Лекция 2-12.
12.3.6. Метод вариации произвольных постоянных.

- Дано линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (*)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция.

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

- Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

- Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

- Будем искать частное решение уравнения (*) в виде

$$u_{чн} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Далее везде примем обозначение $C_1(x)=C_1,\ C_2(x)=C_2.$

$$u_{чн}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2.\quad u'_{чн}=C'_1y_1+C'_2y_2+C_1y'_1+C_2y'_2.$$

Т.к. определению подлежат две функции $C_1(x),\ C_2(x),$ то одним соотношением между ними распорядимся произвольно. Наиболее целесообразно подчинить условию $C'_1y_1+C'_2y_2=0.$ Тогда $u'_{чн}=C_1y'_1+C_2y'_2,$

$u''_{чн}=C'_1y'_1+C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2.$ Подставим $u_{чн},u'_{чн},u''_{чн}$ в уравнение (*)

$$C'_1y'_1+C_1y''_1+C'_2y'_2+C_2y''_2+a_1C_1y'_1+a_1C_2y'_2+a_2C_1y_1+a_2C_2y_2=$$

$$=C'_1y'_{\mathbf{1}}+C'_2y'_2+C_1\left(y_1''+a_1y'_1+a_2y_1\right)+C_2\left(y_2''+a_1y'_2+a_2y_2\right)=f(x),$$

$$C'_1y'_{\mathbf{1}}+C'_2y'_2=f(x).$$

- Получили систему дифференциальных уравнений для определения $C_1(x),\ C_2(x).$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример.

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$y = y_{оо} + u \quad .$$

- $y'' + y = 0,\ r^2 + 1 = 0.\ r_{1,2} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1.$

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

- $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x.$ $\qquad u_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases} \qquad C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},\ C_2' = \sin x.$$

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

$$C_2 = \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) \cos x - \cos x \sin x,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos x.$$

12.3.7 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

- Выше изложенное переносится на дифференциальные уравнения порядка $n > 2$.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (**)$$

где $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x),\ a_n(x),\ f(x)$ - непрерывные функции.

- Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (***)$$

Линейно независимые системы функций.

- **Р**ассмотрим систему функций $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$. Линейной комбинацией их будет $C_1\varphi_1(x)+...+C_n\varphi_n(x)$, где $C_1,...,C_n$ - постоянные.
- **Определение. С**истема функций $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$. называется линейно независимой, если ни одну из этих функций нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.
- Т.е. не может быть равенства $\varphi_1(x)=C_2\varphi_2(x)+...+C_n\varphi_n(x)$.
- В частности $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ линейно независимы, если

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\neq const.$$

Если $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ не есть линейно независимые функции, то они линейно зависимы.

- **Пример.**

$$\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2,\ \varphi_3(x)=x^3,\ \varphi_4(x)=2x-x^2.$$

$$\varphi_4(x)=2\varphi_1(x)-\varphi_2(x).$$

Теорема.

- Если $y_1,\dots,y_n$ суть n частных линейно независимых решений дифференциального уравнения (***), то общим решением этого уравнения будет

$$y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n. \qquad (****)$$

- Если $y_1,\dots,y_n$ - линейно зависимые решения, то, по крайней мере, одно из них выразится через остальные $(n-1)$ и функция y будет зависеть не от n, а от $(n-1)$ произвольных постоянных. Она не даст общего решения дифференциального уравнения.

- Условие линейной независимости частных решений дифференциального уравнения

$$W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \vdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x.$$

- Если заданы начальные условия

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\; y'\big|_{x=x_0} = y_0', \ldots, y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

то, чтобы из общего решения $y_{oo} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ получить частное решение , надо решить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + \ldots + C_n y_{n0} = y_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Здесь $W_0 \neq 0.$

Нулевым начальным условиям соответствует

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$$

- Линейно независимые решения дифференциального уравнения n - го порядка образуют <u>фундаментальную систему решений</u>.

- Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = y_{oo} + u \quad .$$

Теорема.

- Если $y_1,\dots,y_n$ - фундаментальная система решений дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,$$

то решением дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

является функция $C_1(x)y_1+\dots+C_n(x)y_n$, где $C_1(x),\dots,C_n(x)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1'y_1+\dots+C_n'y_n=0, \\ C_1'y_1'+\dots+C_n'y_n'=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x). \end{cases}$$

- Определитель системы есть определитель Вронского.

12.3.8 Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$

- Характеристическое уравнение
$$r^n+a_1r^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}r+a_n=0.$$
- 1) Каждому действительному корню r кратности s соответствует s решений $e^{rx},\ xe^{rx},\ldots,x^{s-1}e^{rx}.$
- 2) Каждой паре комплексно сопряженных корней $r=\alpha\pm\beta i$ кратности s соответствует s решений
$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
- Общее число кратности равно n, поэтому решений будет n.

Пример. $$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1,\ r^4 + 2r^2 + 1 = 0.$$

$$r_1 = -1, \alpha = -1,\ \beta = 0,\ s = 1.$$

$$r_{2,3,4,5} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 2.$$

$$y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

где $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x\right)$- правая часть специального вида,

$P_1(x)$ - многочлен степени m,

$P_2(x)$ - многочлен степени n.

- Частное решение имеет вид

$$u_{чн}=x^ke^{\alpha x}\left(R_1(x)\cos\beta x+R_2(x)\sin\beta x\right),$$

где $R_1(x),\ R_2(x)$ - многочлены степени $l=\max(m,n)$,

k - кратность $r=\alpha\pm\beta i$ среди корней характеристического уравнения.