

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 5

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.5. Выпуклые оболочки (продолжение)



2.6. Замыкание и внутренность выпуклых множеств.



2.5. Выпуклые оболочки (продолжение) Из доказанной теоремы 12 (Каратеодори)

вытекает важное следствие.

Теорема 13. Пусть множество $U \subset R^n$ компактно. Тогда и множество coU компактно.

Доказательство. Из ограниченности множества U следует существование шара $\bar{O}(0, R) = \{ u \in R^n \mid \|u\| \leq R \}$, содержащего множество U .

Выпуклость шара влечет за собой вложение $coU \subset O(0, R)$, которое означает ограниченность множества coU .

Докажем его замкнутость. Пусть v – предельная точка множества coU . Надо доказать $v \in coU$. По определению предельной точки существует последовательность точек $\{u_k\}$, $u_k \in coU$ таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = v. \quad (3)$$

По теореме 12 для всех номеров $k = 1, 2, \dots$ найдутся точки $u_{ik} \in U$ и числа $\alpha_{ik}, i = 1, \dots, n+1$ такие, что

$$u_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} u_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} = 1, \quad \alpha_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

Подробно

$u_1 =$ $= \alpha_{11} u_{11} +$ $+ \alpha_{21} u_{21} +$ $+ \dots +$ $+ \alpha_{n1} u_{n1} +$ $+ \alpha_{n+11} u_{n+11},$ $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i1} = 1,$ $\alpha_{i1} \geq 0,$ $i = 1, \dots, n+1,$	$u_2 =$ $= \alpha_{12} u_{12} +$ $+ \alpha_{22} u_{22} +$ $+ \dots +$ $+ \alpha_{n2} u_{n2} +$ $+ \alpha_{n+12} u_{n+12}$ $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i2} = 1,$ $\alpha_{i2} \geq 0,$ $i = 1, \dots, n+1,$	$u_k =$ $= \alpha_{1k} u_{1k} +$ $+ \alpha_{2k} u_{2k} +$ $+ \dots +$ $+ \alpha_{nk} u_{nk} +$ $+ \alpha_{n+1k} u_{n+1k}$ $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} = 1,$ $\alpha_{ik} \geq 0,$ $i = 1, \dots, n+1,$
---	--	--

Компактность множества U влечет за собой возможность выбора из последовательности

$$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k}, \dots \text{ подпоследовательности } u_{1j_1^{(1)}}, u_{1j_2^{(1)}}, \dots, u_{1j_k^{(1)}}, \dots \rightarrow u_{10} \in U,$$

из последовательности $u_{2j_1^{(1)}}, u_{2j_2^{(1)}}, \dots, u_{2j_k^{(1)}}, \dots$ подпоследовательности

$$u_{2j_1^{(2)}}, u_{2j_2^{(2)}}, \dots, u_{2j_k^{(2)}}, \dots \rightarrow u_{20} \in U,$$

и т. д., из последовательности $u_{n+1j_1^{(n)}}, u_{n+1j_2^{(n)}}, \dots, u_{n+1j_k^{(n)}}, \dots$ подпоследовательности

$$u_{n+1j_1^{(n+1)}}, u_{n+1j_2^{(n+1)}}, \dots, u_{n+1j_k^{(n+1)}}, \dots \rightarrow u_{n+10} \in U.$$

В пространстве R^{n+1} рассмотрим компактное множество

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1 \right\}.$$

В силу (4), $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} = 1, \alpha_{ik} \geq 0, k = 1, 2, \dots$ (4) имеют место включения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^{(n+1)}} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1j_1^{(n+1)}} \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^{(n+1)}} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1j_2^{(n+1)}} \end{pmatrix} \in A, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^{(n+1)}} \\ \vdots \\ \alpha_{n+1j_k^{(n+1)}} \end{pmatrix} \in A, \dots$$

Тогда из последовательности

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^{(n+1)}} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1j_1^{(n+1)}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^{(n+1)}} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1j_2^{(n+1)}} \end{pmatrix}, \boxtimes, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^{(n+1)}} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1j_k^{(n+1)}} \end{pmatrix}, \boxtimes \in A$$

выделим сходящуюся подпоследовательность

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^*} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1j_1^*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^*} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1j_2^*} \end{pmatrix}, \boxtimes, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^*} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1j_k^*} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{i_0} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+10} \end{pmatrix} \in A \Rightarrow \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i_0} &= 1 \\ \alpha_{i_0} &\geq 0, \\ i &= 1, \boxtimes, n+1. \end{aligned}$$

Перенумеруем индексы

$$j_1^* = 1, j_2^* = 2, \boxtimes, j_k^* = k, \boxtimes$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_{11}, u_{12}, \boxtimes, u_{1k}, \dots &\rightarrow u_{10} \in U, \\ u_{21}, u_{22}, \boxtimes, u_{2k}, \dots &\rightarrow u_{20} \in U, \\ \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \boxtimes \\ u_{n+11}, u_{n+12}, \boxtimes, u_{n+1k}, \dots &\rightarrow u_{n+10} \in U, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+12} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+1k} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \boxtimes \\ \alpha_{n+10} \end{pmatrix} \in A \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1k}, \dots &\rightarrow \alpha_{10}, \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2k}, \dots &\rightarrow \alpha_{20}, \\ \alpha_{n+11}, \alpha_{n+12}, \dots, \alpha_{n+1k}, \dots &\rightarrow \alpha_{n+10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i0} &= 1 \\ \alpha_{i0} &\geq 0, \\ i &= 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычислим предел в (3) $v = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ (3). Надо доказать, что $v \in coU$

Действительно, в силу (5) $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ik} = u_{i0}$ (5) и (6) $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ik} = \alpha_{i0}$ (6) имеем

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} u_{ik} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik} u_{ik} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ik} \right) \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} u_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i0} u_{i0} \Rightarrow$$

$v \in coU$. Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать Теорему 13 «Пусть множество $U \subset R^n$ компактно.

Тогда и множество coU компактно.» (в части замкнутости) при $n = 1$.

Решение. Пусть v – предельная точка множества coU ,

и для последовательности точек $\{u_k\}$ выполнено $u_k \in coU$, $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = v$. Требуется

доказать, что $v \in coU$. По теореме 11 для всех номеров $k = 1, 2, \dots$ найдутся точки

$u_{1k}, u_{2k} \in U$ и числа α_{1k}, α_{2k} такие, что

$$u_k = \alpha_{1k} u_{1k} + \alpha_{2k} u_{2k}, \quad \alpha_{1k} + \alpha_{2k} = 1, \quad \alpha_{1k} \geq 0, \quad \alpha_{2k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Распишем равенство (7) подробно

$$\begin{aligned} u_1 &= & u_2 &= & \dots & & u_k &= & \dots & & \dots & \\ &= \alpha_{11} u_{11} + & = \alpha_{12} u_{12} + & \dots & & = \alpha_{1k} u_{1k} + & \dots & & \dots & & \dots & \\ &+ \alpha_{21} u_{21}, & + \alpha_{22} u_{22}, & \dots & & + \alpha_{2k} u_{2k}, & \dots & & \dots & & \dots & \end{aligned}$$

Компактность множества U влечет за собой возможность выбора из последовательности

$$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k}, \dots \text{ подпоследовательности } u_{1j_1^{(1)}}, u_{1j_2^{(1)}}, \dots, u_{1j_k^{(1)}}, \dots \rightarrow u_{10} \in U,$$

из последовательности $u_{2j_1^{(1)}}, u_{2j_2^{(1)}}, \dots, u_{2j_k^{(1)}}, \dots$ подпоследовательности

$$u_{2j_1^{(2)}}, u_{2j_2^{(2)}}, \dots, u_{2j_k^{(2)}}, \dots \rightarrow u_{20} \in U,$$

Множество A здесь имеет вид

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2 \right\}.$$

В силу (7)

$$u_k = \alpha_{1k} u_{1k} + \alpha_{2k} u_{2k}, \quad \alpha_{1k} + \alpha_{2k} = 1, \quad \alpha_{1k} \geq 0, \alpha_{2k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

имеют место включения

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^{(2)}} \\ \alpha_{2j_1^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^{(2)}} \\ \alpha_{2j_2^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^{(2)}} \\ \alpha_{2j_k^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \quad \dots$$

Тогда из последовательности

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j_1^{(2)}} \\ \alpha_{2j_1^{(2)}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_2^{(2)}} \\ \alpha_{2j_2^{(2)}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_{1j_k^{(2)}} \\ \alpha_{2j_k^{(2)}} \end{pmatrix} \in A, \dots$$

выделим сходящуюся подпоследовательность

$$\left(\begin{matrix} \alpha_{1j_1^*} \\ \alpha_{2j_1^*} \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \alpha_{1j_2^*} \\ \alpha_{2j_2^*} \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} \alpha_{1j_k^*} \\ \alpha_{2j_k^*} \end{matrix} \right) \in A, \dots \rightarrow \left(\begin{matrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{matrix} \right) \in A \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_{10} + \alpha_{20} = 1, \\ \alpha_{10} \geq 0, \alpha_{20} \geq 0. \end{matrix}$$

Перенумеруем индексы

$$j_1^* = 1, j_2^* = 2, \dots, j_k^* = k, \dots$$

Тогда

$$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1k}, \dots \rightarrow u_{10} \in U,$$

$$u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k}, \dots \rightarrow u_{20} \in U,$$

$$\left(\begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{matrix} \right) \rightarrow \left(\begin{matrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{matrix} \right) \in A \rightarrow \begin{matrix} \alpha_{10} + \alpha_{20} = 1 \\ \alpha_{10} \geq 0, \alpha_{20} \geq 0. \end{matrix}$$

Вычислим предел в $v = \lim_{k \rightarrow \infty} u_j$. Надо доказать, что $v \in \text{co}U$. Действительно,

в силу $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{1k} = u_{10}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = u_{20}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ik} = \alpha_{i0}$ имеем

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{1k} u_{1k} + \alpha_{2k} u_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_{1k} u_{1k} + \alpha_{2k} u_{2k}) = \\
&= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{1k} \right) \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} u_{1k} \right) + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{2k} \right) \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} \right) = \\
&= a_{10} u_{10} + a_{20} u_{20} \in coU.
\end{aligned}$$

$a_{10} \geq 0, a_{20} \geq 0,$
 $a_{10} + a_{20} = 1$

Теорема доказана.

2.6. Замыкание и внутренность выпуклых множеств.

Теорема 14. *Замыкание и внутренность выпуклых множеств выпуклы.*

Доказательство. Пусть множество $U \subset R^n$ выпукло и $v_1, v_2 \in \text{int } U$.

По определению внутренних точек существует число $\varepsilon > 0$, что выполнены вложения

$$\{v_i\} + \varepsilon \cdot O(0,1)$$

$$O(v_i, \varepsilon) \subset U, i = 1, 2 \Rightarrow \{v_i\} + \varepsilon \cdot O(0,1) \subset U, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из выпуклости множества U для любого $\alpha \in [0,1]$ выводим

$$\alpha \left[\{v_1\} + \varepsilon O(0,1) \right] + (1-\alpha) \left[\{v_2\} + \varepsilon O(0,1) \right] \subset U \Rightarrow$$

$$\alpha \{v_1\} + (1-\alpha) \{v_2\} + \varepsilon O(0,1) + (1-\alpha) \varepsilon O(0,1) \subset U \Rightarrow$$

$$\{\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2\} + \varepsilon (\alpha + 1 - \alpha) O(0,1) \subset U \Rightarrow$$

$$\{\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2\} + O(0, \varepsilon) \subset U \Rightarrow$$

$$\{\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2\} + O(0, \varepsilon) \subset U \Rightarrow$$

$$O(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2, \varepsilon) \subset U \Rightarrow \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2 \in \text{int } U$$

Таким образом, произвольная выпуклая комбинация точек $v_1, v_2 \in \text{int } U$ принадлежит этому множеству, что и доказывает его выпуклость.

Рассмотрим множество \bar{U} — замыкание множества U . Если $v_1, v_2 \in \bar{U}$, то по определению предельных точек существуют последовательности точек

$$\{u_{1k}\} \rightarrow v_1, u_{1k} \in U, \quad \{u_{2k}\} \rightarrow v_2, u_{2k} \in U,$$

В силу выпуклости множества U для всех номеров $k = 1, 2, \dots$ и чисел $\alpha \in [0, 1]$ выполнено включение

$$\alpha u_{1k} + (1 - \alpha) u_{2k} \in U.$$

С другой стороны

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\alpha u_{1k} + (1 - \alpha) u_{2k}] = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} u_{1k} + (1 - \alpha) \lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2 \Rightarrow$$

$$\{\alpha u_{1k} + (1 - \alpha) u_{2k}\} \rightarrow \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2$$

Тогда $\alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2$ — предельная точка множества $U \Rightarrow \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2 \in \bar{U}$.

Теорема доказана.

