда в шкале стенов за разное количество «сырых» баллов будет начисляться одинаковое количество стенов. Шкалу стенов можно построить по любым данным, измеренным по крайней мере в порядковой шкале, при объеме выборки  $n > 200$  и нормальном распределении признака.

**ШКАЛА ОТНОШЕНИЙ** допускает линейные преобразования вида:

$$y = a \cdot x$$

Шкала отношений, в отличие от интервальной шкалы, обладает точкой нулевого отсчета. Этот тип шкал используется для измерения массы тела, его длины и так далее. Например, длина может измеряться в метрах, футах, парсеках - это определяется масштабным множителем  $a$ . Если нам неизвестны единицы измерения, то для описания закономерностей следует использовать *отношение* величин, которое является инвариантом для шкалы отношений.

# Классификация погрешностей

Погрешности измерения классифицируются:

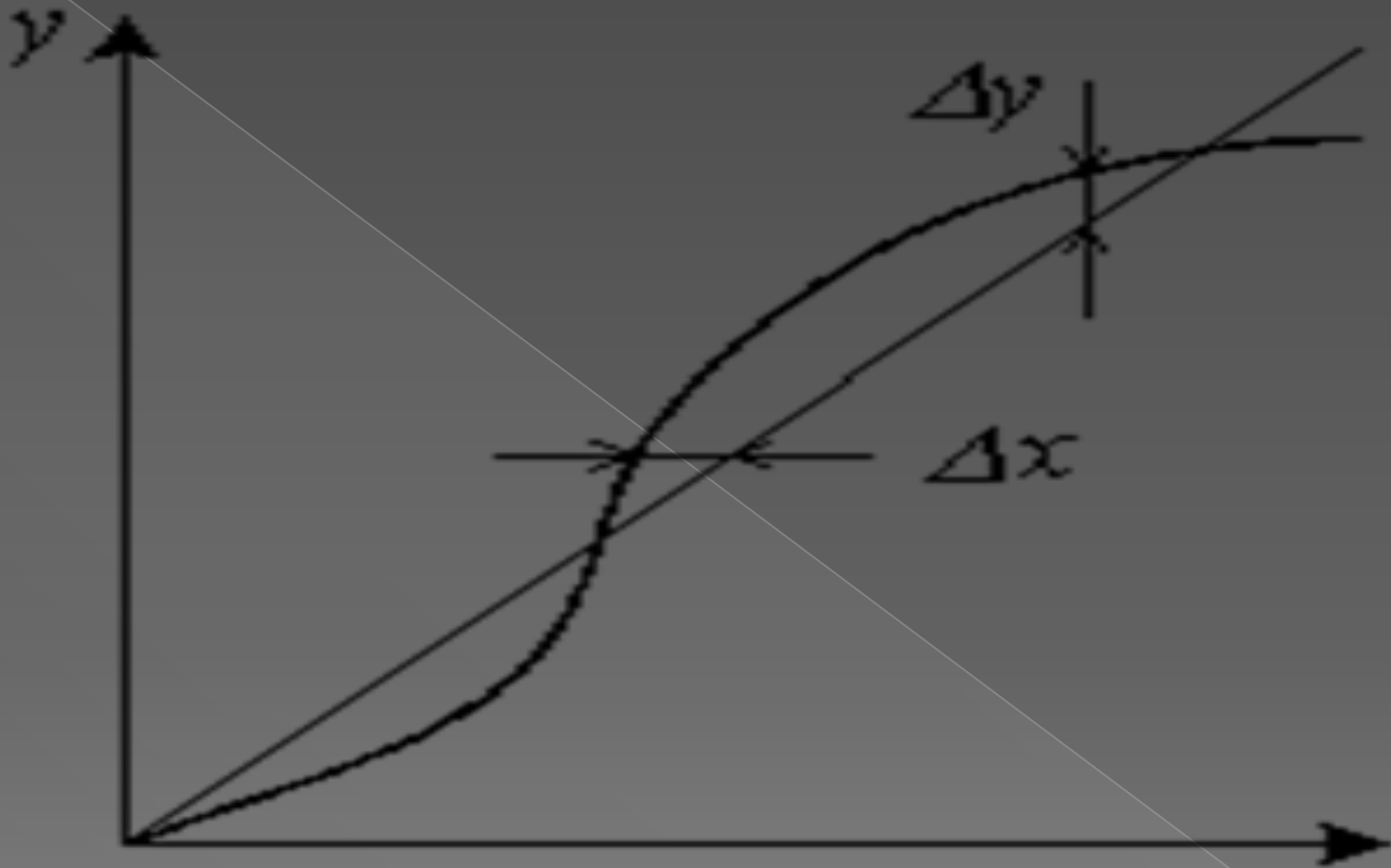
1) По способу выражения

- **абсолютные**

$$\Delta = X - X_{\text{ист}}$$

- **относительные**

$$\delta = \frac{\Delta}{X_{\text{ист}}} \cdot 100\%$$



**Абсолютная  
погрешность**

□ Приведенная погрешность – погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Вычисляется по формуле

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{X_n}$$

где  $X_n$  – нормирующее значение, которое зависит от типа шкалы измерительного прибора и определяется по его градуировке:

– если шкала прибора односторонняя, то есть нижний предел измерений равен нулю, то  $X_n$  определяется равным верхнему пределу измерений;

– если шкала прибора двухсторонняя, то нормирующее значение равно ширине диапазона измерений прибора.

Приведенная погрешность является безразмерной величиной, либо измеряется в процентах).

## 2) По источнику возникновения

- *инструментальные* – составляющая погрешности, которая зависит от свойств СИТ (класс точности, цена деления и т.д.). Этот вид погрешности легко предсказуем и заранее просчитываемый, и как следствие можно его учесть при помощи ввода поправок, либо другим способом.

- *методические* – составляющая общей погрешности измерения, которая обусловлена несовершенством метода измерения. Так, например, при измерении сопротивления на участке цепи при помощи омметра, величина измеренного сопротивления будет иметь методическую погрешность, за счет входного сопротивления самого омметра.

- *личные, или субъективные* - погрешность оператора

### 3) По закономерностям возникновения и проявления

- *систематические*  $\Delta_{\text{сист}}$  – составляющие общей погрешности измерения, которая остается постоянной, либо закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины. Систематическую погрешность можно учесть при большом количестве повторных измерений ( $\rightarrow 50$ ) одной величины, произведенных при одинаковых условиях. Существует много методов снизить систематическую погрешность, если это нужно.

- *случайные*  $\Delta$  - составляющая общей погрешности измерения, которая изменяется случайным образом как по величине и по знаку при повторных измерениях одной и той же величины.

Причины возникновения случайных погрешностей могут быть самые различные: конструктивные недостатки и неточности приборов, случайные внешние колебания случайных величин (к примеру, колебания температуры окружающей среды), ошибки оператора, шумы, вибрации, нестабильность питания приборов, внешние колебания электро – магнитных полей и много др. Учесть появление случайных погрешностей невозможно, но они (согласно теории вероятностей) имеют пару очень полезных особенностей:

а) чаще возникают маленькие случайные погрешности, чем большие

б) одинаково часто возникают одинаковые по модулю, но противоположные по знаку случайные погрешности



Из этих свойств можно сделать вывод, что при количестве измерений  $n \rightarrow \infty$  случайную погрешность можно исключить:

$$\bar{X} = X_{\text{ист}}$$

$\bar{X}$  - среднее арифметическое всех результатов измерений

однако, поскольку не возможно чтобы количество измерений было бесконечным, то при большом количестве измерений

$$\bar{X} \approx X_{\text{ист}}$$

- грубая погрешность – это погрешность, которая существенно превышает ожидаемую в данных условиях погрешность.

Причинами возникновения грубой погрешности может быть:

- скрытый метрологический отказ прибора (или эталона, или прибора, при помощи которого производится измерение) – именно с целью выявления скрытых метрологических отказов приборов производятся периодические поверки и калибровки
- ошибка оператора
- резкое внезапное изменение внешних факторов.

Результаты измерений, которые получены с грубой погрешностью называются промахом, и должны быть исключены из результатов измерений.

- Провести проверку на присутствие в выборке грубых ошибок - промахов. Обычно для этой цели применяют Q-критерий. Примечание: Если объем выборки достаточно велик (30 или более значений), можно провести проверку на подчинение результатов закону нормального распределения - по критерию Пирсена.

- Рассчитать среднее значение

- Рассчитать дисперсию и стандартное отклонение

- Оценить доверительный интервал по критерию Стьюдента

**Пример:**

В результате определения содержания алюминия в сплаве получены следующие значения (в % масс): 7.48, 7.49, 7.58, 7.47, 7.50. Нужно рассчитать среднее и доверительный интервал.

**Решение:**

Сначала проверяем на промах крайние значения. Наибольшее значение - 7.58. По Q-критерию:

$Q = (7.58 - 7.50) / (7.58 - 7.47) = 0.727$ . Оно больше табличного критического значения  $Q_{критич}(n = 5) = 0.64$ . Вывод - значение 7.58 является промахом, отбрасываем его. Убеждаемся, что остальные значения не являются промахами.

Рассчитываем среднее:  $\bar{x} = (7.48 + 7.49 + 7.47 + 7.50) / 4 = 7.485$

и дисперсию:  $V(x) = ((7.48 - 7.485)^2 + (7.49 - 7.485)^2 + (7.47 - 7.485)^2 + (7.50 - 7.485)^2) / (4 - 1) = 0.000167$ .

Число степеней свободы нашей дисперсии на единицу меньше числа значений:  $f = 4 - 1 = 3$ .

Стандартное отклонение вычисляем, извлекая квадратный корень из дисперсии:  $S = 0.01291$

Рассчитываем доверительный интервал, используя табличное значение критерия Стьюдента (t-критерия)

$t(f = 3, p = 0.95) = 3.18$ ,  $\Delta = 3.18 * 0.01291 / 2 = 0.205269$ .

Округляем доверительный интервал до одной значащей цифры:  $\Delta = 0.2$ , и до этого же знака округляем среднее: среднее = 7.5

**Ответ:** 7.5 ± 0.2

#### 4. ПОЛНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Любое измерение наряду со случайными ошибками сопровождается также систематической погрешностью. В первом разделе указывалось, что они обусловлены двумя обстоятельствами. В тех случаях, когда причиной систематических ошибок является несовершенство методов измерения, общих рецептов их устранения не существует, кроме более тщательного продумывания методики эксперимента. Однако систематические погрешности, обусловленные погрешностью используемой аппаратуры можно оценить и включить в общую схему обработки результатов измерения.

Таблица 4

Прибор	предел измерения	точность
Измерительная линейка	1 м	200 мкм
Катетометр	1 м	10 мкм
Штангенциркуль	0,1 м	50 мкм
Микрометр	0,1 м	2 мкм
Измерительный микроскоп	0,2 м	1 мкм
Аналитические весы	200 г	0,2 г

## 2. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 2.1. Доверительный интервал

Задача обработки результатов измерений заключается в том, чтобы определить границы, в которых заключено истинное значение измеряемой величины – **доверительный интервал**<sup>1)</sup>.

Принята следующая форма записи результата измерений какой-либо величины:

$$\xi = (\langle \xi \rangle \pm \Delta \xi) \text{ ед. измерения}, \quad (1)$$

где  $\langle \xi \rangle$  – наиболее вероятное значение измеряемой величины  $\xi$ , а  $\Delta \xi$  – рассчитанная тем или иным способом **погрешность эксперимента**.

### 2.2. Типы измерений

**Прямое измерение.** Измерение называется прямым, если значение физической величины определяется непосредственно с помощью измерительного прибора (считывается со шкалы).

**Косвенное измерение.** Измерение называется косвенным, если физическая величина находится путем вычислений с использованием нескольких прямо (непосредственно) измеренных величин.

## 2.3. Оценка погрешности при прямых измерениях

### 2.3.1. Оценка погрешности измерений

Пусть в результате проведённых в одинаковых условиях прямых измерений физической величины  $x$  был получен набор из  $n$  значений

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Истинное значение измеряемой величины узнать невозможно!

**Цель обработки результатов измерений заключается в том, чтобы дать оценку истинного значения измеряемой величины с указанием допущенной в эксперименте погрешности.**

За наилучшую оценку истинного значения (наиболее вероятное значение) величины  $x$  принимается среднее арифметическое значение результатов измерений:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

Чем больше число измерений, тем ближе среднее арифметическое значение к истинному.

**Погрешность измерений  $\Delta x^{\text{изм}}$  оценивается следующим образом.**

1. Вычисляются **частные отклонения отдельных измерений  $\Delta x_i$ :**

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle. \quad (3)$$

## Суммирование составляющих погрешности измерений.

Как уже указывалось ранее, погрешности измерения обуславливаются различными факторами. В связи с этим суммарная случайная погрешность в общем случае может иметь несколько составляющих. Эту суммарную случайную погрешность можно оценить, проведя многократные наблюдения. Однако на практике не всегда можно провести такую серию многократных наблюдений. В этом случае предварительно оценивают значения математического ожидания и СКО каждой составляющей погрешности, а оценку суммарной погрешности находят расчетным путем. Рассмотрим это на примере.

Пусть имеется две составляющие случайной погрешности измерения. Обозначив индексами «1» и «2» первую и вторую составляющие случайной погрешности, выразим их математическое ожидание и СКО следующим образом:

$$M[\Delta_1] = \Delta \varepsilon_1, \quad M[\Delta_2] = \Delta \varepsilon_2,$$
$$\sigma_{\Delta_1} = \sigma(\Delta_1), \quad \sigma_{\Delta_2} = \sigma(\Delta_2):$$

В этом случае математическое ожидание суммарной погрешности равно:

$$M[\Delta_{\Sigma}] = M[\Delta_1 + \Delta_2] = M[\Delta_1] + M[\Delta_2] = \Delta_{c_1} + \Delta_{c_2}$$

Дисперсия суммарной погрешности определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{\Delta_{\Sigma}} = \sigma_{\Delta_{\Sigma}}^2 &= D[\Delta_1 + \Delta_2] = M[(\Delta_1 + \Delta_2)^2] = M[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2] = \\ &= M[\Delta_1^2] + M[\Delta_2^2] + 2M[\Delta_1\Delta_2] = \sigma^2(\overset{0}{\Delta_1}) + \sigma^2(\overset{0}{\Delta_2}) + 2M[\Delta_1 \Delta_2] \end{aligned}$$



Математическое ожидание произведения двух случайных величин (в данном случае - двух случайных погрешностей) называется корреляционным моментом.

Корреляционный момент определяет степень «тесноты» линейной зависимости между погрешностями. Вместо корреляционного момента часто пользуются коэффициентом корреляции  $r_{\Delta_1 \Delta_2}$ .

$$r_{\Delta_1 \Delta_2} = \frac{M[\Delta_1 \Delta_2]}{\sigma(\Delta_1) \cdot \sigma(\Delta_2)}$$

Пользуясь коэффициентом корреляции, можно записать выражение для дисперсии суммарной погрешности:

$$\sigma_{\Delta_{\Sigma}}^2 = \sigma^2(\Delta_1) + \sigma^2(\Delta_2) + 2r_{\Delta_1 \Delta_2} \cdot \sigma(\Delta_1) \cdot \sigma(\Delta_2)$$

Если погрешности  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  некоррелированные, то  $r_{\Delta_1 \Delta_2} = 0$ , а дисперсия суммарной погрешности определяется по формуле:

$$\sigma_{\Delta_{\Sigma}}^2 = \sigma^2(\Delta_1) + \sigma^2(\Delta_2)$$

В случае, когда СКО составляющих  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  неизвестно, то оценки СКО суммарной погрешности определяют по формуле:

$$S_{\Delta_{\Sigma}} = \sqrt{S_{\Delta_1}^2 + S_{\Delta_2}^2 + 2 \cdot \hat{r}_{\Delta_1, \Delta_2} \cdot S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_2}},$$

где -  $S_{\Delta_1}, S_{\Delta_2}$  - оценки СКО составляющих  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ,

$$S_{\Delta_1} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta_1 - \bar{\Delta}_1)^2}{n-1}}; \quad \bar{\Delta}_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n \Delta_1;$$

$$S_{\Delta_2} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta_2 - \bar{\Delta}_2)^2}{n-1}}; \quad \bar{\Delta}_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n \Delta_2;$$

$$\hat{r}_{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{1}{S_{\Delta_1} \cdot S_{\Delta_2}} \cdot \sum_1^n (\Delta_1 - \bar{\Delta}_1) \cdot (\Delta_2 - \bar{\Delta}_2);$$

Если  $r_{\Delta_1, \Delta_2} > 0$ , то  $\Delta_1$  возрастает при увеличении  $\Delta_2$ .

Если  $r_{\Delta_1, \Delta_2} < 0$ , то  $\Delta_1$  уменьшается при увеличении  $\Delta_2$ .

Если  $r_{\Delta_1, \Delta_2} = +1$ , то СКО суммарной погрешности определяется как сумма СКО первой и второй составляющей,  $\sigma_{\Sigma} = \sigma_{\Delta_1} + \sigma_{\Delta_2}$ .

Если  $r_{\Delta_1, \Delta_2} = -1$  то СКО суммарной погрешности определяется, как разность СКО первой и второй составляющих,  $\sigma_{\Sigma} = \sigma_{\Delta_1} - \sigma_{\Delta_2}$ .

Если суммарная погрешность имеет  $m$  составляющих, то ее дисперсия равна:

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_{\Delta_j}^2 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} r_{\Delta_j, \Delta_k} \cdot \sigma_{\Delta_j} \cdot \sigma_{\Delta_k}.$$

## Погрешность измерения величин

Пусть  $x$  – приближённое значение некоторой величины (например, полученное путём однократного измерения этой величины), а  $x_0$  – её точное значение. **Абсолютной погрешностью** величины называется разность

$$\Delta x = |x - x_0|.$$

### Пример 1

В школе 1254 учащихся. При округлении этого числа до 1200 абсолютная погрешность составляет  $\Delta = |1200 - 1254| = 54$ , а при округлении до 1250:  $\Delta = |1250 - 1254| = 4$ .

### Пример 2

Определите абсолютную погрешность измерения длины точной миллиметровой линейкой.

### Решение

Если деления на линейке нанесены достаточно точно, то систематические ошибки при измерении близки к нулю. В качестве значения измеряемой длины предмета можно взять значение / ближайшей метки линейки.



В том случае, если экспериментатор выполнил измерение аккуратно, истинная длина предмета  $l_0$  может отличаться от измеренной длины  $l$  не более чем на половину деления шкалы, то есть 0,5 мм. Можно записать, что  $l_0 = l \pm 0,5$  мм. Таким образом, абсолютная погрешность в этом случае составляет 0,5 мм.

Ответ. 0,5 мм.

Вообще, если систематические ошибки, возникающие при измерении каким-либо прибором, значительно меньше, чем деления шкалы этого прибора, то в качестве абсолютной погрешности измерения обычно берут половину деления.

### Пример 3

В школе 1254 учащихся. При округлении этого числа до 1200 абсолютная погрешность

$$\frac{54}{1254} \approx 0,043,$$

составляет  $\Delta = |1200 - 1254| = 54$ , относительная погрешность равна или 4,3 %. При округлении до 1250:  $\Delta = |1250 - 1254| = 4$ , а относительная

$$\frac{4}{1254} \approx 0,003,$$

погрешность или 0,3 %.

В научных экспериментах многие величины определяются не непосредственно, а косвенным путём – измерением значений других величин. Так, чтобы найти плотность тела, ученые измеряют его массу, взвешивая на весах, после чего определяют объём тела,

$$\rho = \frac{m}{V}$$

погружая его в жидкость. Плотность выражается через массу и объём тела. Масса и объём, входящие в эту формулу, измеряются с некоторой погрешностью; это означает, что и плотность будет вычислена по формуле с некоторой погрешностью.

Выведем несколько правил, позволяющих рассчитывать погрешности величин.

Абсолютная погрешность суммы двух независимых величин равна сумме абсолютных погрешностей отдельных слагаемых:

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y.$$

Доказательство

Пусть  $x = x_0 \pm \Delta x$ ,  $y = y_0 \pm \Delta y$ .

Тогда  $x + y = y_0 + x_0 \pm \Delta x \pm \Delta y = (y_0 + x_0) \pm (\Delta x + \Delta y)$ .

$(x + y) - (x_0 + y_0) = \pm(\Delta x + \Delta y)$ , откуда

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y.$$

Отметим, что в отдельных измерениях может случиться, что ошибки в измерении величин  $x$  и  $y$  скомпенсируют друг друга, и величина  $x + y$  будет измерена точно. Однако в других случаях эти ошибки усилят друг друга; при оценке же погрешностей измерения нужно рассматривать самый худший из вариантов.

Аналогично можно показать, что то же самое верно для разности двух погрешностей.

Абсолютная погрешность разности двух независимых величин равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого:

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y.$$

#### Пример 4

Вычислите сумму и разность приближённых чисел 0,123 и 0,526.

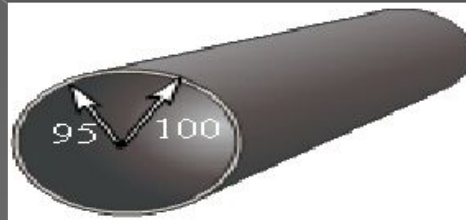
#### Решение

Сложение даёт 0,649. Абсолютная погрешность каждого слагаемого равна 0,0005, значит, абсолютная погрешность суммы  $2 \times 0,0005 = 0,001$ . Следовательно, в найденной сумме возможна ошибка на 1 единицу в третьем знаке после запятой. Вычитание данных чисел даёт:  $0,123 - 0,526 = -0,403$ . Абсолютная погрешность разности также равна 0,001.

Относительные погрешности при сложении и вычитании складывать нельзя. Рассмотрим поучительный пример.

#### Пример 5

Измерения цилиндрической полой изнутри трубы показали, что ее внешний радиус равен 100 см, а внутренний радиус – 95 см. Чему равна толщина стенок трубы?



#### Решение

Если  $R_1 = 100$  см,  $R_2 = 98$  см, то  $h = 2$  см. Абсолютные погрешности при определении радиусов одинаковы и равны  $\Delta(R_1) = \Delta(R_2) = 0,5$  см (если в условии задачи не уточнено, то абсолютная погрешность измерения принимается равной половине последнего знака величины). Абсолютная погрешность расчёта толщины стенки определяется формулой  $\Delta(h) = \Delta(R_1) + \Delta(R_2) = 1$  см.

$$\varepsilon(R_1) = \frac{0,5}{100} = 0,005,$$

Рассчитаем теперь относительные погрешности всех трёх величин:

$$\varepsilon(R_2) = \frac{0,5}{95} \approx 0,0053, \quad \varepsilon(h) = \frac{\Delta(h)}{h} = \frac{1}{2} = 0,5 \gg \varepsilon(R_1).$$

Если оба радиуса были измерены с погрешностью порядка 0,5 %, то погрешность при вычислении их разности – толщины стенок трубы – возросла в 100 раз и составила 50 %!



Относительная погрешность произведения приблизительно равна сумме относительных погрешностей отдельных сомножителей:

$$\varepsilon(xy) \approx \varepsilon(x) + \varepsilon(y).$$

Доказательство

Пусть  $x = x_0 \pm \Delta x$ ,  $y = y_0 \pm \Delta y$ . Тогда  $x \cdot y = (x_0 \pm \Delta x)(y_0 \pm \Delta y) = y_0 \cdot x_0 \pm y_0 \Delta x \pm x_0 \Delta y \pm \Delta x \Delta y$ .

Последним членом можно пренебречь, так как  $\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{y_0 \Delta x} \ll 1$  и  $\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{x_0 \Delta y} \ll 1$ . Тогда

$$x \cdot y = y_0 \cdot x_0 \pm y_0 \Delta x \pm x_0 \Delta y,$$

$$x \cdot y - y_0 \cdot x_0 = \pm y_0 \Delta x \pm x_0 \Delta y,$$

$$\Delta(x \cdot y) = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y.$$

$$\varepsilon(xy) = \frac{y_0 \Delta x + x_0 \Delta y}{x_0 y_0} = \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} = \varepsilon(x) + \varepsilon(y).$$

Можно расширить это правило, расписав его для произведения  $n$  сомножителей.

Относительная погрешность  $n$ -й степени приближённого числа примерно в  $|n|$  раз больше относительной погрешности исходного числа

$$\varepsilon(x^n) \approx |n| \cdot \varepsilon(x).$$

Расчёты показывают, что это соотношение верно не только для натуральных, но и для любых вещественных степеней  $n$ .

$$\varepsilon\left(\frac{x}{y}\right) \approx \varepsilon(x) + \varepsilon(y).$$

В частности,

## Пример 1

Определите, какие ошибки из перечисленных являются случайными:

- 1) ошибка при однократном измерении сопротивления проводника;
- 2) отклонение значения сопротивления проводника от измеренного более точным прибором в процессе измерения сопротивления одного и того же проводника 100 раз в одну и ту же сторону;
- 3) однократное измерение диаметра сосуда;
- 4) отклонение значения внутреннего диаметра одного и того же сосуда при измерении 30 раз в разные стороны.

## Решение

В случае 2) ошибка является суммой систематической и случайной ошибок, потому что отклонение каждый раз происходит в одну и ту же сторону. Если бы отклонение каждый раз происходило ещё и на одну и ту же величину, то ошибка была бы чисто систематической. В случае 4) отклонение зафиксировано в разные стороны – это признак того, что систематическая ошибка, если и есть, то меньше случайной. Про ошибки в 1) и 3) определённно ничего сказать нельзя, так как сделано всего одно измерение.

Случайная ошибка, возникающая при измерении некоторой величины, может теоретически принимать любые значения. Она является непрерывной случайной величиной, подчинённой определённому закону распределения вероятности.

Наиболее часто встречающиеся на практике ошибки распределены по нормальному закону:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\bar{x} = 0, D_x = \overline{x^2} = \sigma^2$$

При этом, как уже было вычислено,

С какой вероятностью измеренная величина будет отклоняться от своего точного значения не больше, чем на  $\sigma$ ? Очевидно с той же самой, с которой ошибка измерения будет находиться в промежутке  $[-\sigma, \sigma]$ . Если случайная ошибка распределена по нормальному закону, то для ответа на этот вопрос необходимо вычислить

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

интеграл. Расчёты показывают, что в 68,27 % отклонения случайной величины, распределённой по нормальному закону, не превышают  $\sigma$ , в 95,45 % –  $2\sigma$ . Наконец, вероятность того, что случайная величина, распределённая нормально, отклоняется от математического ожидания больше, чем на  $3\sigma$ , пренебрежимо мала и составляет 0,27 % – **правило трёх сигм**.

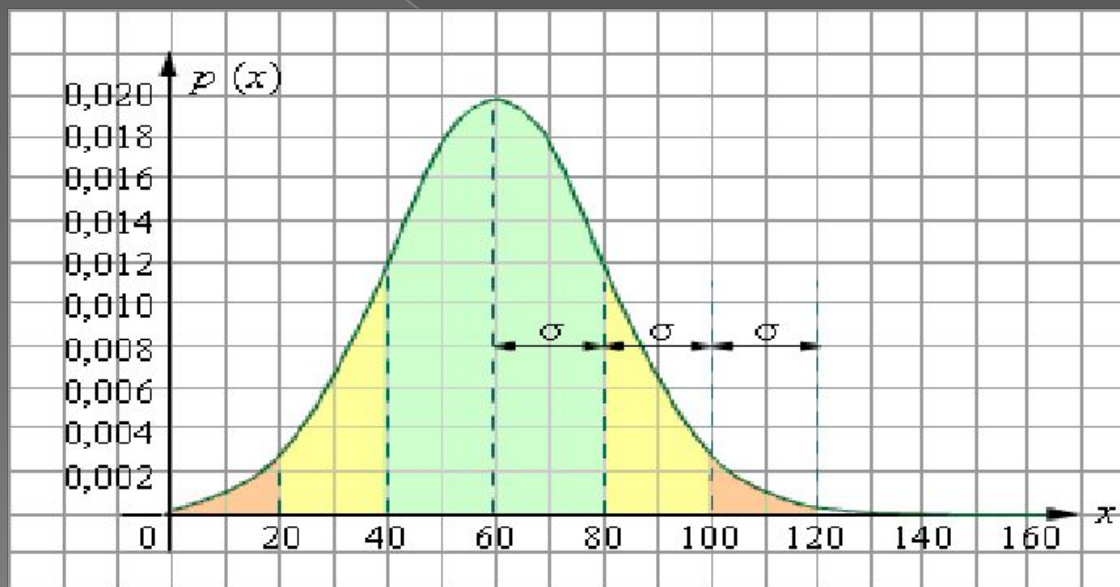


Рисунок 4.3.8.1.  
Правило трёх сигм

# Заключение

- если известна оценка границ погрешности, то ее распределение следует считать равномерным (например, при работе с отдельным прибором, имеющим определенный класс точности, конкретная величина приборной погрешности которого заключена в известных пределах, но неизвестна);
- если же известна оценка среднеквадратичной погрешности, распределение следует считать нормальным.

Применение этого правила позволяет статистически суммировать составляющие систематической погрешности, в том числе приборные погрешности. В соответствии с ним при отсутствии дополнительной информации неисключенные остатки систематической погрешности рассматриваются как случайные величины, имеющие равномерное распределение. При числе слагаемых меньше или равном трем значения погрешностей суммируются арифметически. При числе слагаемых от четырех и более производят квадратичное суммирование, чтобы избежать завышенной оценки.

При определении суммарной погрешности эксперимента в общем случае пользуются эмпирическими формулами для построения композиции распределения случайных и неисключенных систематических погрешностей.

# Литература

1. Линник Ю.В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962;
2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968;
3. Новиков С.М., Жолдакова З.И., Румянцев Г.И. и др. Проблемы прогнозирования и оценки общей химической нагрузки на организм человека с применением компьютерных технологий // Гигиена и санитария. -1997. – №4. – с. 3–8;
4. Новиков С.М. Алгоритмы расчета доз при оценке риска, обусловленного многосредовыми воздействиями химических веществ. – М., 1999;
5. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ N25 от 10.11.97 и Главного государственного инспектора РФ по охране природы №03–19/24–3483 от 10.11.97 «Об использовании методологии и оценки риска для управления качеством окружающей среды и здоровья населения в Российской Федерации»;
6. Оценка рисков для организма человека, создаваемых химическими веществами: обоснование ориентировочных величин для установления предельно допустимых уровней экспозиции по показателям влияния на состояние здоровья. Гигиенические критерии качества окружающей среды, 170. – ВОЗ, Женева, 1995;