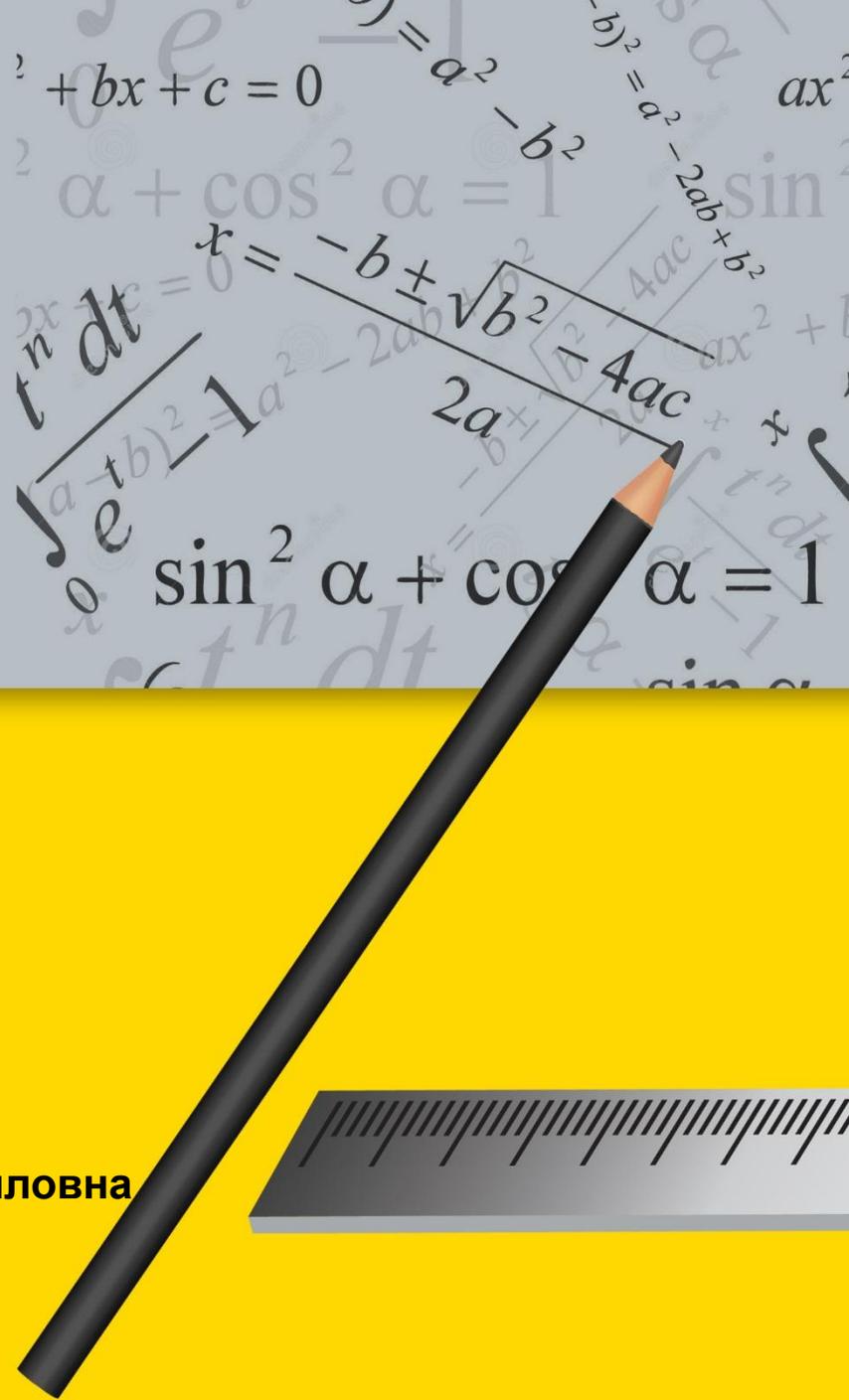


Пределы

Составитель:

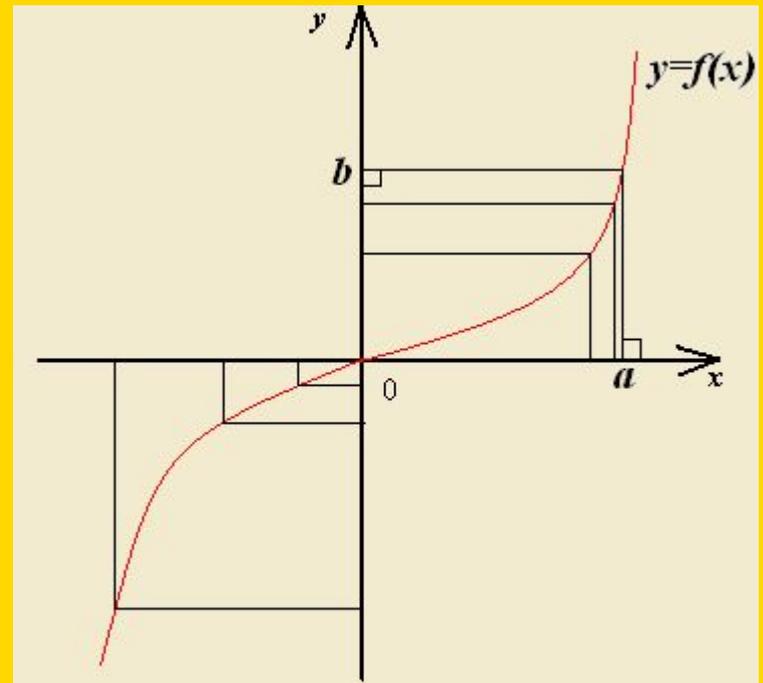
Станкевич Виктория,

Руководитель: Коренюгина Людмила Михайловна



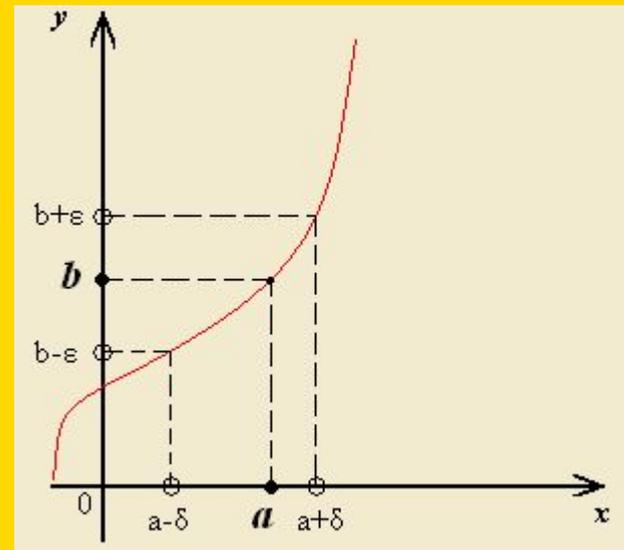
Понятие предела функции

- **Определение:**
Пределом
функции $y=f(x)$
называется
некоторое число
 b при $x \rightarrow a$.
- **И записывается**
это так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$



Геометрический смысл предела

Определение: Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать δ -окрестность точки a на оси Ox , такую что для всех x из этой окрестности кроме $x=a$, соответствующее значение y лежат в ε -окрестности точки b



Математическая запись:

При $|x-a| < \delta$ выполняется $|f(x)-b| < \varepsilon$

$-\delta < x-a < \delta \leftrightarrow -\varepsilon < f(x)-b < \varepsilon$

$a-\delta < x < a+\delta \leftrightarrow b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$

$x \in (a-\delta; a+\delta) \leftrightarrow f(x) \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$



Геометрический смысл предела (продолжение)

- Если число b_1 есть предел функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow a$, так что $x < a$, то число b_1 называется левым односторонним пределом точки a :
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$$
- Если число b_2 есть предел функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow a$, так что $x > a$ то число b_2 называется правым односторонним пределом точки a :
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$$
- Если $b_1 = b_2 = b$, то число b есть предел этой функции при $x \rightarrow a$:
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$



Бесконечно малые и большие функции и их свойства

- **Определение:** Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) если предел этой функции

$$\lim_{x \rightarrow a(x \rightarrow \infty)} f(x) = 0$$

- **Определение:** Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow 0$) если предел этой функции

$$\lim_{x \rightarrow a(x \rightarrow 0)} f(x) = \infty$$



Свойства бесконечно малых и больших функции

- Функция обратная по величине бесконечно большой, есть бесконечно малая

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

- Функция обратная по величине бесконечно малой, но отличная от 0, есть бесконечно малая

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



Основные теоремы о пределах

Теорема 1: Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \alpha(x)$$

Следствие 1: Функция не может в одной точке иметь 2 различных предела.

Теорема 2: Предел постоянной величины равен самой постоянной

Теорема 3: Если функция $f(x)$ для всех x в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может, самой точки a , и в точке a имеет предел, то $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$$



Основные теоремы о пределах (продолжение)

Теорема 4: Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$, то при $x \rightarrow a$ имеет пределы также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$, и при условии $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ частное $f_1(x)/f_2(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) / \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

Следствие 2: Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n, \text{ где } n - \text{натуральное число.}$$

Следствие 3: Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ } C - \text{const}$$

Неопределенности и методы их решений

Неопределенность вида

$$\frac{0}{0}$$

- **Методы:**

1. **Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением**
2. **Устранение иррациональных разностей. Домножение на сопряженное.**
3. **Первый замечательный предел.**

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$



Неопределенности и методы их решений

Неопределенность вида

- **Методы: Деление на наибольшую степень**
- **Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремится к ∞) равен пределу отношения их старших членов.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + \dots + b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ \frac{a_0}{b_0} & (m = n) \\ \infty & (m > n) \end{cases}$$

Здесь $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$



Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 14x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n - 1}{n^4 + 2n}$$



ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существуют пределы при

$$x \rightarrow x_0 \quad \text{или} \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$$

$$x \rightarrow \infty$$

Тогда справедливы следующие теоремы:

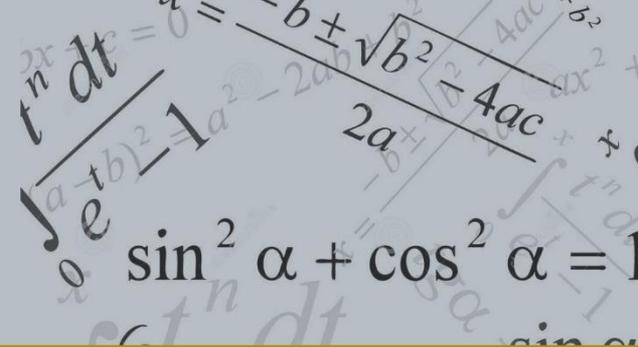


ТЕОРЕМА 1.

Функция не может иметь более одного предела.



Доказательство:



Предположим обратное: что функция $f(x)$ имеет два предела: A и D , $A \neq D$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = D$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = D$$

Тогда функцию $f(x)$ можно представить как сумму:

$$f(x) = \alpha(x) + A \text{ или } f(x) = \beta(x) + D$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ - бесконечно малые величины

при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$



Вычитаем почленно эти равенства:

$$0 = A - D + \alpha(x) - \beta(x)$$

$$D - A = \alpha(x) - \beta(x)$$

Но по условию теоремы $A \neq D$, а разность

$$\alpha(x) - \beta(x)$$

является бесконечно малой величиной.

Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно, и функция имеет единственный предел.

ТЕОРЕМА 2.

Предел алгебраической суммы
(разности) конечного числа функций
равен сумме (разности) пределов этих
функций:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) \pm \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x) = A \pm B$$



Доказательство:

По условию теоремы: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$
 $x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$

Тогда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно представить как суммы:

$$f(x) = \alpha(x) + A \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \beta(x) + B$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ - бесконечно малые величины
при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$

Складываем почленно эти равенства:

$$f(x) + \varphi(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x)$$

Сумма бесконечно малых величин является величиной бесконечно малой.

Таким образом, функция $f(x) + \varphi(x)$ представляет собой сумму числа $A+B$ и бесконечно малой величины, следовательно

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B$$
$$x \rightarrow \infty \qquad x \rightarrow \infty \qquad x \rightarrow \infty$$



Следствие.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = C \cdot A$$



ТЕОРЕМА 4.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$$



ТЕОРЕМА 5.

Если $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ **и** $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$

то предел сложной функции существует и равен

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$$



ТЕОРЕМА 6.

Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших x) $f(x) < \varphi(x)$ то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$$



Замечание

В этих теоремах полагается, что существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из чего следует существование пределов суммы, произведения или частного этих функций.

Однако из существования пределов суммы, произведения или частного еще не следует, что существуют пределы самих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.



Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = 1$$

Но: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ - не существует

Таблица эквивалентности пределов

Пусть функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией в точке a , то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

тогда имеют место следующие соотношения:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$$

$$(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x)$$



Примеры

ПРИМЕР

Задание Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{\sin x}$$

Решение Данный предел имеет неопределенность

$$\left[\frac{0 \cdot \arcsin 0^2}{\sin 0} = \frac{0}{0} \right]$$

Перейдем под знаком предела к эквивалентным бесконечно малым (это можно сделать, поскольку аргументы арксинуса и синуса стремятся к нулю):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{\sin x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Ответ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{\sin x} = 0$



ПРИМЕР

Задание Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1}$$

Решение Выясним, имеет ли рассматриваемый предел неопределенность и если да, то какого типа:

$$\left[\frac{\operatorname{tg}(1-1)}{1^2-1} = \frac{\operatorname{tg}0}{0} = \frac{0}{0} \right]$$

То есть имеем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0} \right]$. Поскольку аргумент тангенса стремится к нулю, при стремлении x к единице, то можно тангенс заменить эквивалентной ему величиной:

$$\operatorname{tg}(x-1) \sim x-1$$

К знаменателю дроби применим формулу сокращенного умножения «разность квадратов»:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ответ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$