

Иванов М.Ф.

Феномен динамического хаоса



МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012

Определения

Хаос означает состояние беспорядка и нерегулярности

- **Случайные процессы**
- **Хаотические процессы**

Физическая энциклопедия

“Хаос динамический (хаос детерминированный) – нерегулярное апериодическое изменение состояния динамической системы, обладающее основными свойствами случайного процесса”

Простейшая модель динамического хаоса

а) Линейное отображение

$$x^{n+1} = \sigma(x^n) = 2 \cdot x^n$$

$$\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1^n + x_2^n} = \varepsilon = \text{const}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$0 < x_n < \infty$$

б) Нелинейное отображение

$$x^{n+1} = \sigma(x^n) = \begin{cases} 2 \cdot x^n, & 0 < x^n < 1 \\ 2 \cdot x^n - 1, & 2 \cdot x^n > 1 \end{cases}$$

$$0 < x_n < 1$$

В двоичном представлении:

$$x^n = 0 + a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{2^2} + \dots + a_n \frac{1}{2^n} + \dots$$

Отображение $\sigma(x^n)$ сводится к сдвигу членов мантисы на один разряд влево при отбрасывании первого члена

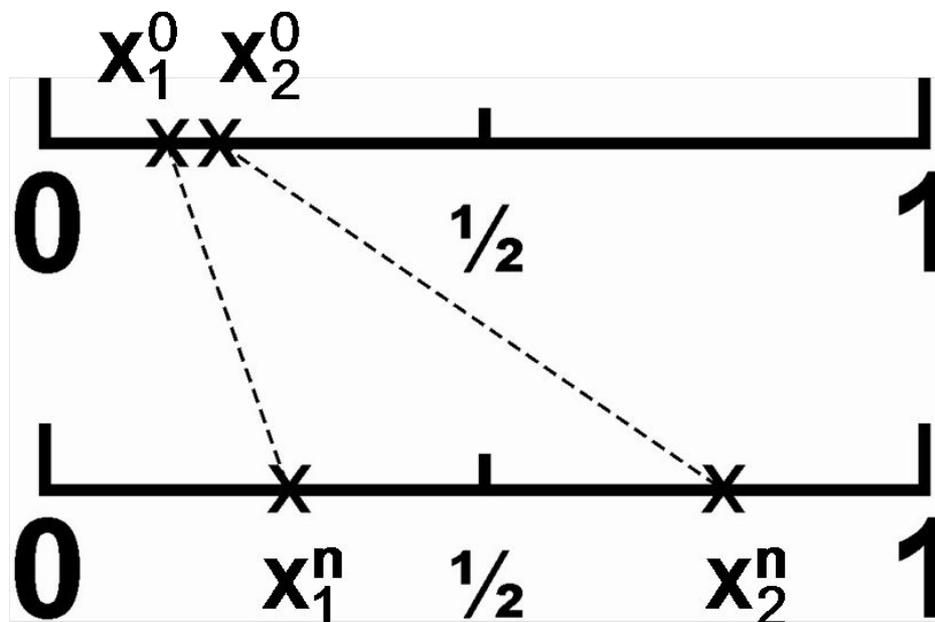
$$x^n = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

$$x^{n+1} = \sigma(x^n) = 0, a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

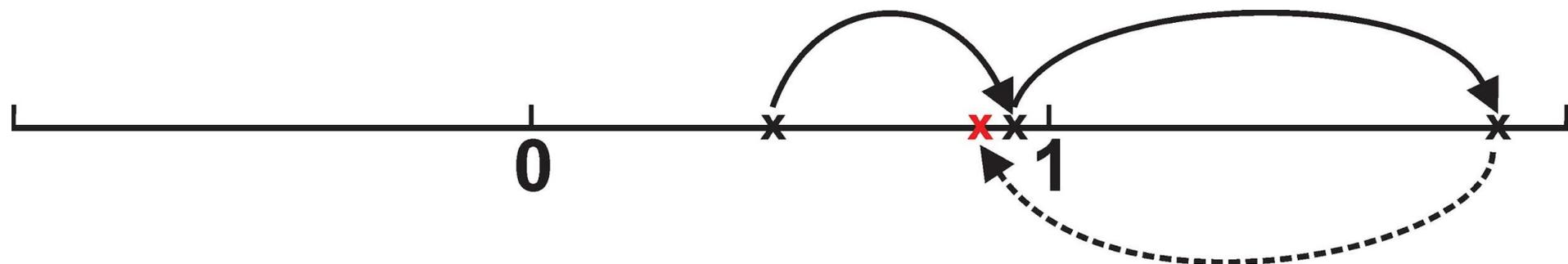
Если $|x_1^0 - x_2^0| = \frac{1}{2^n} \quad (a_{1n} \neq a_{2n})$

то $|x_1^n - x_2^n| = \frac{1}{2}$

Простейшая модель динамического хаоса



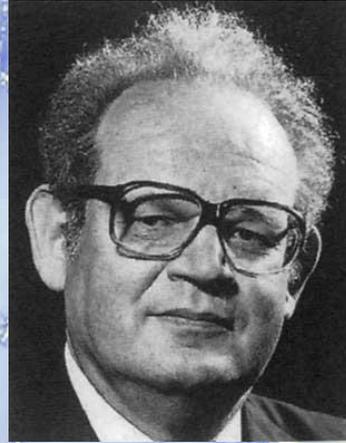
Движение с периодическими граничными условиями



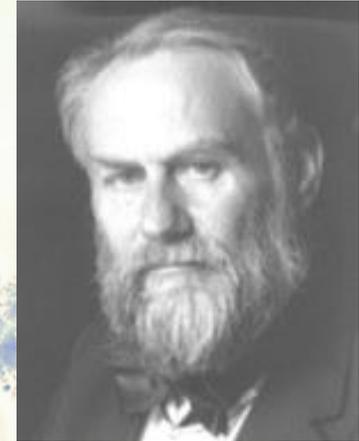
Авторы теории динамического хаоса



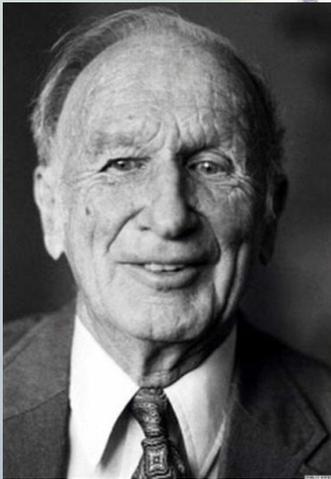
Jules Henri Poincaré
1854 – 1912



Benoît B. Mandelbrot
1924 – 2010



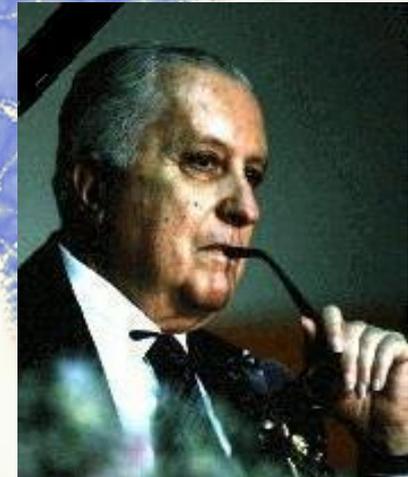
Hermann Haken
1928



Edward Norton Lorenz
1917 – 2008



Mitchell Jay Feigenbaum
1944



Илья Пригожин
1917 - 2003

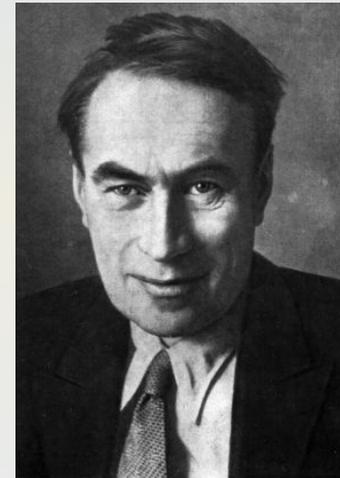
Наука одна – названия разные!

- теория диссипативных структур (И. Пригожин)
- теория динамического хаоса (М. Фейгенбаум)
- синергетика (Г. Хакен)
- нелинейная динамика (С.П. Курдюмов)



**Сергей Павлович
Курдюмов
1928 – 2004**

**Создатель советской и российской
школы синергетики**



**Александр Александрович
Андронов
1901 – 1952**

**Советский физик, академик, создатель
совместно с Л.И. Мандельштамом
научной школы нелинейной динамики**

Основные определения

- Фазовый объем, точки равновесия, критерий устойчивости
- Бифуркации
- Аттракторы
- Показатель Ляпунова – $\lambda(x)$

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = \left| f^{(N)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(N)}(x_0) \right|$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^{(N)}(x_0)}{dx_0} \right|$$

Основные определения

• Хаусдорфова размерность множества

$$D = - \frac{\ln[N(d)/N(d')]}{\ln(d/d')}$$

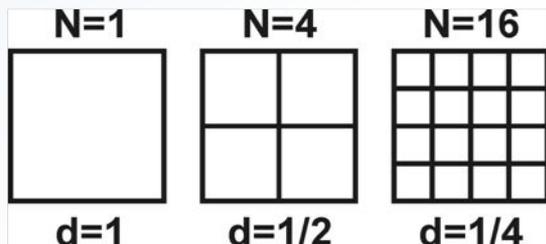
Множество покрывается $N(d)$ “шарами” диаметра d и $N(d')$ – “шарами” диаметра d'

Пример 1: линейный отрезок



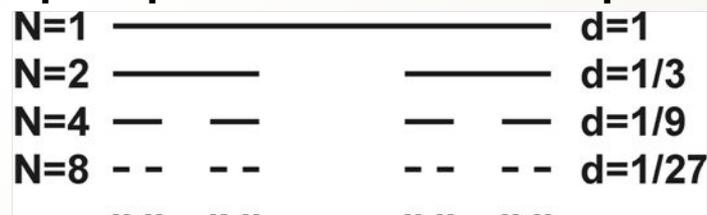
$$D = - \frac{\ln(1/2)}{\ln(2)} = 1.0$$

Пример 3: участок плоскости



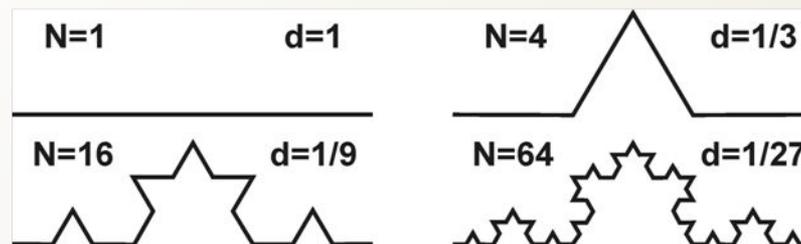
$$D = 2.0$$

Пример 2: множество Кантора



$$D = - \frac{\ln(1/2)}{\ln(3)} \approx 0.63$$

Пример 4: звезда Коха



$$D \approx 1.26$$

Переход к хаосу путем удвоения периода Фейгенбаум, 1978г.

Линейное уравнение роста численности популяции (Мальтус)

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N; \quad N = N_0 e^{\varepsilon t}$$

В дискретном представлении

$$N_{n+1} = (1 + \varepsilon) \cdot N_n$$

Нелинейное уравнение роста численности популяции с учетом замедления роста (П. Ферхульст)

$$\varepsilon' = \varepsilon (1 - N/N_{\max})$$

$$N_{n+1} = [1 + \varepsilon (1 - N_n/N_{\max})] \cdot N_n$$

Переход к новым переменным $x_n = \frac{N_n \varepsilon}{N_{\max} (1 + \varepsilon)}$; $\lambda = 1 + \varepsilon$

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \equiv f(x_n) \quad 0 \leq x_n \leq 1; \quad 0 \leq \lambda \leq 4$$

$f(x_n)$ - функция отображения $x_1 = f(x_0)$; $x_2 = f[f(x_0)]$; $x_n = f^{(n)}(x_0)$

Переход к хаосу путем удвоения периода

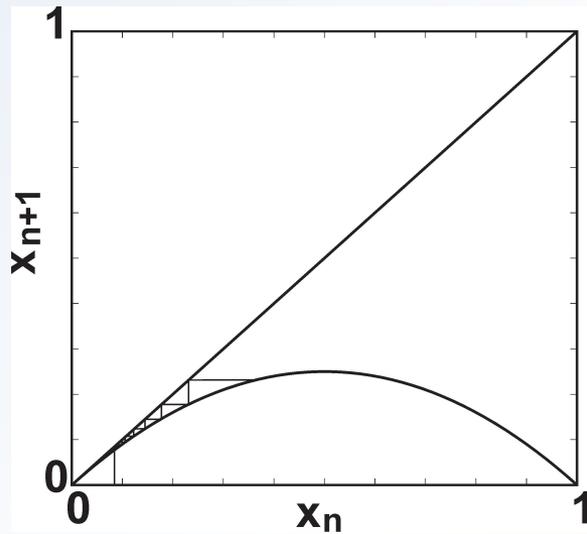
Неподвижные точки $x = f(x)$: $x^* = 0$; $x^{**} = 1 - 1/\lambda$

A: $0 < \lambda \leq 1$ x^* - устойчивая, x^{**} - неустойчивая

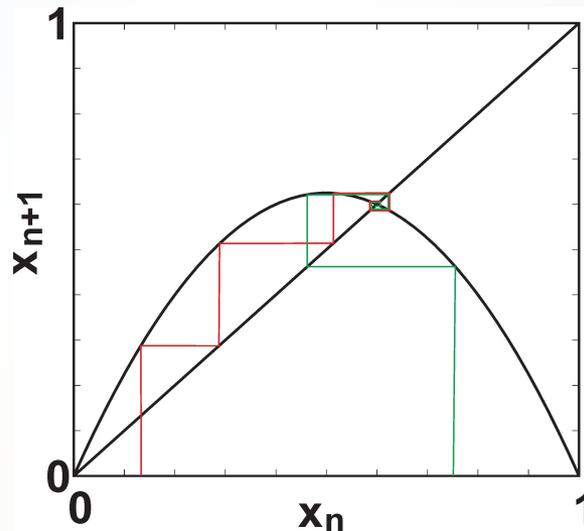
B: $1 < \lambda \leq 3$ x^* - неустойчивая, x^{**} - устойчивая

C: $3 < \lambda \leq 4$ x^* и x^{**} - неустойчивые

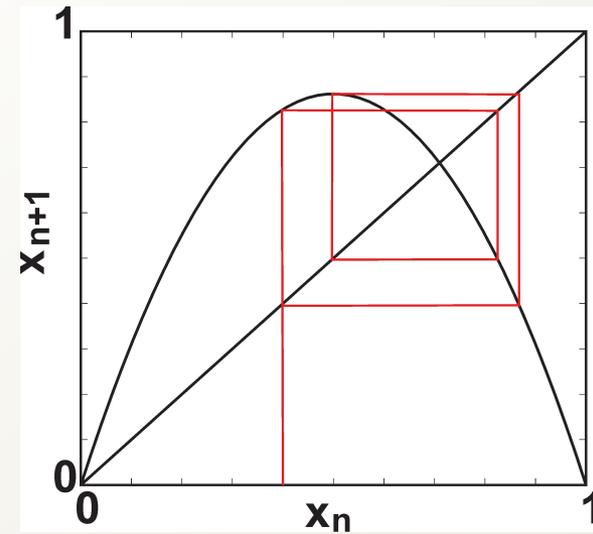
A



B



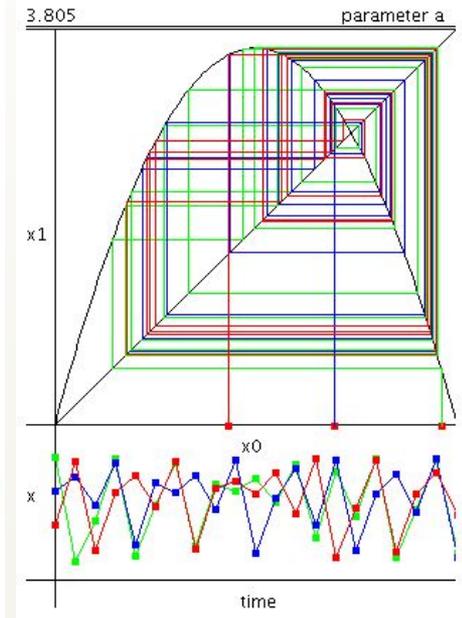
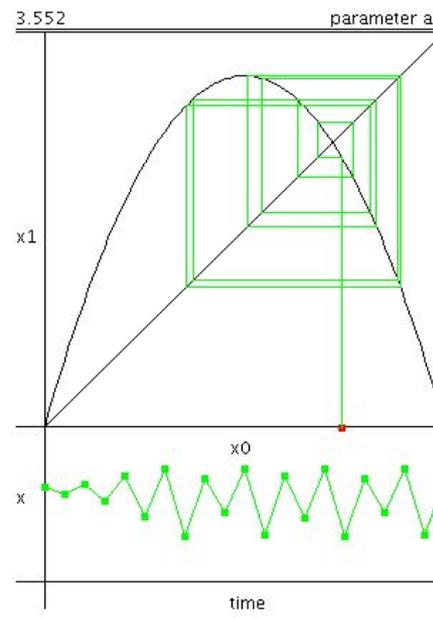
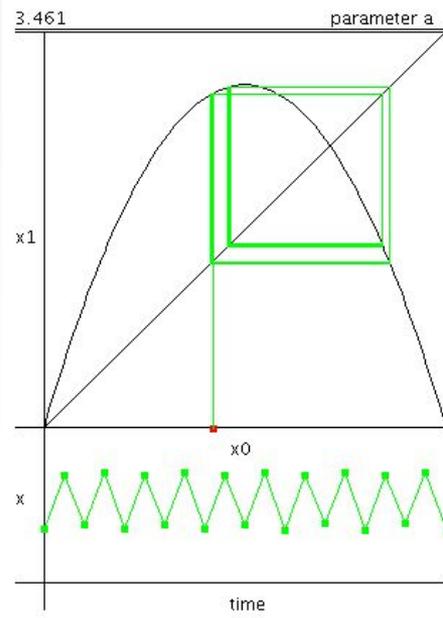
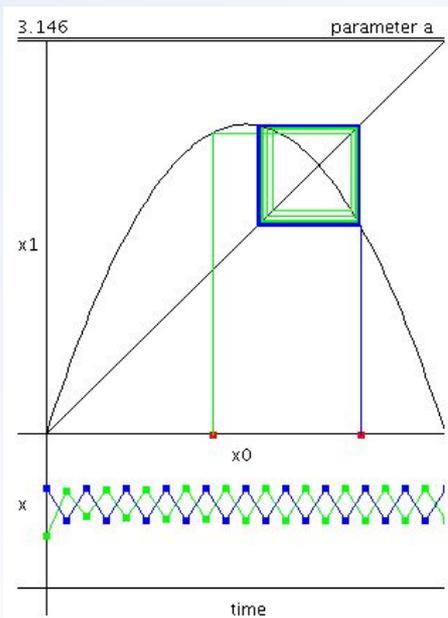
C



Переход к хаосу путем удвоения периода

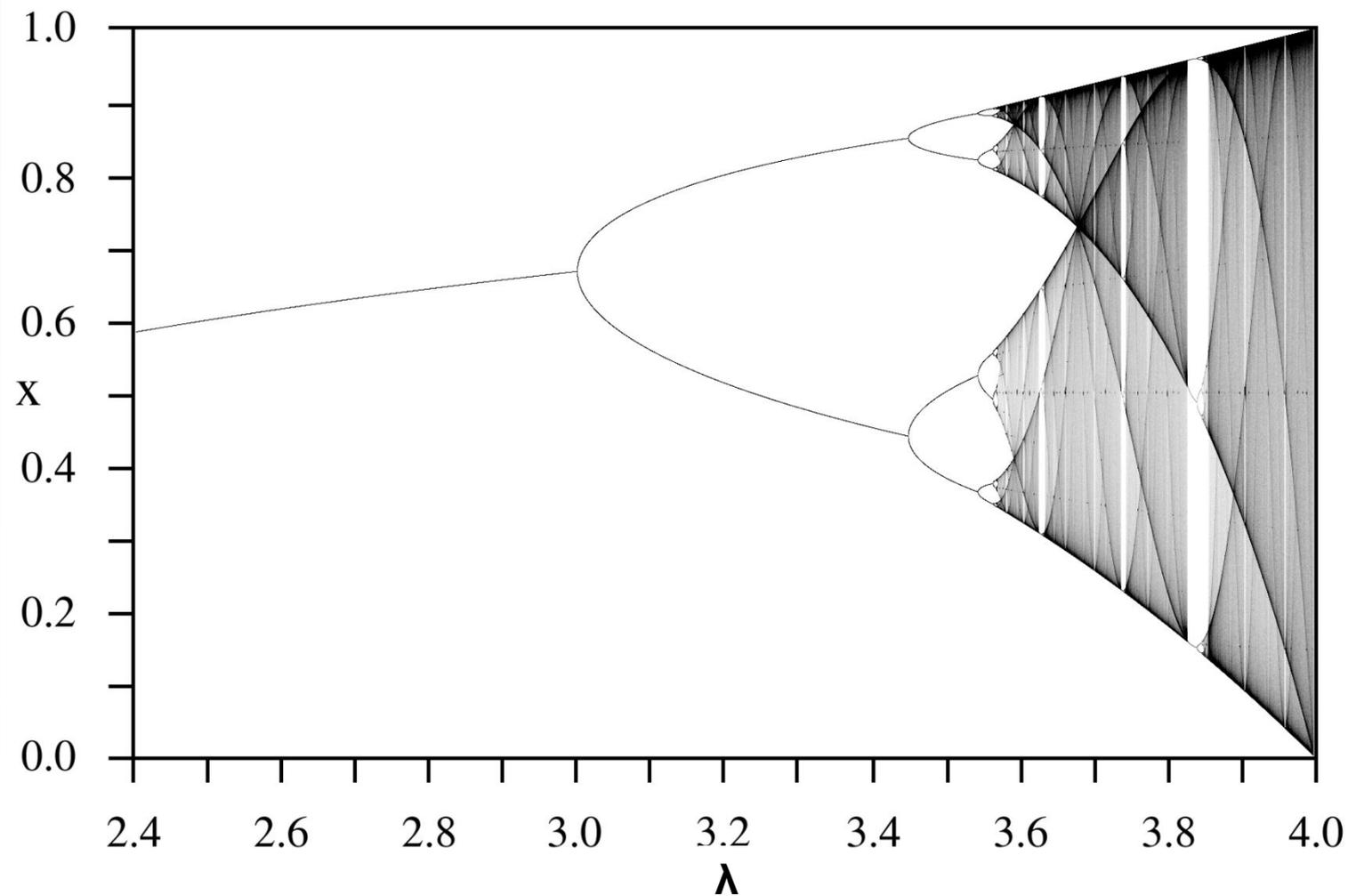
В области изменения параметра $\lambda > 3$ наблюдается каскад удвоения периода.

$\lambda > 3.5699456\dots$ - поведение хаотическое, каскад удвоений периода заканчивается. Малые изменения начальных условий приводят к несопоставимым отличиям дальнейшего поведения системы.



Переход к хаосу путем удвоения периода

Бифуркационная диаграмма логистического отображения



Переход к хаосу путем удвоения периода

Переход к хаосу путем удвоения периода является универсальным для всех отображений единичного интервала с квадратичным максимумом с отрицательной производной Шварца.

Универсальные константы Фейгенбаума

$$\lambda_{\infty} - \lambda_n \sim \delta^{-n} \quad \lambda_{\infty} = 3.4599456\dots$$
$$\delta = 4.6692016\dots$$

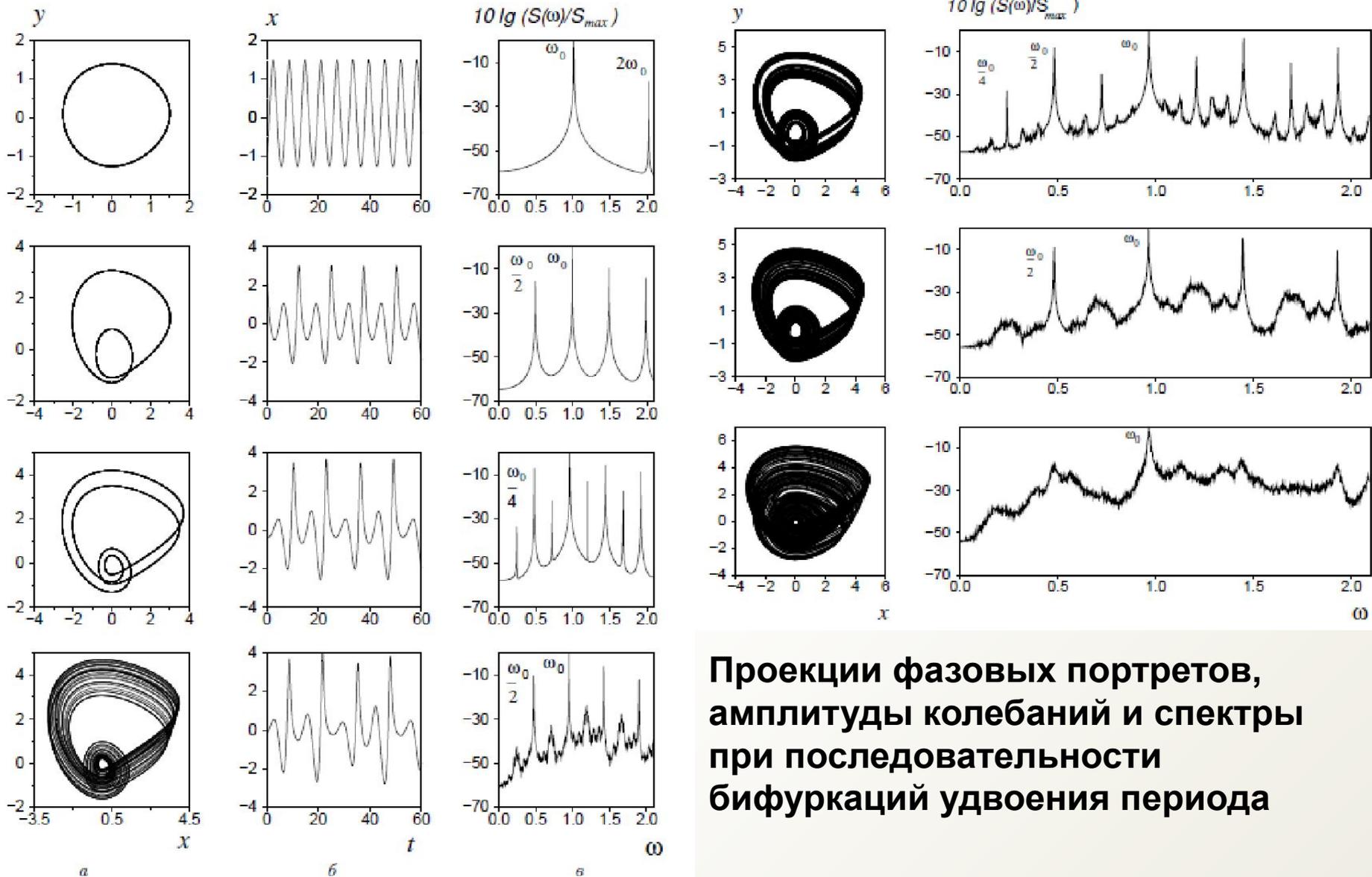
Результаты численных экспериментов

$$f(x) \sim \begin{cases} 1 - \lambda x^4 & \delta = 7.28\dots \\ 1 - \lambda x^6 & \delta = 9.92\dots \\ 1 - \lambda x^8 & \delta = 10.94\dots \end{cases}$$

В реальных физических экспериментах

$$3 < \delta < 5$$

Развитие нелинейных колебаний конического маятника через последовательность бифуркаций удвоения



Проекции фазовых портретов, амплитуды колебаний и спектры при последовательности бифуркаций удвоения периода

Развитие неустойчивости Рэля-Бенара и бифуркационный переход Фейгенбаума

Признаки перехода Фейгенбаума в непрерывных системах, выведенные из теоретического анализа:

- существует бесконечный каскад удвоения периода, который приводит к появлению субгармоник с частотами $\omega_0 \cdot k / 2^n$, $k = 1, 3, 5, \dots, (2^n - 1)$

- отношение амплитуд последовательных гармоник

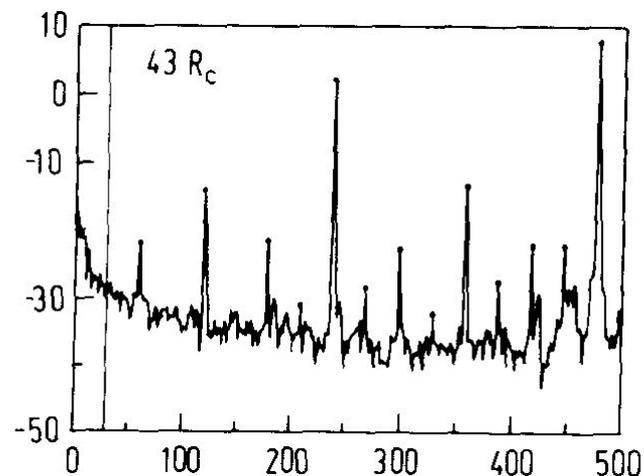
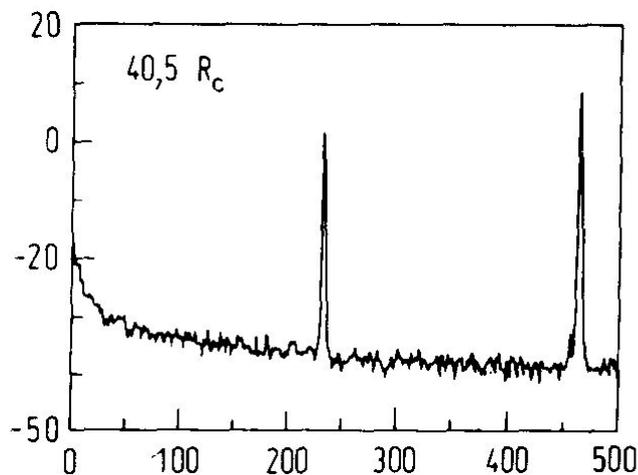
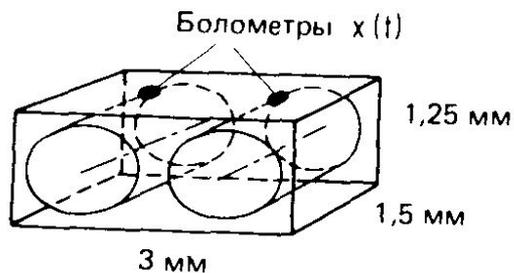
$$\lg(a_n / a_{n+1}) = 10 \lg \mu = 13.5 \text{ дБ}$$

- высшие гармоники быстро заглушаются внешним шумом

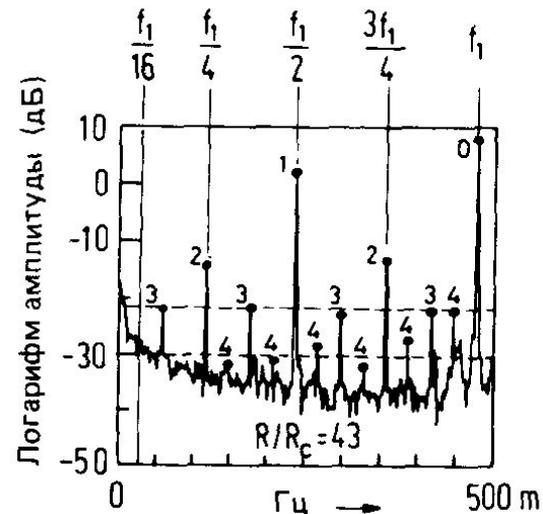
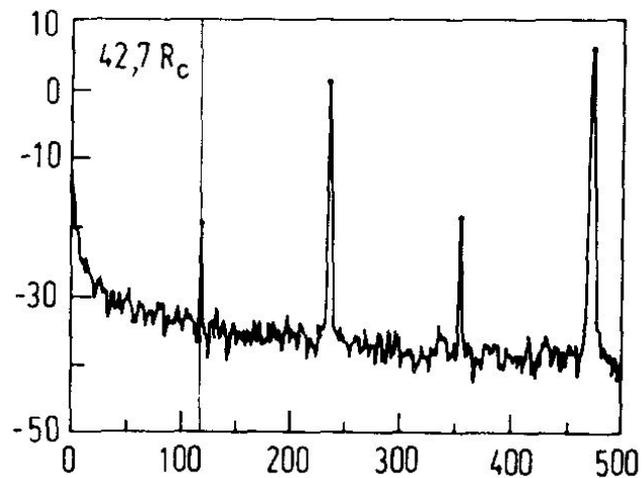
$$|a_n| = \mu^{-n} |a_0|, \quad \mu^{-1} = 0.045$$

- имеется квадратичное отображение Пуанкаре

Результаты экспериментов Либхабера



$R_c = 1700$



Ограничения в длительности прогнозов. Математическая модель Лоренца, 1963г.

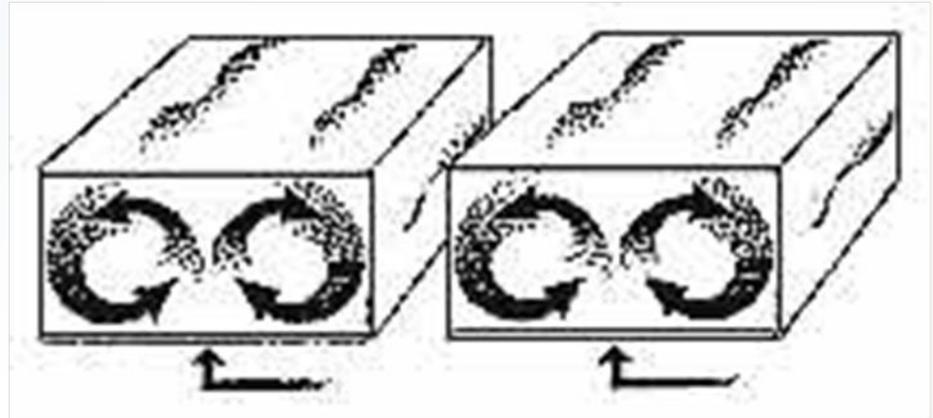
Исходные уравнения конвективных движений в атмосфере

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{g}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \bar{u}) = \chi \nabla^2 T$$

$$\rho = \rho_0 [1 - \gamma(T - T_0)]$$



u – скорость, ρ – плотность, T – температура, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, χ – коэффициент температуропроводности, g – ускорение свободного падения, γ – коэффициент теплового расширения.

Упрощенная постановка – газ заключен между двух плоскостей, температура нижней из которых на ΔT больше температуры верхней.

Ограничения в длительности прогнозов. Математическая модель Лоренца, 1963г.

Искомые переменные разлагаются в ряд Фурье и учитываются только первые гармоники. Коэффициенты в разложении определяют:

X – интенсивность конвективного движения

Y – разницу энергий восходящих и нисходящих потоков

Z – отклонение вертикального профиля температуры от линейного

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

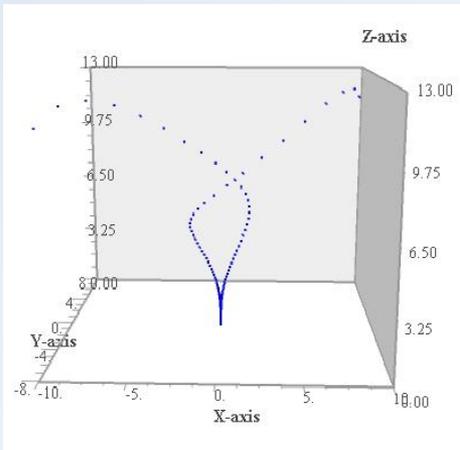
$r = \nu / \chi$ – число Прандтля

$$r = R/R_c$$

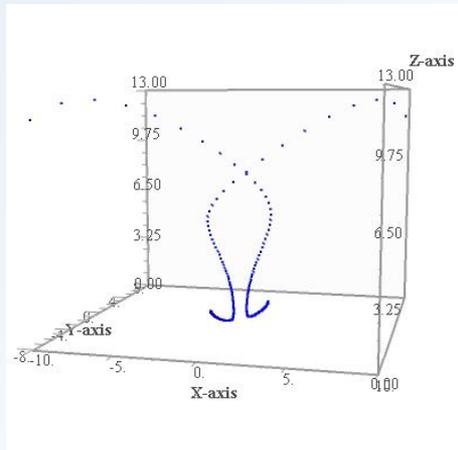
$$R = \frac{g \nu h^3 \Delta T}{\nu \chi} \text{ – число Рэлея}$$

b – геометрический фактор

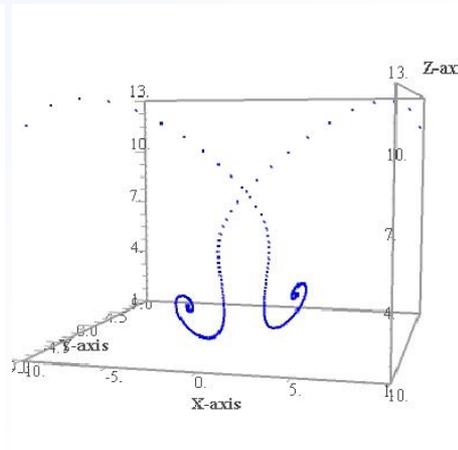
Решения уравнений лоренца $\sigma=10, b=8/3$



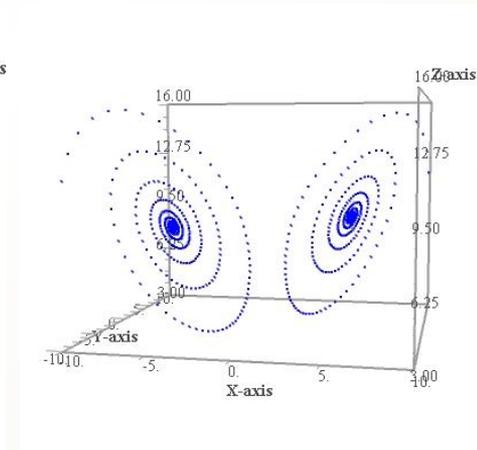
r=0.3



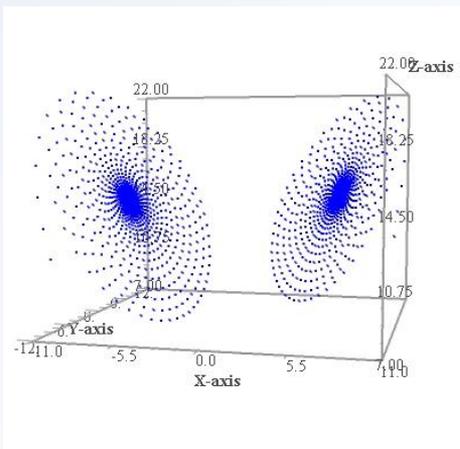
r=1.8



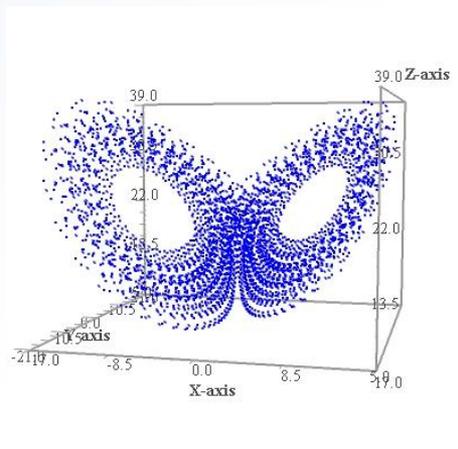
r=3.7



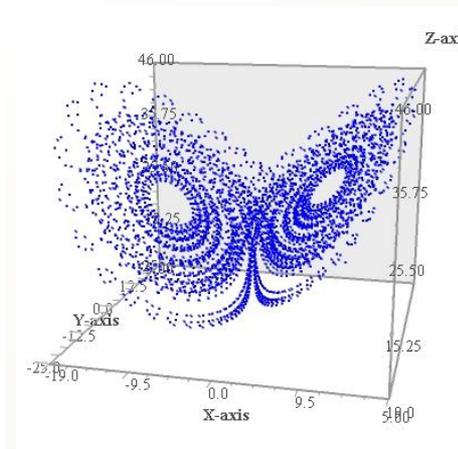
r=10



r=16

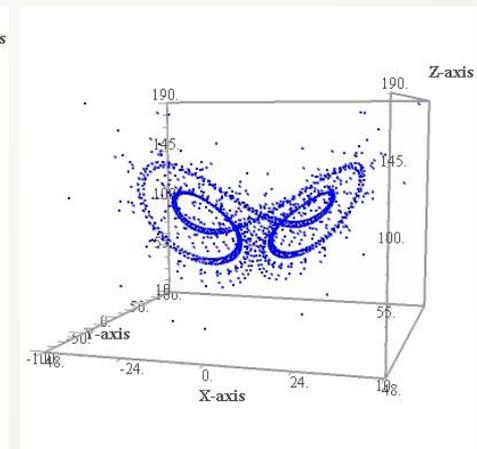


r=24.06



r=28

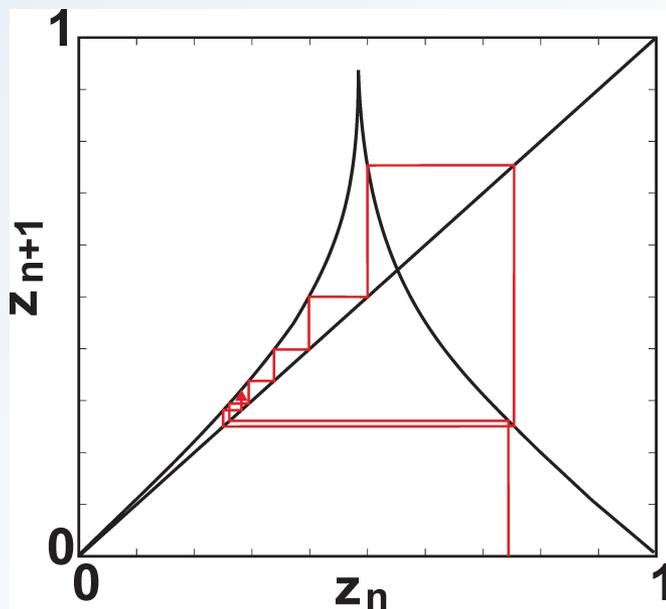
аттрактор Лоренца



r=100

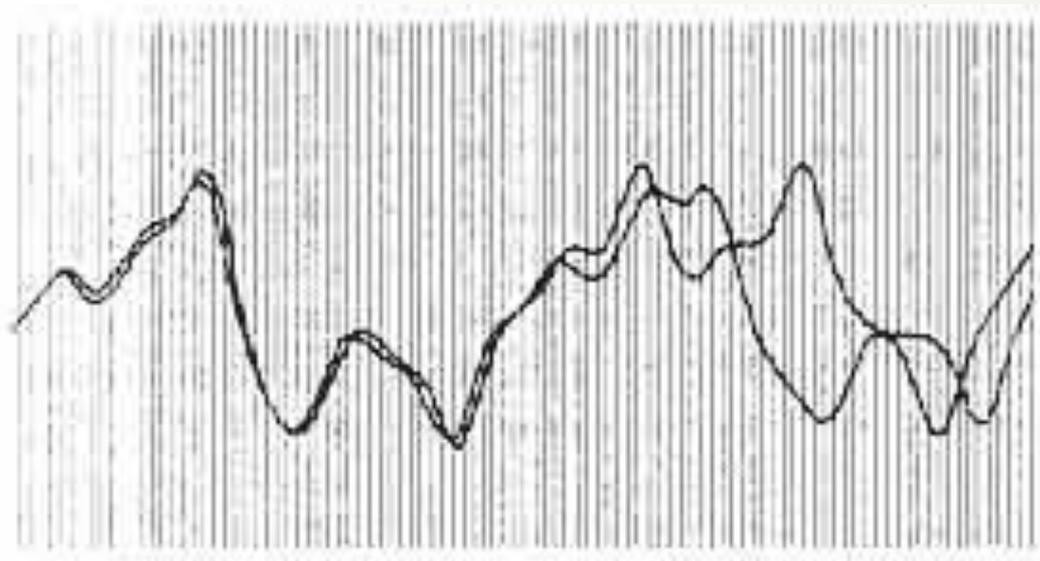
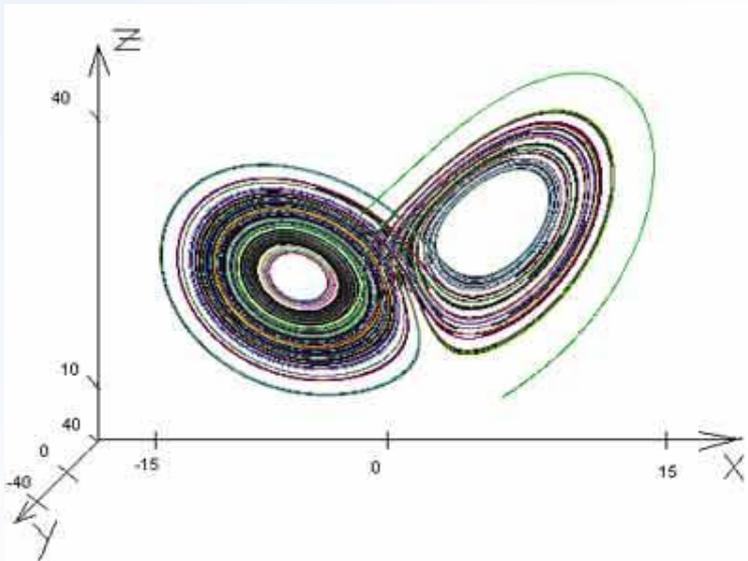
режим автоколебаний

Переход к хаосу в модели Лоренца



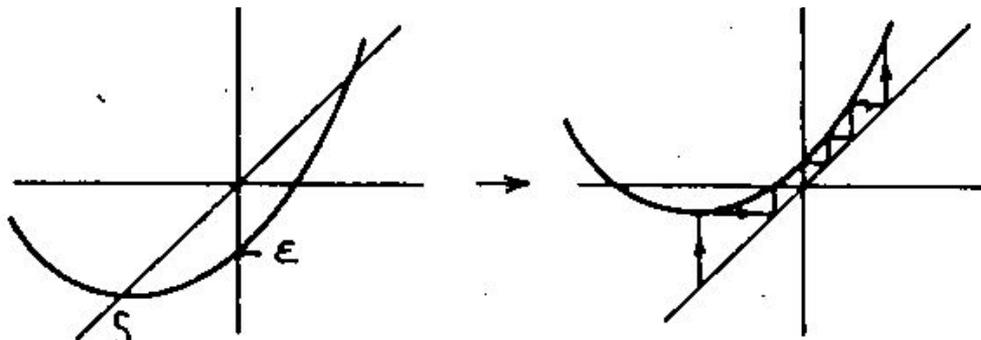
Аттрактор Лоренца

Расхождение двух графиков погоды



Переход к хаосу через перемежаемость

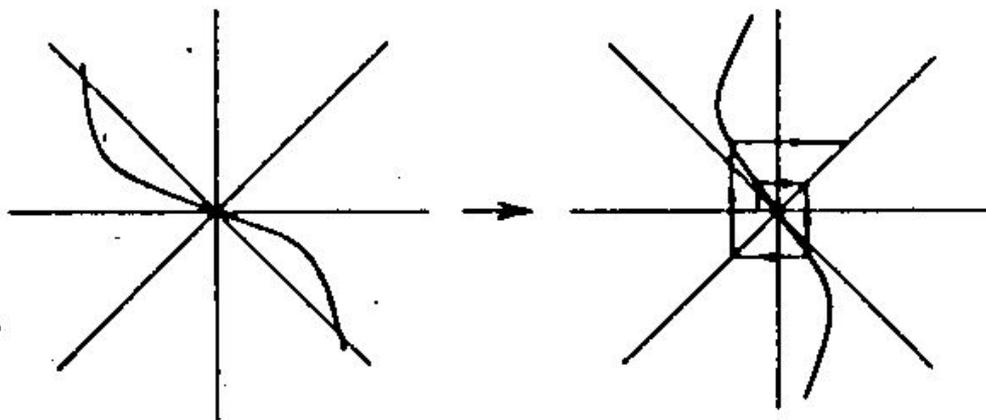
Перемежаемость 1-го рода



Перемежаемость 2-го рода



Перемежаемость 3-го рода



Переход к хаосу через перемежаемость

В модели Лоренца число осцилляций до установления стационарного режима (время распада) ведет себя как:

$$\sim \frac{300}{(r_{cr} - r)^k}; \quad k \approx 4; \quad r_{cr} = 24.74$$

Фракталы

Впервые фрактальную природу мира подметил Бенуа Мандельброт, 1975г. Термин получил широкую известность с выходом книги “Фрактальная геометрия природы”

В широком смысле:

Фрактал – множество точек в евклидовом пространстве, имеющее дробную размерность, либо метрическую размерность, отличную (большую) топологической.

В более узком смысле:

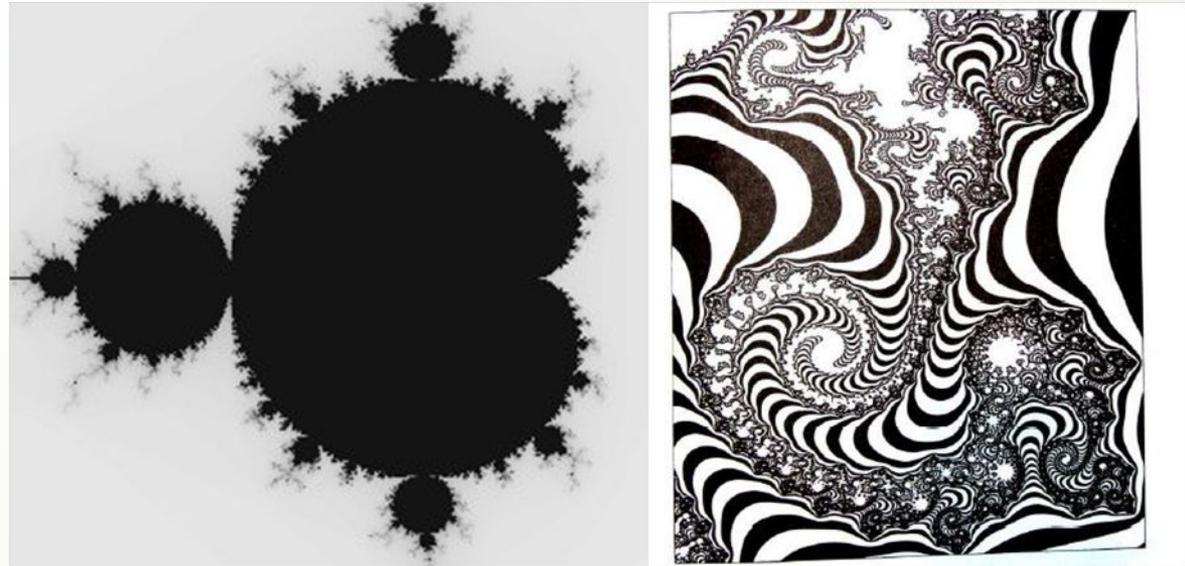
Геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия

Фракталы могут порождать самые простые математические правила.

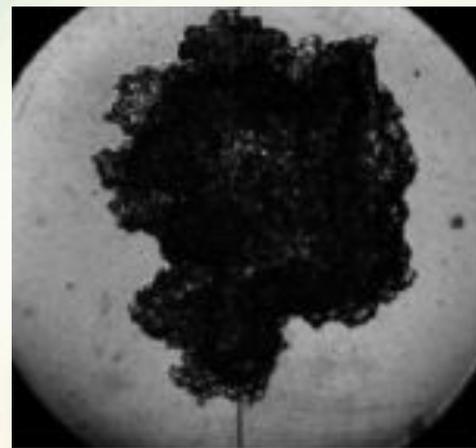
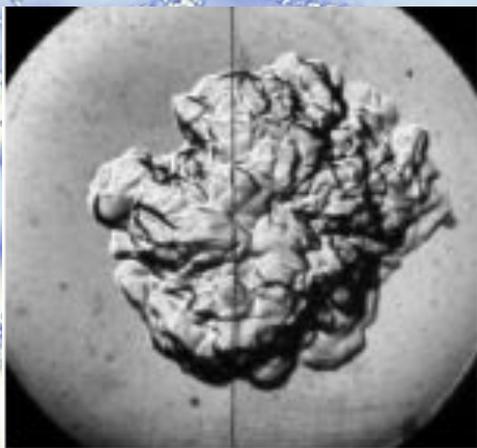
Фрактал Мандельброта:

$$z_{n+1} = \frac{c(z^2 + 1)^2}{z(z^2 - 1)^2}$$

z, c – комплексные



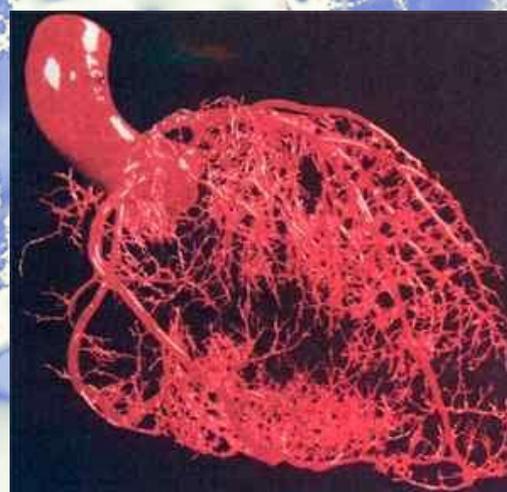
Примеры фракталов в природе, технике, биологии



Развитие турбулентного пламени



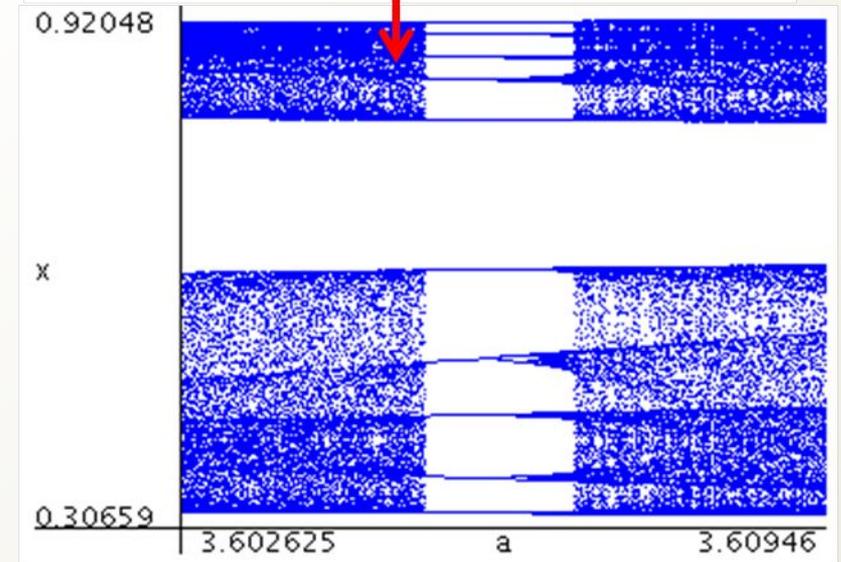
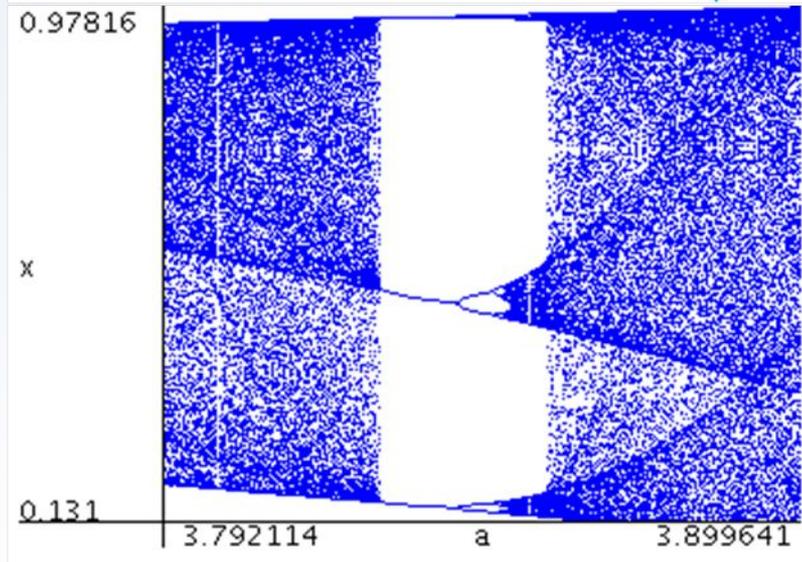
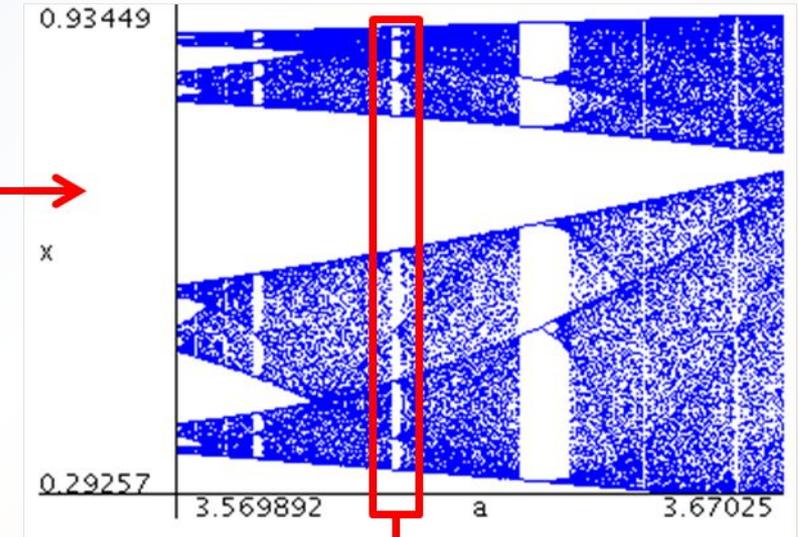
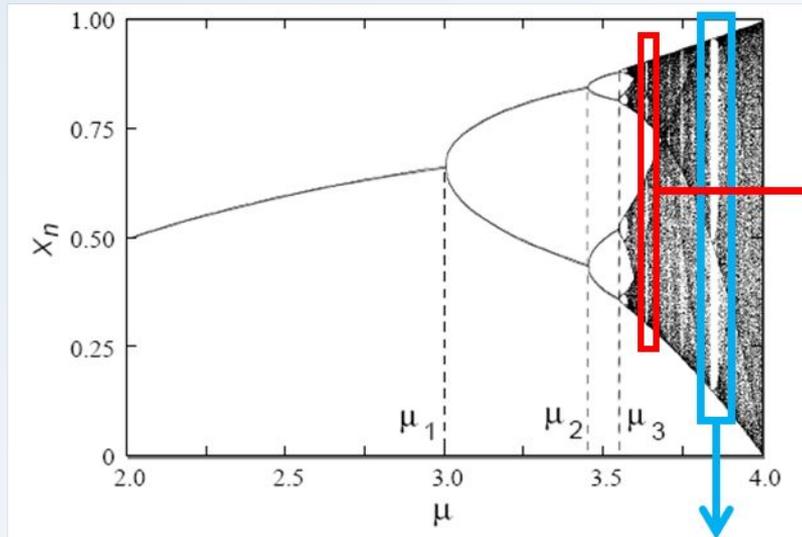
Структура облачного
покрова



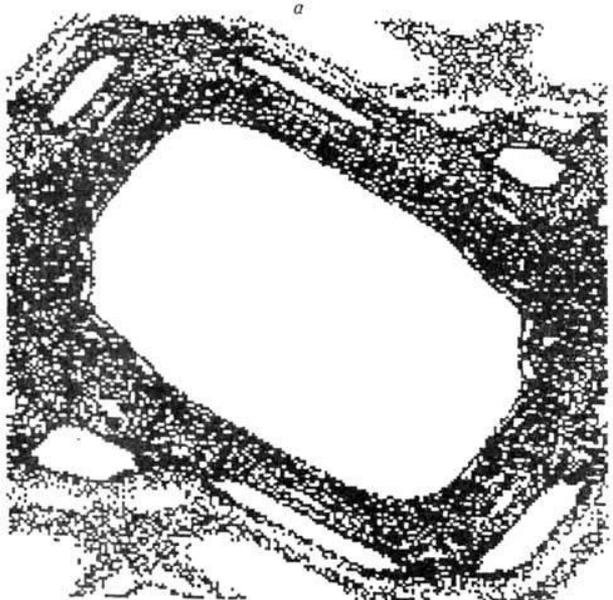
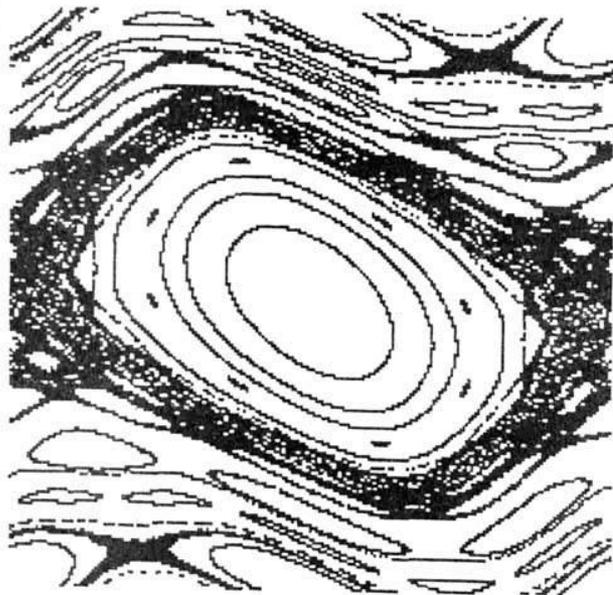
Кровеносная система
сердца

Странный аттрактор логистического уравнения

Странный аттрактор – притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве динамической диссипативной системы



Странный аттрактор



Странный аттрактор имеет фрактальную структуру и размерность.

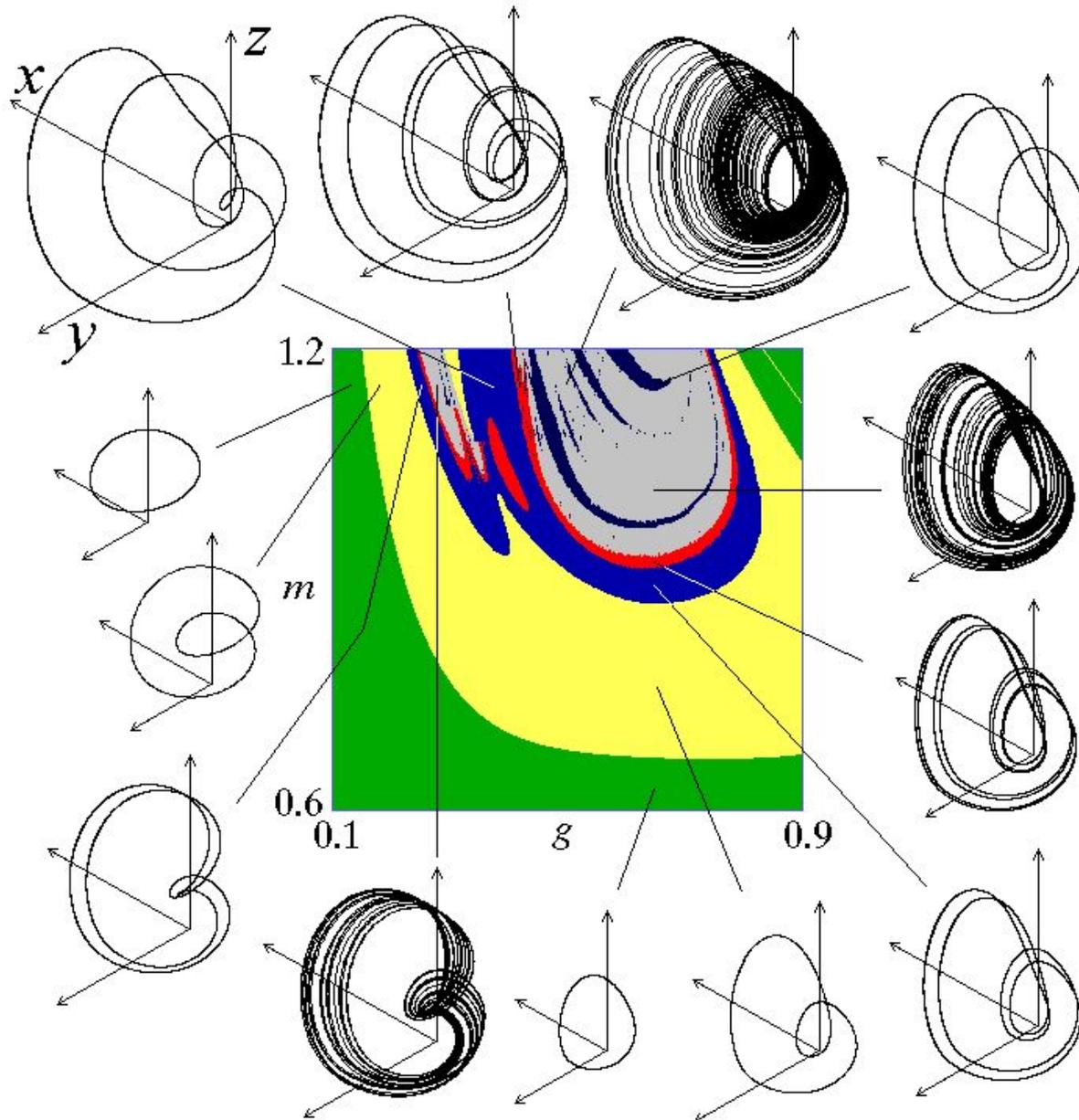
Аттрактор Фейгенбаума: $D=0.543$

Аттрактор Лоренца: $D=2.06$

Свойства странного аттрактора:

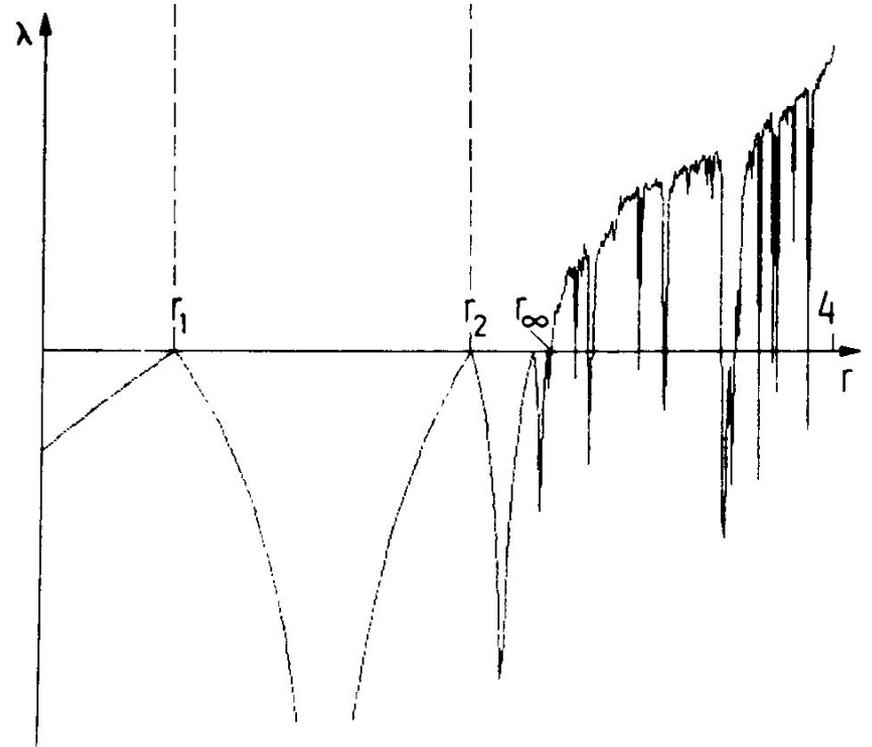
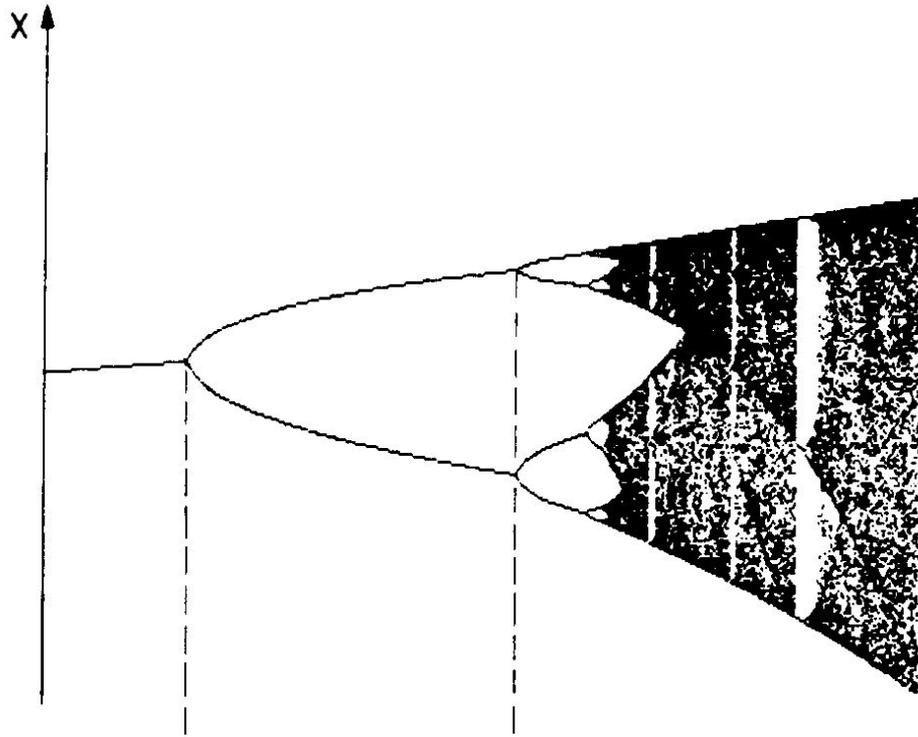
- занимает ограниченную область в фазовом пространстве, к которой притягиваются все траектории из области притяжения;
- несмотря на сжатие в объеме, не происходит сокращения длин во всех направлениях;
- разводит сколь угодно близкие траектории на конечное расстояние (отличие уже в первом знаке);
- сохраняет статистические свойства случайных последовательностей;
- порождает эргодичность;
- порождает стохастичность в поведении показателя Ляпунова

Странный аттрактор



Странный аттрактор

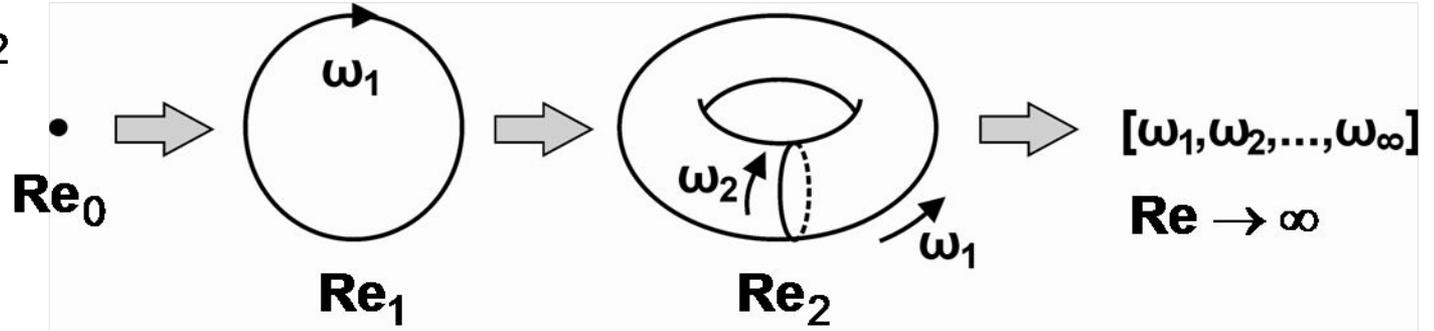
Связь показателя Ляпунова λ со структурой аттрактора Фейгенбаума



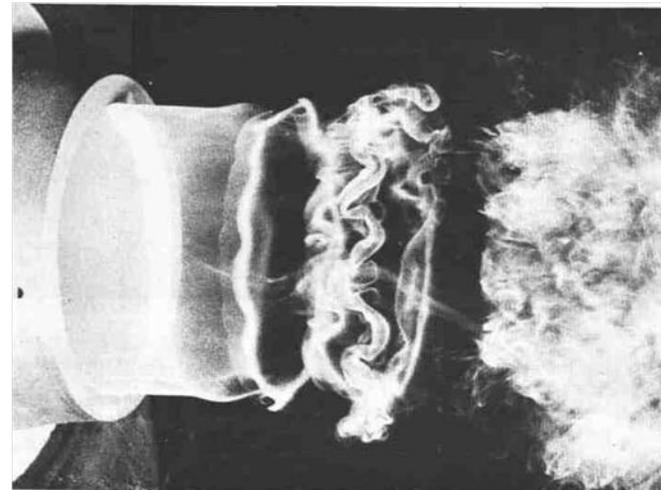
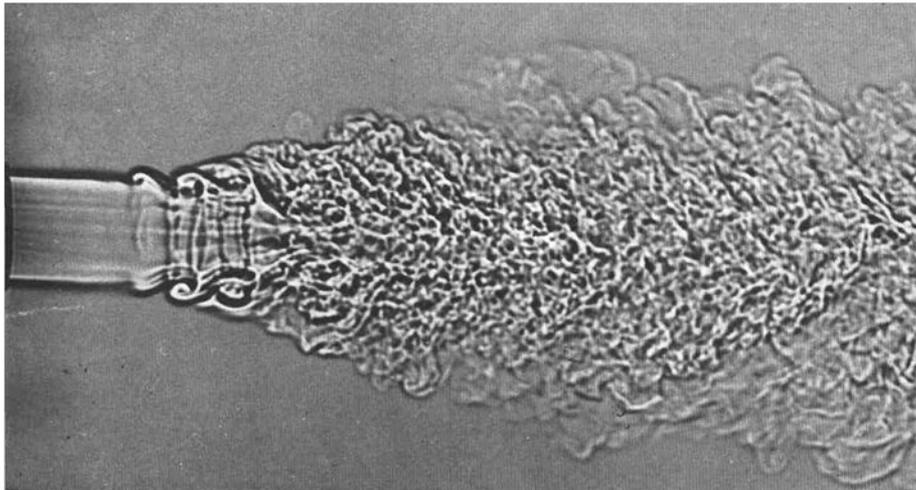
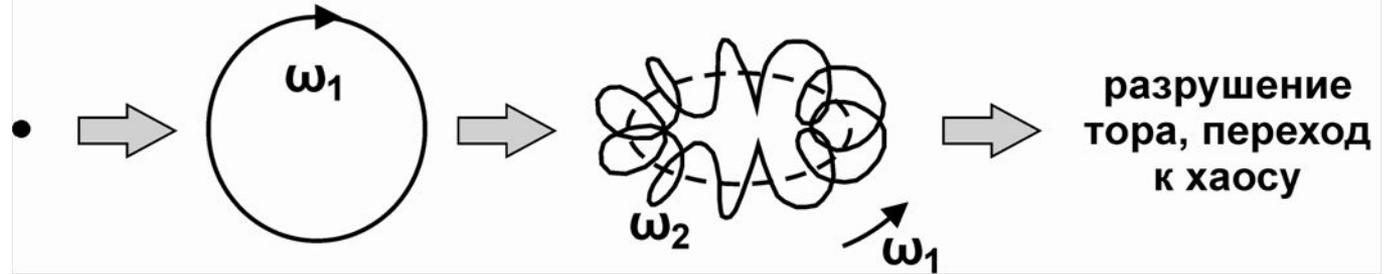
Турбулентность

Модель возникновения турбулентности Ландау, 1944г. Через каскад бифуркаций Хопфа.

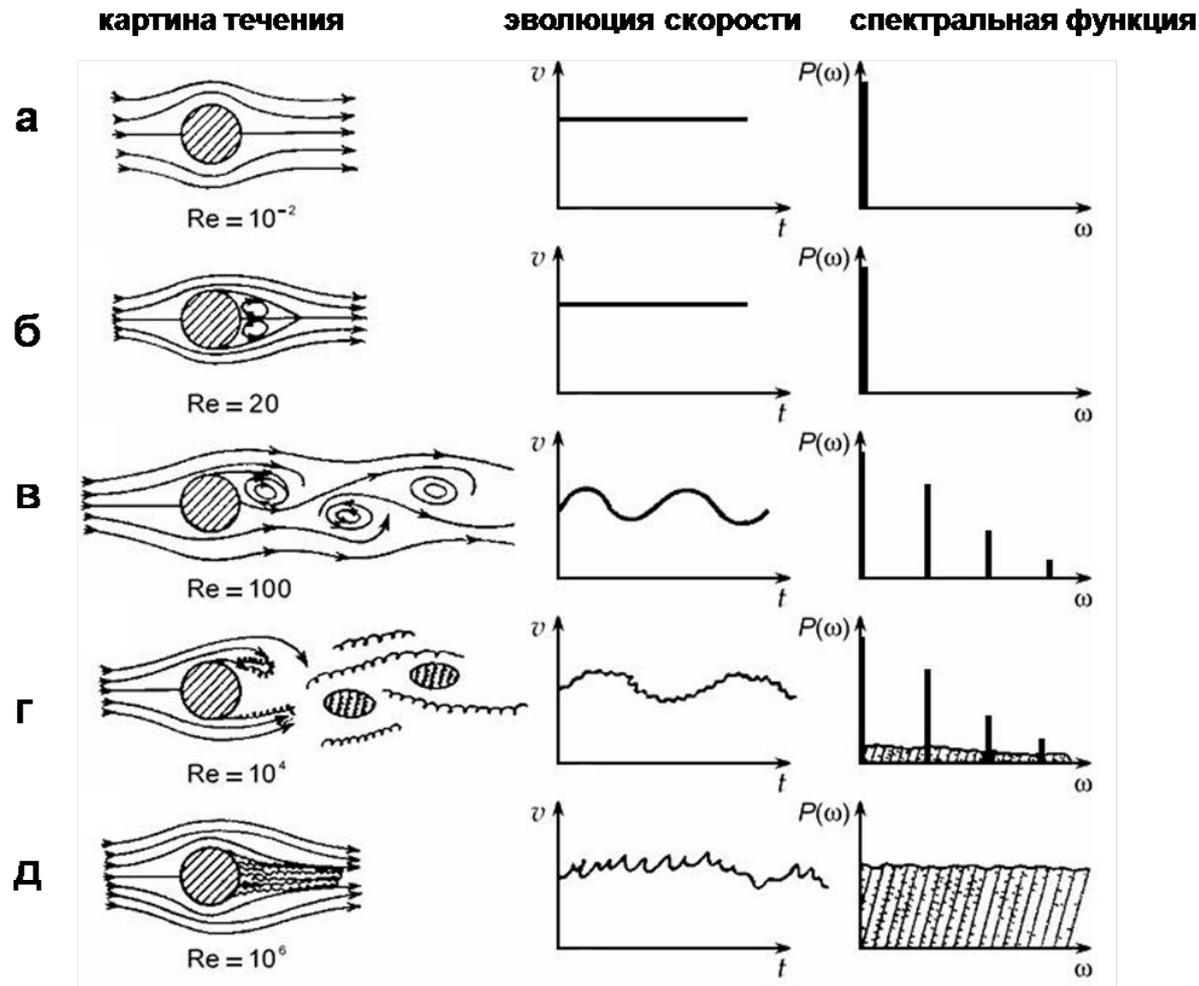
$$Re_0 < Re_1 < Re_2$$



Модель возникновения турбулентности Рюэля-Тakens-Ньюхауса, 1971г. Торы размерности >2 неустойчивы.

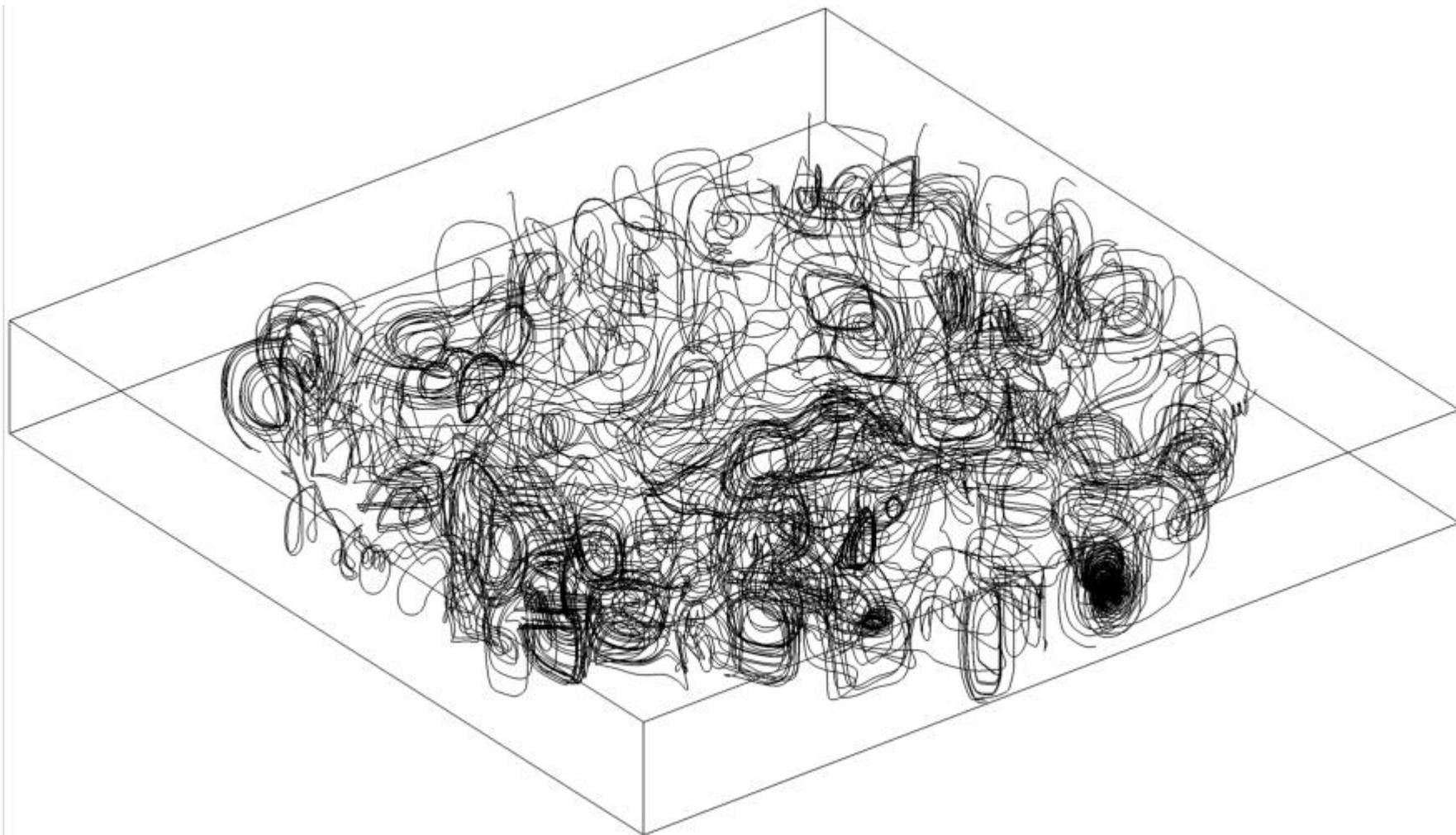


Пример возникновения турбулентности, не описываемый известными моделями перехода к хаосу



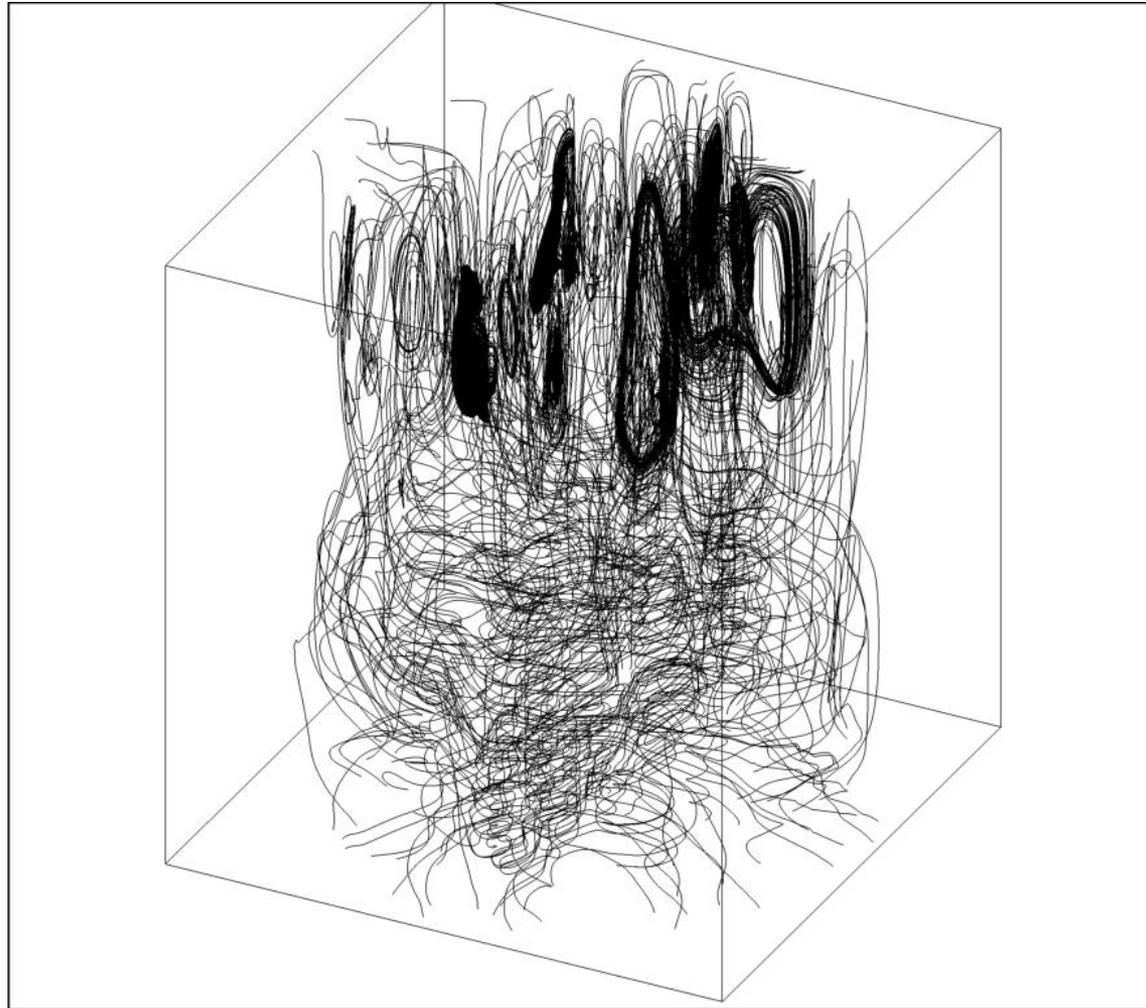
Гидродинамическое течение при различных значениях числа Рейнольдса Re . При малых Re течение ламинарное (а); с ростом Re течение сначала становится волнообразным (периодическим) (в), наконец, турбулентным (д). На рисунке для каждого значения числа Рейнольдса изображено изменение со временем одной компоненты скорости, измеренной в некоторой фиксированной точке потока. Показана также спектральная функция $P(\omega)$, соответствующая представленной зависимости скорости от времени.

Численное моделирование развития турбулентности в камере под движущимся поршнем



Фаза сжатия

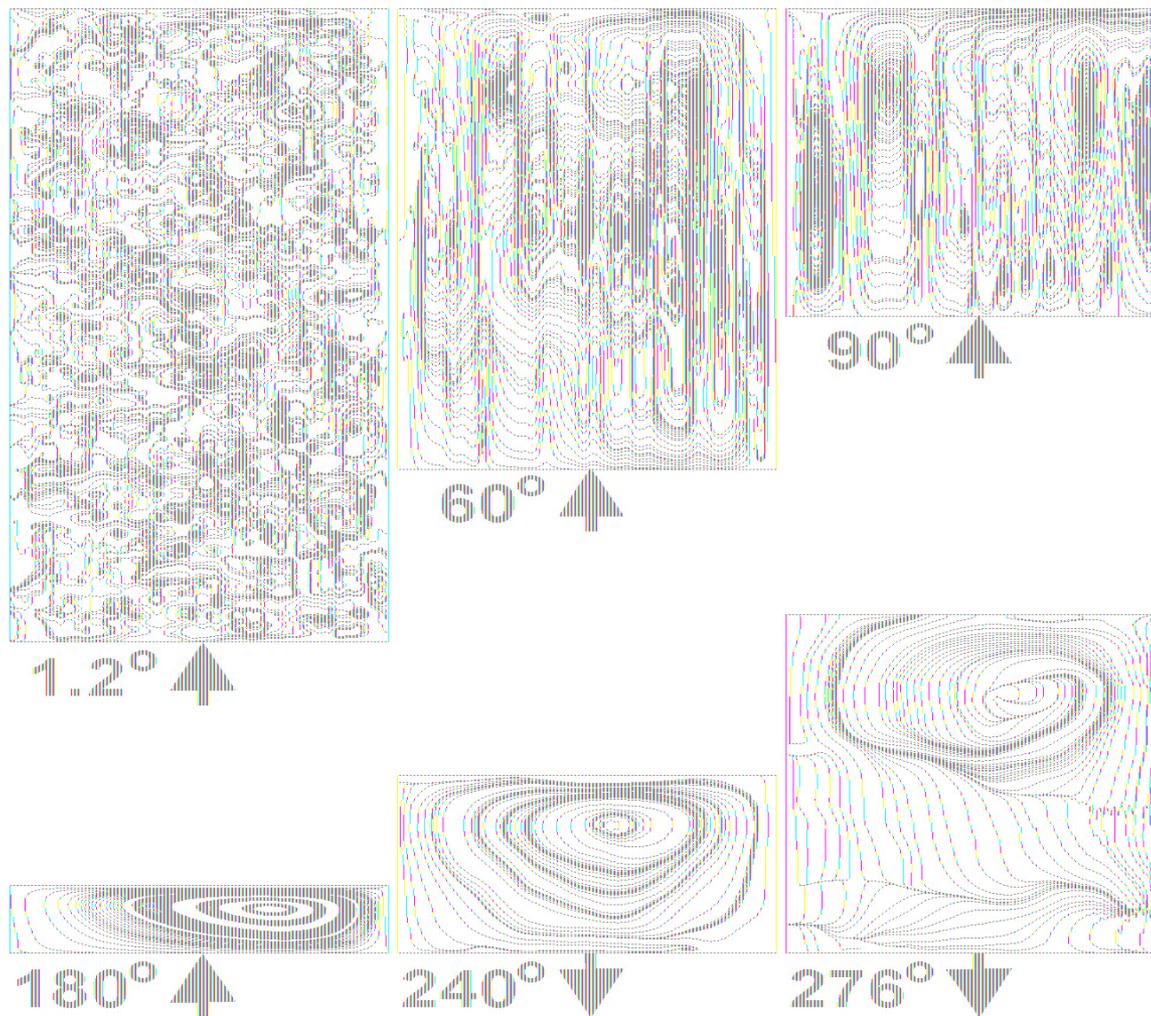
Численное моделирование развития турбулентности в камере под движущимся поршнем



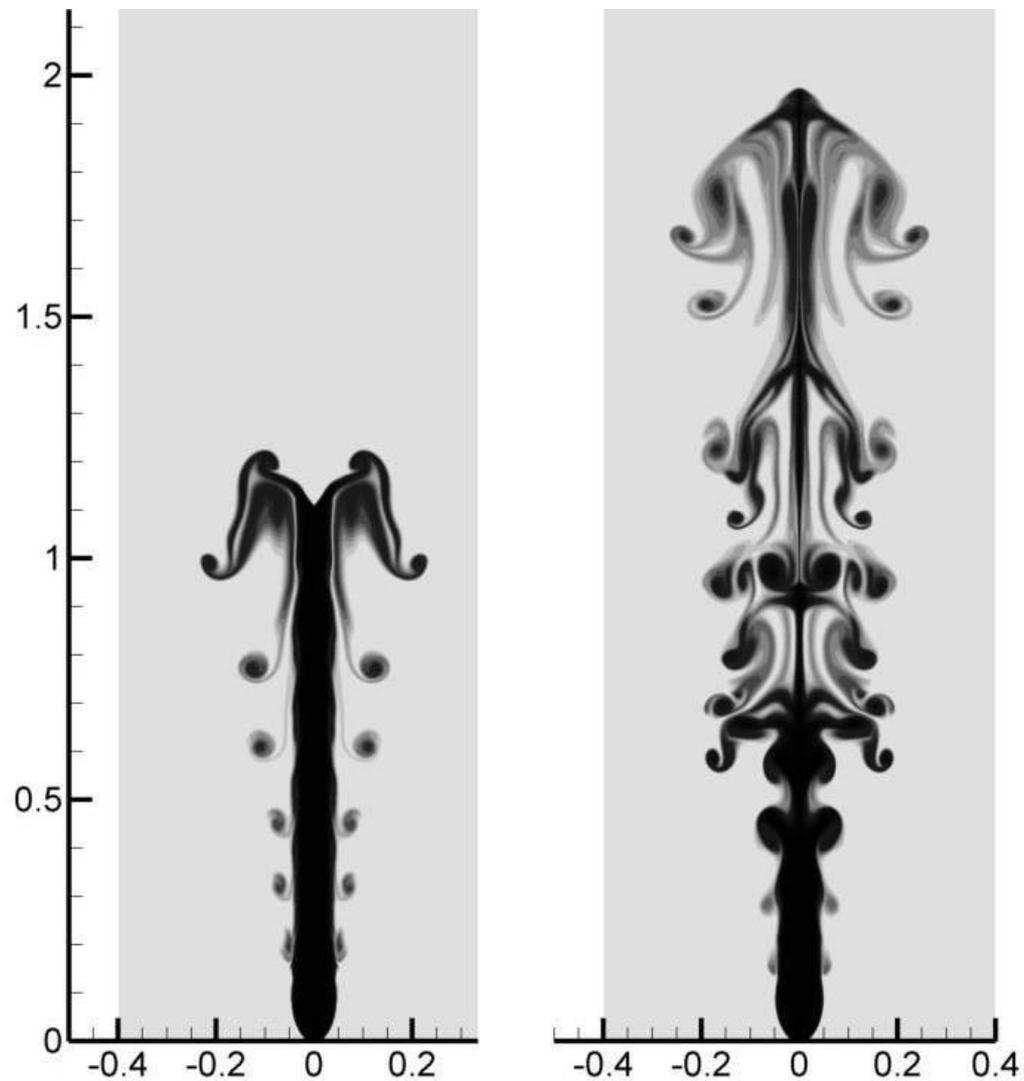
Фаза расширения

Численное моделирование развития турбулентности в камере под движущимся поршнем

Эволюция поля возмущений

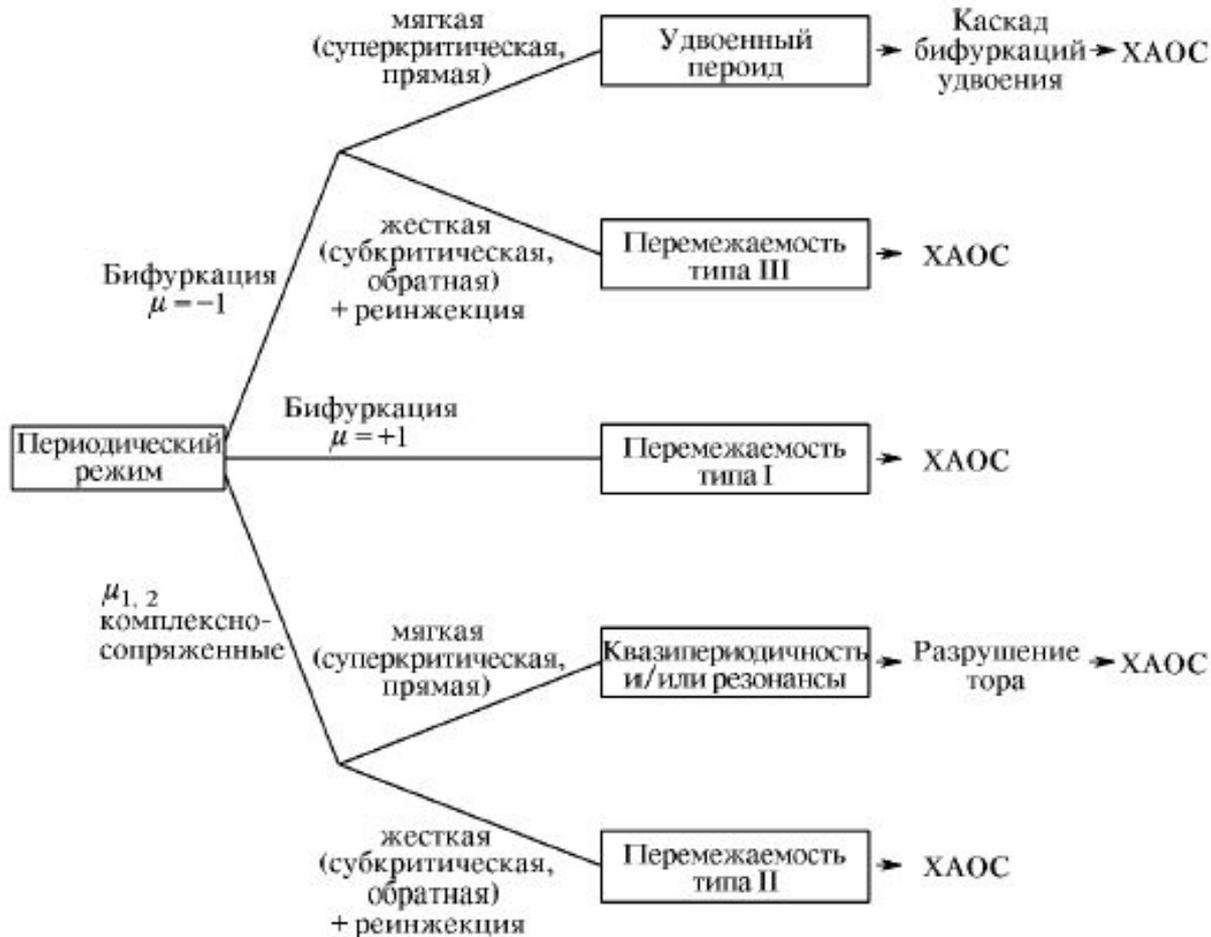


Численное моделирование развития недорасширенной струи



Пути перехода к хаосу

1. через каскад бифуркаций удвоения периода;
2. через перемежаемость;
3. через квазипериодичность и разрушение тора;
4. возникновение цикла периода $3 \square 5 \square 7 \square 3 \cdot 2 \square 5 \cdot 2 \square 7 \cdot 2 \square 3 \cdot 2 \cdot 2 \square \dots$



Примеры самоорганизации и образования структур

Ячейки Бенара



Рисунок шлифа дальневосточного скарна

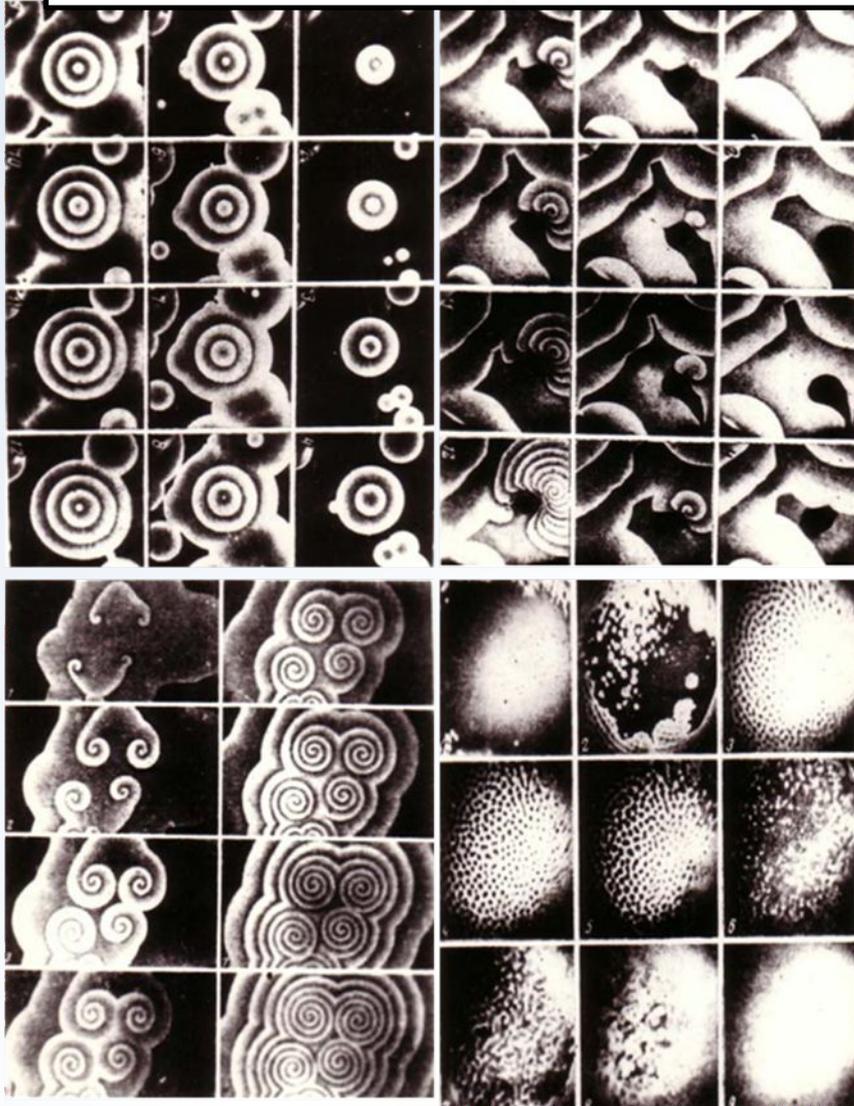


Последовательность структурирования популяции амёб **Dictyostelium**



Примеры самоорганизации и образования структур

Реакция Белоусова-Жаботинского, 1958г.



Реакция окисления малоновой кислоты ионами BrO_3^- – пример развития диффузионной неустойчивости.

Процессы самоорганизации удается интерпретировать только с помощью максимально упрощенных математических моделей.

Образование “химических” структур:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \rho_0 \rho + c \rho \frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c \rho a^2 - \beta h + D_h \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

a – активатор; $D_h > D_a$

h – ингибитор

A pair of large, feathered wings, likely from a bird or a costume, with a mix of light blue and brown feathers. The wings are spread out horizontally across the frame. The text is centered over the middle of the wings.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!