СИГНАЛИ та ПРОЦЕСИ у РАДІОТЕХНІЦІ

Частина 1
Сигнали та процеси в лінійних системах неперервного часу

Лекція 1
Класифікація та моделі сигналів та систем

Загальна модель обробки сигналів

На рис. 1.1 представлено загальну модель обробки сигналів.

Рис. 1.1.

1.1. Класифікація та математичні моделі сигналів і процесів

Сигнал, як правило, можна представити у вигляді математичної моделі двома способами.

1. Сигнал — деяка *функція часу*, що описує фізичну величину, безпосередньо пов'язану із системою, де він діє. У цьому випадку називатимемо його ***коливанням***. Сигнал як фізичний процес завжди існує на кінцевому інтервалі часу, однак в теорії сигналів, як правило, сигнали розглядають на нескінченному або напівнескінченному інтервалі часу.

2. Сигнал — деяка *функція частоти*. У цьому випадку сигнал відображується своїм *спектром*.

Детерміновані та випадкові сигнали

Сигнали в реальних радіотехнічних системах за своєю природою випадкові. В теорії сигналів, однак, всі сигнали поділяють на повністю відомі — ***детерміновані*** і ***випадкові***.

Детермінований сигнал — це повністю відомий сигнал, його миттєві значення передбачені абсолютно точно, тому він не несе ніякої інформації.

Випадковий сигнал — це сигнал, миттєві значення якого заздалегідь невідомі, оскільки вони змінюються випадковим чином. Це означає, що вони можуть бути передбачені лише з деякою імовірністю, меншою за 1.

Керувальні, ВЧ немодульовані та модульовані сигнали

Класифікувати детерміновані сигнали можна за різними ознаками. Прийнято розрізнювати детерміновані сигнали трьох основних класів: *керувальні, високочастотні немодульовані та високочастотні модульовані*.

Керувальні (модулюючі, первинні) сигнали — це порівняно низькочастотні коливання, що містять в собі інформацію, і не можуть бути безпосередньо використані для передачі на великі відстані за допомогою електромагнітних хвиль.

Високочастотні (ВЧ) немодульовані сигнали — це коливання, здатні поширюватися у вигляді електромагнітних хвиль на великі відстані.

Модульовані (вторинні) сигнали — це ВЧ коливання, один або декілька параметрів яких промодульовано коливанням первинного сигналу. Вони здатні поширюватися у вигляді електромагнітних хвиль на великі відстані. В радіотехніці використовують амплітудну (АМ), частотну (ЧМ), фазову (ФМ), імпульсну (ІМ), а також ряд інших складніших типів модуляції.

Неперервний сигнал

Неперервний сигнал — це коливання $s(t)$, задане в незчисленній множині* точок часової осі і яке триває нескінченно довго, $-\infty < t < \infty$. На рис. 1.2 наведено приклад такого коливання $s_1(t) = 2/(1+t^2)$.

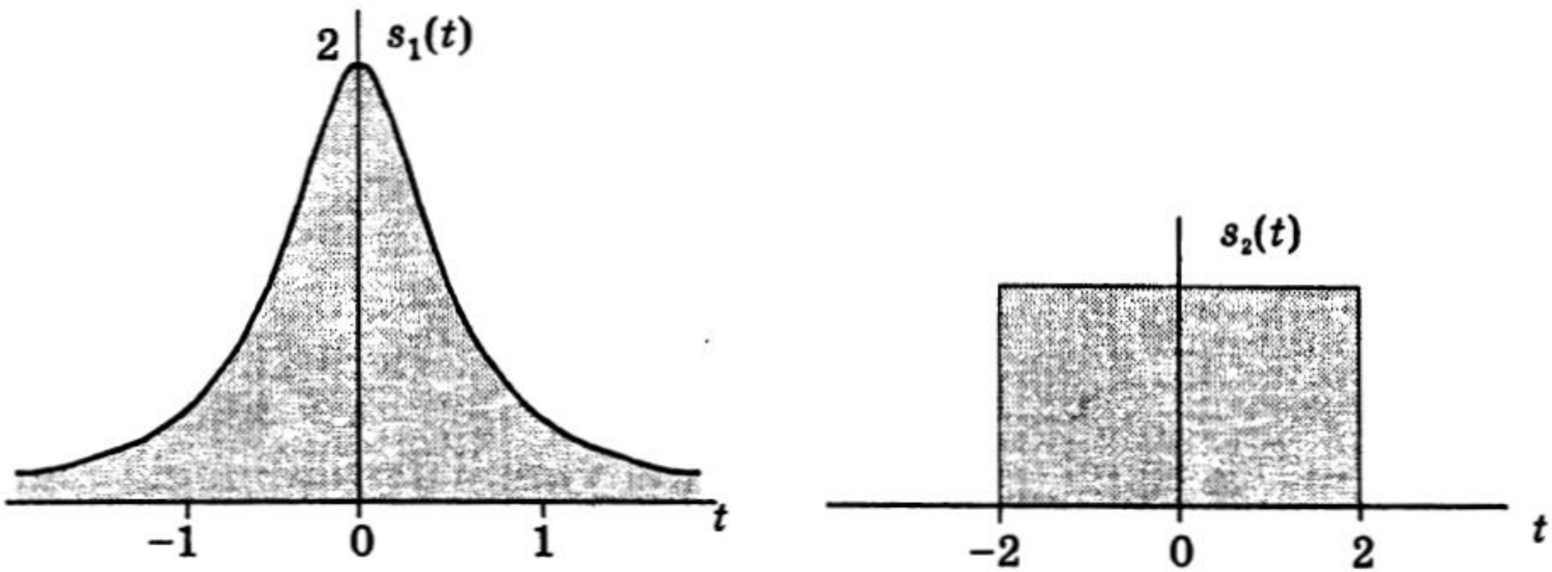

Рис. 1.2.

Імпульсний сигнал

Поодиноким випадком неперервного сигналу є *імпульсний сигнал* — коливання, енергія якого відмінна від нуля в обмеженому інтервалі часу. Прикладом імпульсного сигналу, який є неперервним, але в той же час не є неперервною функцією часу, буде імпульс прямокутної форми. Для таких сигналів введено спеціальне позначення:

$$A\Pi\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)=\begin{cases}A, & t_0-\tau/2\le t<t_0+\tau/2,\\ 0, & \textit{інакше}.\end{cases} \qquad (1.1)$$

де A — максимальне значення (висота) імпульсу;
τ — тривалість імпульсу;
t_0 — час його появи.

Дискретні, квантовані та цифрові сигнали

У деяких системах неперервний сигнал представлений лише відліками його миттєвих значень в окремі, дискретні моменти часу. Такі сигнали називаються ***дискретними в часі*** або просто ***дискретними***. Прикладом такого сигналу є коливання $s_1(t)$, наведене на рис. 1.3. Таким чином, ***дискретний сигнал*** — це коливання, область визначення якого — зчисленна множина точок часової осі, а область приймaних значень — незчисленна множина. Значення, яких набуває сигнал у цих точках, називають ***відліками*** або ***вибірками сигналу***.

Квантований сигнал — це сигнал, область визначення якого є незчисленною множиною, а область приймaних значень — зчисленною. Приклад такого сигналу — коливання $s_2(t)$ на рис. 1.3. Таким чином, квантований сигнал може набувати лише фіксованих значень (рівнів), але зміна від рівня до рівня відбувається в довільні моменти часу.

Цифрові сигнали — це сигнали дискретні в часі і квантовані за приймaними значеннями (коливання $s_3(t)$ на рис. 1.3).

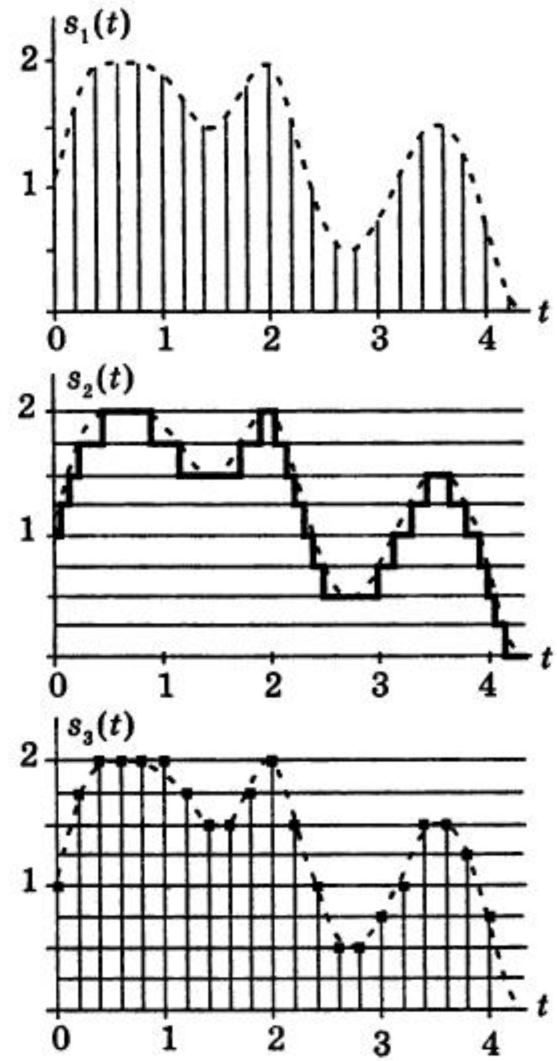

Рис. 1.3.

Періодичний сигнал

Періодичні та неперіодичні (аперіодичні) сигнали

Сигнал $s(t)$ називається ***періодичним*** тоді і лише тоді, коли він задовольняє умові:

$$s(t + T_0) = s(t), \quad -\infty < t < \infty. \qquad (1.2)$$

Тут T_0 — період.

Найменше значення T_0, при якому виконується ця умова, називають ***основним*** або ***фундаментальним періодом*** сигналу $s(t)$.

Прикладом періодичного сигналу є синусоїдне коливання

$$s(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \theta_0), \quad -\infty < t < \infty.$$

A_0, f_0 і θ_0 — деякі константи; $2\pi f_0 = \omega_0$, $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$.

Комплексний сигнал

Комплексні сигнали та спектри

Тут під терміном *«комплексний сигнал»* розумітимемо такий сигнал, який можна подати у вигляді вектора на комплексній площині.

Всі фізичні системи працюють з *реальними (дійсними)* сигналами. Однак, при аналізі й синтезі сигналів часто математично зручно (наприклад, для лінійних систем) реальний сигнал представити за допомогою комплексних функцій.

Комплексну величину $\underline{A} = Ae^{j\theta}$ зручно використати для математичного опису реального синусоїдного коливання

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\underline{A}\, e^{j\omega_0 t}\} = \mathrm{Re}\{A\, e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} = A\cos(\omega_0 t + \theta), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.3)$$

Сигнал

$$\underline{x}(t) = A e^{j(\omega_0 t + \theta)}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.4)$$

називається ***комплексним сигналом***. Його можна зобразити за допомогою вектора на комплексній площині, який обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω_0. Скориставшись теоремою Ейлера (А.1), можна показати, що комплексний сигнал $\underline{x}(t)$ є періодичним сигналом, і його період $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Перехід від комплексного сигналу до реального

Щоб від комплексного сигналу перейти до реального, можна скористатися двома способами:

1. взяти реальну частину комплексного сигналу, тобто

$$x(t) = \mathrm{Re}[\underline{x}(t)]; \qquad (1.5)$$

2. доповнити $\underline{x}(t)$ дзеркальною компонентою, тобто записати

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\underline{x}(t) + \tfrac{1}{2}\underline{x}^*(t) = \tfrac{A}{2}e^{j(\omega_0 t+\theta)} + \tfrac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t+\theta)}, \quad -\infty < t < \infty. \qquad (1.6)$$

Ця друга, дзеркальна, компонента є спряженим вектором, що обертається на комплексній площині у протилежному відносно вектора $\underline{x}(t)$ напрямку. Рис. 1.4, *а*1) і *б*1) ілюструють ці два способи.

Однобічний (фізичний) та двобічний (математичний) спектри реального сигналу

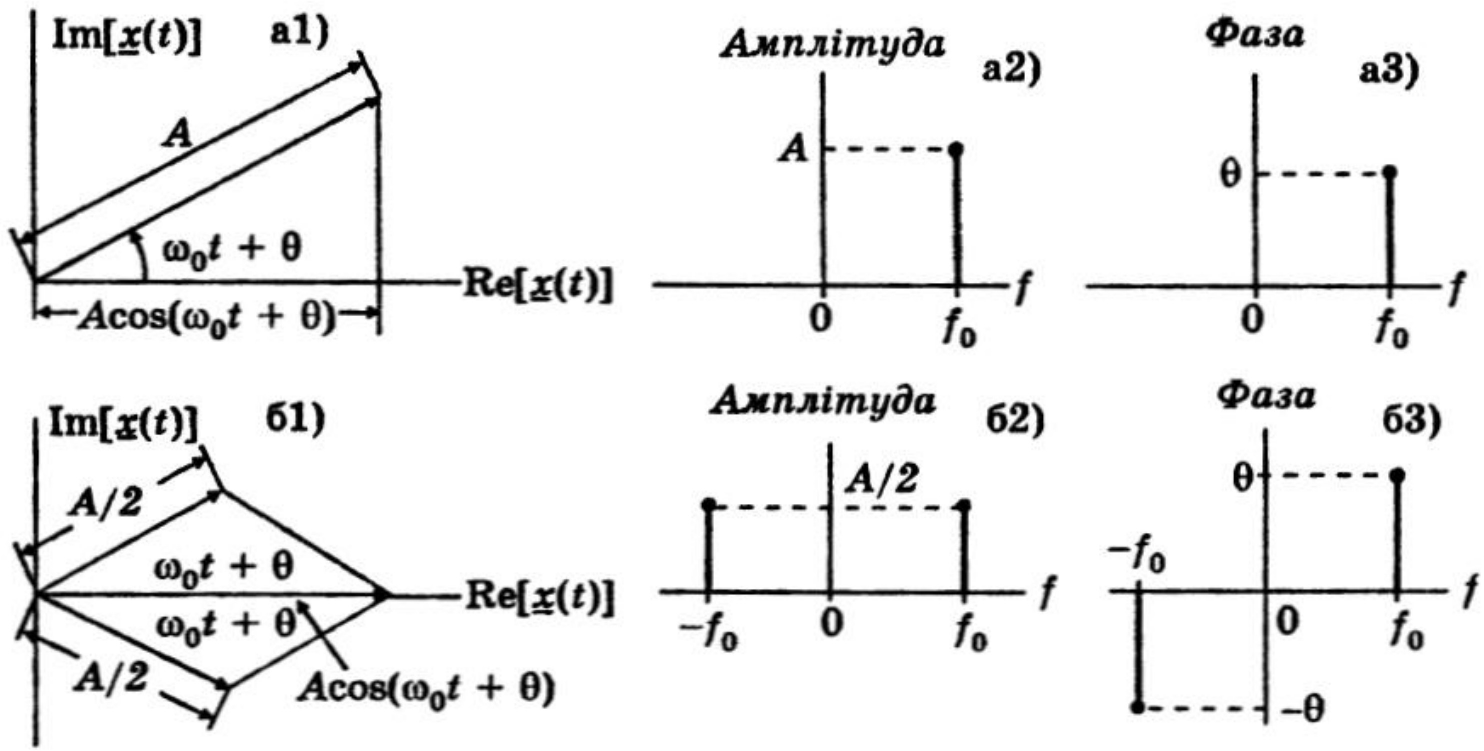

Рис. 1.4.

Особливості двобічних спектрів реальних сигналів

Три важливі особливості двобічних спектрів:

- спектральні лінії на від'ємних частотах ***обов'язкові***;
- спектр амплітуд має ***парну симетрію***;
- спектр фаз має ***непарну симетрію***.

Ці три властивості є ***необхідною умовою*** того, що сигнал $x(t)$ є ***дійсною функцією часу***.

Енергія та потужність сигналів

Енергія та потужність сигналів. Сигнали енергії і сигнали потужності

При розв'язанні практичних задач радіотехніки часто використовуються окремі кількісні характеристики сигналів і процесів такі, наприклад, як їх енергія і потужність.

Всі сигнали поділяються на три класи: сигнали зі скінченною енергією (називатимемо їх ***сигналами енергії***), сигнали зі скінченною середньою потужністю (***сигнали потужності***) і сигнали, які не належать ні до першого, ні до другого класів.

Миттєва потужність. Енергія та середня потужність на інтервалі

Нехай $u(t)$ — напруга, прикладена до резистора з опором R. Ця напруга викликає струм $i(t)$, який протікає через резистор. Якщо $R = 1$ Ом, *миттєва потужність*

$$p(t) = u(t)i(t) = u^2(t) = i^2(t) = s^2(t), \tag{1.7}$$

де $s(t)$ — загальне позначення довільного сигналу незалежно від його розмірності.

Інтегруючи миттєву потужність на інтервалі $|t| \le T$, можна знайти його енергію E та середню потужність P_0:

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} s^2(t)dt, \quad P_0 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t)dt. \tag{1.8}$$

Якщо сигнал визначено на скінченному інтервалі часу $a \le t \le b$ і $b - a = T$, то ці формули матимуть вигляд:

$$E = \int_{a}^{b} s^2(t)dt, \quad P_0 = \frac{1}{T}\int_{a}^{b} s^2(t)dt. \tag{1.9}$$

Енергія та середня потужність на інтервалі для довільного сигналу

Для довільного сигналу $s(t)$, який може бути й комплексним, енергія та середня потужність, що виділяються на опорі 1 Ом, обчислюється за формулами:

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt, \quad P_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 dt. \qquad (1.10)$$

Сигнали зі скінченою енергією та скінченою потужністю

1. Сигнал $s(t)$ є *сигналом енергії*, якщо $0 < E < \infty$. При цьому, природно, $P_0 = 0$.

2. Сигнал $s(t)$ є *сигналом потужності*, якщо $0 < P_0 < \infty$. При цьому, природно, $E = \infty$.

3. До третього класу належать ті сигнали, енергетичні характеристики яких не задовольняють умовам ні першого, ні другого класів. Це може бути, наприклад, сигнал, заданий на нескінченному інтервалі часу, енергія якого нескінченна, а середня потужність дорівнює нулю.

Середня потужність періодичного сигналу

Нехай тепер $s(t)$ періодичний сигнал з періодом повторення T_0. Очевидно, що такий сигнал належить до класу сигналів потужності і для нього середня потужність дорівнює

$$P_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |s(t)|^2 dt, \quad t_0 \text{ — довільний момент часу.} \quad (1.11)$$

Сума енергій і середніх потужностей ортогональних сигналів

Ортогональність сигналів за енергією та потужністю

У загальному випадку миттєва потужність суми сигналів не дорівнює сумі їх миттєвих потужностей, однак енергія і середня потужність суми сигналів може дорівнювати сумі їх енергій або середніх потужностей. Це відбудеться, якщо сигнали *ортогональні*.

Сума енергій і середніх потужностей двох сигналів

Нехай два сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ є дійсними і заданими на скінченному інтервалі часу $[a, b]$. Знайдемо енергію суми цих сигналів.

$$E = \int_a^b [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_a^b s_1^2(t)\,dt + \int_a^b s_2^2(t)\,dt + 2\int_a^b s_1(t)\,s_2(t)\,dt =$$

$$= E_1 + E_2 + 2E_{12}\,. \qquad (1.12)$$

Середня потужність суми цих сигналів дорівнюватиме

$$P_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = P_1 + P_2 + 2P_{12}. \qquad (1.13)$$

Тут P_1 і E_1 — середня потужність та енергія сигналу $s_1(t)$ відповідно;

P_2 і E_2 — середня потужність та енергія сигналу $s_2(t)$ відповідно;

P_{12} і E_{12} — взаємна середня потужність та взаємна енергія сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$ відповідно.

Сигнали, ортогональні за енергією

Два сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ називаються ***ортогональними за енергією***, якщо їх взаємна енергія дорівнює 0, тобто:

$$E_{12} = \int_a^b s_1(t) s_2(t) dt = 0, \quad (1.14)$$

за умови, що $E_1 \neq 0$ і $E_2 \neq 0$.

Якщо сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ задані на скінченному інтервалі часу, з ортогональності за енергією виходить і ортогональність за потужністю, й обидва ці поняття можуть бути застосовні однаковою мірою. У випадку, коли сигнали задані на *нескінченному інтервалі часу*, поняття ортогональності за енергією може бути застосовне *лише до сигналів енергії*, а поняття ортогональності за потужністю — *лише до сигналів потужності*.

1.2. Сингулярні функції та їх використання при моделюванні детермінованих сигналів

Важливим класом моделей неперіодичних сигналів є сингулярні функції $U(t)$, $r(t)$ і $\delta(t)$.

Одинична функція (функція Хевісайда, функція включення, функція одиничного стрибка)

Ця функція позначується $U(t)$ інколи $1(t)$ та визначається таким виразом:

$$U(t) = U_{-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0{,}5, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Отримання функції Хевісайда за допомогою граничного переходу

Нехай математична модель сигналу задана системою рівностей

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<-\xi,\\ 0{,}5(t/\xi+1), & -\xi\le t<\xi,\\ 1, & t\ge\xi.\end{cases}$$

Тоді $\lim\limits_{\xi\to 0} u(t)=U(t)$.

Епюри сигналів $u(t)$ і $U(t)$ наведено на рис. 1.6.

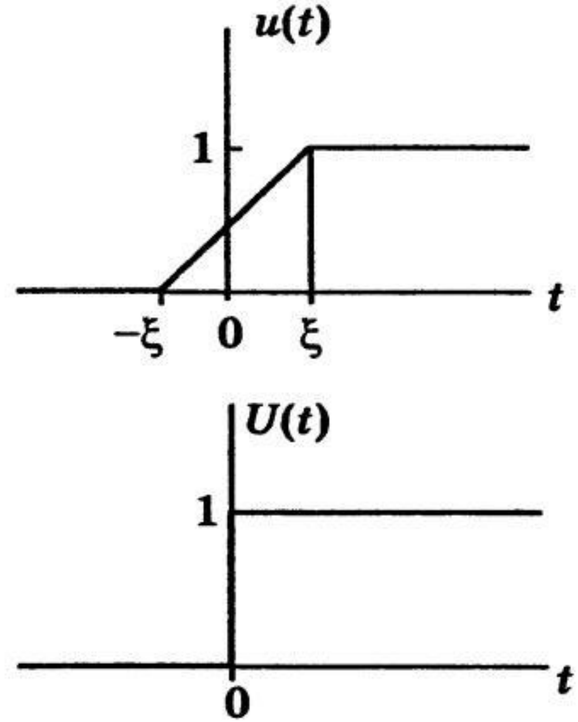

Рис. 1.6.

Зв’язок інших сингулярних функцій з функцією Хевісайда

Інші сингулярні функції визначаються через функцію $U_{-1}(t)$. У загальному випадку

$$U_{i-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_i(t)\,dt, \quad i = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1.17)$$

або

$$U_{i+1}(t) = \frac{dU_i(t)}{dt}. \qquad (1.18)$$

Функція лінійного зростання

Таким чином,

$$U_{-2} = \int_{-\infty}^{t} U_{-1}(t)\,dt.$$

Функція $U_{-2}(t)$, як і функція $U_{-1}(t)$, часто використовується при моделюванні детермінованих сигналів, позначується $r(t)$ і називається ***функцією лінійного зростання*** або, іноді, ***функцією люфту***, тобто

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \qquad (1.19)$$

На рис. 1.7 наведено графік функції $r(t)$.

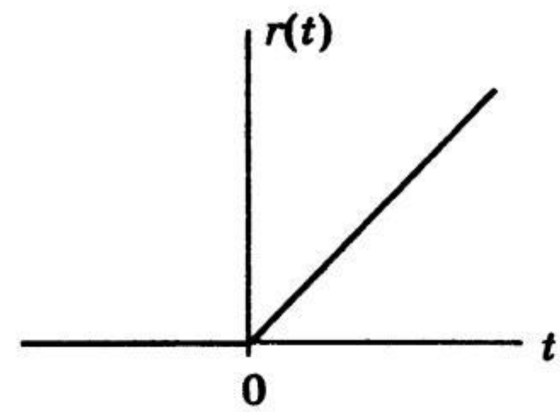

Рис. 1.7.

Знакова функція

Знакова функція

Позначається $sign(t)$ і має графік, наведений на рис. 1.10.

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases} = \frac{t}{|t|} = 2U(t) - 1. \qquad (1.20)$$

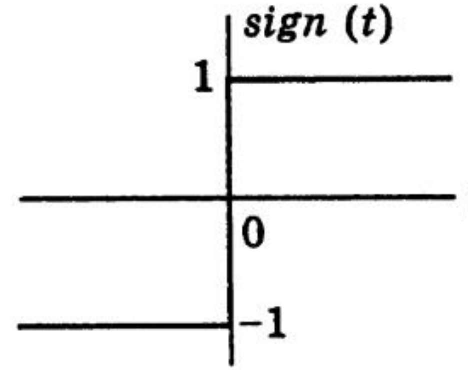

Рис. 1.10.

Дельта-функція

Дельта-функція
(функція Дірака, одинична імпульсна функція)

Якщо скористатися формулами (1.17), (1.18), що встановлюють зв'язок одних сингулярних функцій з іншими, можемо отримати ще одну дуже важливу функцію

$$U_0(t) = \frac{dU_{-1}(t)}{dt}.$$

Ця нова сингулярна функція має назву ***дельта-функція*** й позначається $\delta(t)$.

Таким чином,

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt}. \qquad (1.21)$$

Властивості дельта-функції

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ t \neq 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \end{cases} \tag{1.22}$$

Функцію, що має такі властивості, можна одержати лише за допомогою граничного переходу. Розглянемо функцію

Отримання дельта-функції шляхом граничного переходу

Функцію, що має такі властивості, можна одержати лише за допомогою граничного переходу. Розглянемо функцію

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\prod\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t| < \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon. \end{cases}$$

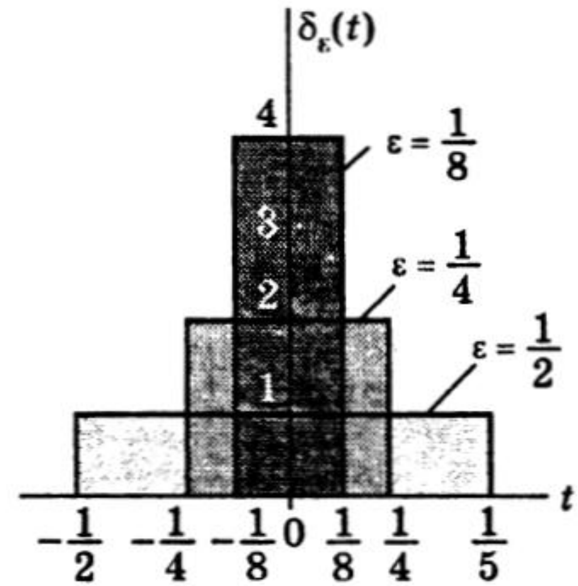

Рис. 1.11.

Епюри функції $\delta_\varepsilon(t)$ для трьох значень ε наведено на рис. 1.11. Можна зазначити, що зі зменшенням значення ε тривалість імпульсу пропорційно зменшується, а його висота пропорційно збільшується так, щоб добуток тривалості на висоту (величина площі) залишався таким, що дорівнює 1. При спрямуванні ε до 0 функція $\delta_\varepsilon(t)$ стає такою, що для неї виконуються обидві властивості (1.22). Таким чином,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t).$$

Визначення дельта-функції через її фільтруючу властивість

Існує багато функцій $\delta_\varepsilon(t)$, для яких справедливий такий граничний перехід (див. задачі до розділу 1).

Більш строге математичне визначення дельта-функції використовує поняття ***функціонала****.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0), \qquad (1.23)$$

$x(t)$ — неперервна функція часу в околі $t = 0$.

Дельта-функція має *строгий математичний зміст* лише в разі, коли вона використовується під знаком інтеграла.

Особливості зміни часового масштабу дельта-функції

Наприклад, справедливе твердження

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t). \qquad (1.24)$$

Якщо в (1.24) вставити $a = -1$, одержимо:

$$\delta(-t) = \delta(t), \qquad (1.25)$$

що співпадає з визначенням парної функції.

Властивості дельта-функції

1. ***Дельта-функція є парною функцією.***

2. ***Дельта-функція має фільтрувальну властивість.***

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0), \tag{1.26}$$

де $x(t)$ — неперервна функція в околі $t = t_0$.

Інтеграл зі скінченними межами інтегрування можна розглядати як поодинокий випадок (1.26), якщо прийняти $x(t) \equiv 0$ поза межами інтервалу $t_1 < t < t_2$. Тоді формулу (1.26) можна записати так:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} x(t_0), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t_2 < t < t_1. \end{cases} \tag{1.27}$$

Властивості дельта-функції

3. ***Згортка довільної функції з дельта-функцією є саме ця довільна функція.***

Щоб обґрунтувати цю властивість, використаємо властивість парності й запишемо (1.26) у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)\,d\lambda = x(t). \qquad (1.28)$$

Зауважимо, що ліва частина виразу (1.28) є згорткою функцій $x(t)$ та $\delta(t)$. Тоді одержимо:

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t). \qquad (1.29)$$

Тут «$\otimes$» — символ, яким будемо позначати згортку.

Властивості дельта-функції

4. ***Ця властивість дельта-функції визначається такою рівністю:***

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0), \tag{1.30}$$

якщо $x(t)$ неперервна в околі $t=t_0$.

Рівність (1.30) виходить з того, що $\delta(t-t_0)=0$ скрізь, крім $t=t_0$.

5.

$$U(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda. \tag{1.31}$$

Простір сигналів
Множини сигналів

Гармонічні (синусоїдний) сигнали

Позначимо через S_c множину всіх гармонічних (синусоїдних) сигналів, тобто,

$$S_c = \{x\colon x(t) = \mathrm{Re}\{A\exp[j(\theta + 2\pi f t)]\},$$

$$-\infty < t < \infty,\ A,\ \theta,\ f \in R\}. \qquad (1.32)$$

Твердження A, θ, $f \in R$ означає, що ці параметри можуть довільно вибиратися з множини всіх дійсних чисел R, тому S_c містить гармонічні коливання зі всілякими амплітудами, фазами та частотами.

Часто властивість P для конкретної множини можна задати в іншій формі, наприклад,

$$S_c = \left\{x : \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \lambda^2 x(t) = 0,\quad -\infty < t < \infty,\quad \lambda \in R\right\}. \qquad (1.33)$$

Простір сигналів
Множини сигналів

Періодичні сигнали

Позначимо через $\mathrm{S}_R(T)$ множину періодичних сигналів з періодом T, де $T < \infty$, тобто

$$\mathrm{S}_R(T) = \{x : x(t+T) = x(t), \quad -\infty < t < \infty\}. \tag{1.34}$$

Обмежені сигнали

Множину сигналів, миттєві значення яких обмежені за величиною деяким дійсним додатним числом K, позначимо:

$$\mathrm{S}_M(K) = \{x : |\, x(t) \le K, \quad -\infty < t < \infty\}. \tag{1.35}$$

Зрозуміло, що

$$x \in \mathrm{S}_M(K_1) \Rightarrow x \in \mathrm{S}_M(K_2), \quad K_2 \ge K_1. \tag{1.36}$$

Простір сигналів
Множини сигналів

Сигнали з обмеженою енергією — сигнали енергії

Про сигнали з множини

$$\mathrm{S}_E(K)=\left\{x:\lim_{T\to\infty}\int_T x^2(t)\,dt\le K\right\} \qquad (1.37)$$

кажуть, що їх енергія обмежена величиною K, де K — додатне дійсне число. Тут мають на увазі, що $x(t)$ є напругою на навантаженні 1 Ом, тоді інтеграл — це повна енергія, що виділяється на навантаженні.

Сигнали з обмеженою середньою потужністю — сигнали потужності

Множиною таких сигналів буде:

$$\mathrm{S}_P(K)=\left\{x:\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)\,dt\le K\right\}. \qquad (1.38)$$

Простір сигналів

Множини сигналів

Сигнали обмеженої тривалості (імпульсні сигнали)

$\mathsf{S}_D(T)$ — це множина сигналів, які дорівнюють нулю за межами інтервалу часу $-T \le t \le T$:

$$\mathsf{S}_D(T) = \{x : x(t) = 0, \quad |t| > T\}. \tag{1.39}$$

Очевидно, що

$$x \in \mathsf{S}_D(T_1) \Rightarrow x \in \mathsf{S}_D(T_2), \quad T_2 \ge T_1. \tag{1.40}$$

Сигнали з обмеженою смугою частот

$\mathsf{S}_B(F_m)$ — це множина сигналів зі смугою частот, обмеженою деякою частотою F_m, тобто

$$\mathsf{S}_B(F_m) = \left\{x : X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = 0, \quad |f| > F_m\right\}, \tag{1.41}$$

де $X(f)$ є перетворенням Фур'є функції часу $x(t)$.

Метричні простори

Метричні простори

> ***Метричним простором*** **називають абстрактну множину, для довільних елементів x та y якої визначено функцію $d(x, y)$ — так звану *відстань*.**

Загальний підхід до визначення різниці між двома елементами множини полягає в тому, що кожній парі елементів ставиться у відповідність дійсне додатне число, що трактується як *відстань* між елементами. При цьому сама множина набуває геометричних властивостей. Використанню цих властивостей при аналізі сигналів присвячено підрозділі 2.4*.

Відстань, простір сигналів, метрика

Множина, в якій певним чином визначена відстань є *простором сигналів*.

Щоб визначити відстань у просторі сигналів, необхідно мати деякий функціонал, який відображає всі пари елементів множини на дійсну вісь. Такий функціонал $d:\{x, y\} \to R$ називається ***метрикою***, якщо він має такі властивості:

$$d(x, y) \geq 0, \text{ причому } d(x, y) = 0 \text{ тоді і тільки тоді, якщо } x = y,$$
$$d(x, y) = d(y, x) \text{ (симетрія)}, \qquad (1.42)$$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (нерівність трикутника)}.$$

(1.42) — це математичне формулювання властивостей відстані:

- відстань — це величина, що не є від'ємною;
- відстань від x до y дорівнює відстані від y до x;
- довжина однієї сторони трикутника не може перевищувати суму довжин двох інших (тут елементи x, y і z геометрично представлені як вершини трикутника).

Метричний простір

Множина χ, що має метрикою d, називається ***метричним простором*** (χ, d).

Приклад 1.9

Дійсна вісь R, що включає множину всіх дійсних чисел, є метричним простором з метрикою

$$d(x, y) = |x - y|; \quad x, y \in R. \qquad \square$$

Метричний простір

Приклад 1.10

На базі множини R^n упорядкованих послідовностей n дійсних чисел можна утворити різні метричні простори. Якщо $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ і $y = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, тоді наступні функціонали є прикладами можливих метрик:

$$\text{а) } d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|,$$

$$\text{б) } d_2(x,y) = \left|\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2\right|^{1/2}, \tag{1.43}$$

$$\text{в) } d_3(x,\ y) = \max\{|\alpha_i - \beta_i|; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Ці метрики можуть також бути застосовані на множині C^n послідовностей n комплексних чисел.

Метрика (1.43 б)) відповідає звичному розумінню відстані у тривимірному просторі і називається ***евклідовою метрикою***.

Метричний простір

Приклад 1.11

В системах зв'язку з передачею інформації у вигляді двійкових символів (0 або 1) повідомлення здебільшого є деякою послідовністю кодованих слів фіксованої довжини, наприклад, n-значних (див. розділ 10). У такому разі з множини 2^n різних слів можна утворити метричний простір, якщо задати відстань між довільною парою слів, що дорівнює числу незбіжних символів. Це рівнозначно підсумовуванню за модулем 2 символів у всіх позиціях:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} [(\alpha_i + \beta_i) \bmod 2].$$

Така метрика називається ***відстанню за Геммінгом*** для двійкових слів і використовується для побудови кодів з виявленням помилок і кодів з коректуванням.

Метричний простір

Приклад 1.12

Для довільної множини дійсних або комплексних функцій, що задані на скінченному інтервалі часу $T = \{t;\ a \le t \le b\}$, можна знайти метрики, аналогічні (1.43):

$$\text{а) } d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt,$$

$$\text{б) } d_2(x,y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt\right]^{1/2}, \tag{1.44}$$

$$\text{в) } d_3(x,\ y) = \sup\{|x(t) - y(t)|;\quad t \in T\}.$$

Для метрик d_1 и d_2 характерна така особливість: якщо $x(t)$ і $y(t)$ відрізняються тільки в одній точці (див. нижче рис. 2.4 і пояснення до нього), тоді $d(x,\ y) = 0$. Ця трудність переборюється тим, що функції, які відрізняються лише на скінченній множині точок інтервалу T, трактуються як одна точка метричного простору. В такому разі говорять, що функції $x(t)$ і $y(t)$ *співпадають майже всюди*. □

Лінійні простори

Лінійні простори

Наступний крок удосконалення структури простору сигналів досягають при внесенні достатньо простих алгебраїчних взаємозв'язків між сигналами. Такі взаємозв'язки мають місце у *лінійних просторах*.

Критерії лінійного (векторного) простору

Множину $\mathbf{X}$ елементів $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ..., що називаються ***векторами***, називають ***лінійним***, або ***векторним простором***, якщо вона задовольняє таким умовам.

1. Для кожної пари векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ однозначно визначено третій вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, який називають їх сумою, причому

а) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (комутативність);

б) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (асоціативність);

в) множина $\mathbf{X}$ містить тільки один вектор $\mathbf{0}$ — ***нульовий елемент*** — такий, що $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ для всіх $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$;

г) для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ існує єдиний вектор $-$(«мінус»)$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ такий, що $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (тобто існує протилежний елемент-вектор).

Критерії лінійного (векторного) простору

2. Існує множина елементів, які називаються ***скалярами*** і утворюють *поле*, а також існує операція, яка зветься ***добутком вектора на скаляр***, що ставить у відповідність кожному скаляру α і кожному вектору $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ вектор $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, причому

а) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = \alpha\beta\mathbf{x}$ (асоціативність);

б) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ і $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$;

в) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (дистрибутивність).

Якщо скаляри є дійсними числами, лінійний простір називається ***дійсним лінійним простором***. Якщо скаляри є комплексними числами, лінійний простір називається ***комплексним лінійним простором***.

Лінійна комбінація векторів та лінійний підпростір

Вектор, утворений сумою декількох векторів зі скалярними коефіцієнтами, називається ***лінійною комбінацією***:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i . \qquad (1.45)$$

Множина лінійних комбінацій векторів $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ утворює лінійний простір. Якщо взяти підмножину $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ множини $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, де $m < n$, тоді множина лінійних комбінацій векторів підмножини утворює лінійний простір, що є підпростором початкового лінійного простору, утвореного лінійними комбінаціями первинної множини векторів $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Цей підпростір називається ***лінійним підпростором***.

Лінійна незалежність векторів

Множина векторів $\{\mathbf{x}_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ називається ***лінійно незалежною***, якщо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = 0 \qquad (1.46)$$

має місце тільки при всіх α_i, що дорівнюють нулю. Іншими словами, *будь-який вектор лінійно незалежної множини не можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів цієї множини.*

Базис лінійного простору

Нехай M — простір лінійних комбінацій *n* лінійно незалежних векторів $\{\mathbf{x}_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Кожний вектор у M відповідає єдиній лінійній комбінації векторів $\{\mathbf{x}_i\}$. У такому разі M називається *n-вимірним* лінійним простором, а множина $\{\mathbf{x}_i\}$ — *базисом* простору M. Кажуть, що M *натягнуто* на цей базис.

Будь-яка множина *n* лінійно незалежних векторів у M може бути його базисом. Таким чином, лінійний простір має не один базис.

Нормовані лінійні простори

Нормовані лінійні простори

Тепер об'єднаємо геометричні властивості метричних просторів і алгебраїчні властивості лінійних просторів. Це можна зробити, якщо визначити деяке дійсне число, що характеризує «розмір» елемента у лінійному просторі. Таке число має назву ***норма вектора*** (позначається $\|\mathbf{x}\|$) і може бути визначене за допомогою будь-якого відображення лінійного простору на дійсну вісь, що задовольняє таким вимогам:

а) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, причому $\|\mathbf{x}\| = 0$, тільки, якщо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

б) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$; (1.47)

в) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Норма узагальнює поняття довжини вектора: якщо взяти до уваги властивості (1.47), легко показати, що

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{1.48}$$

є метрика, що задовольняє умовам (1.42). Така метрика використовується у нормованому лінійному просторі, якщо треба, щоб цей простір був метричним. Зауважимо, що норма вектора дорівнює відстані точки від початку координат.

Норми множин R^n та C^n та функцій часу

У всіх прикладах, що було розглянуто вище у цьому підрозділі, метрики було отримано через норми. Наприклад, можна визначити норму для R^n або C^n співвідношенням

$$\|\mathbf{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right]^{1/2}, \tag{1.49}$$

а для дійсних або комплексних функцій часу, заданих на інтервалі часу T, — співвідношенням

$$\|\mathbf{x}\| = \left[\int_T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}. \tag{1.50}$$

Головна причина того, що саме таку норму найчастіше використовують для подання сигналів, полягає у простоті фізичної інтерпретації квадрата норми. Як легко бачити, квадрат норми сигналу є його енергією.

Множина функцій, для яких норма (1.50) обмежена, називається простором L^2, що позначається $L^2(T)$. Початком координат в цьому просторі є функція, яка дорівнює нулю майже всюди на інтервалі T.

Скалярний добуток векторів

Простори зі скалярним добутком

Останнім кроком в удосконаленні структури простору сигналів **є визначення додаткової геометричної характеристики —** ***скалярного добутку*** **двох векторів. Скалярний добуток є відображенням упорядкованих пар векторів лінійного простору на комплексну площину *C*. Це відображення позначається (x, y) і задовольняє таким властивостям:**

а) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})^*$, де символ «*» означає комплексно-спряжену величину;

б) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (лінійність скалярного добутку за першим аргументом); **(1.51)**

в) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ і $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, якщо тільки $\mathbf{x} = 0$.

З (1.51а) і (1.51б) виходить, що $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ і $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а також, що $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — дійсне число.

Норма через скалярний добуток

Важливим висновком з наведеного визначення скалярного добутку є те, що величина

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \qquad (1.52)$$

є нормою у лінійному просторі.

Таким чином, скалярний добуток породжує норму, яка в свою чергу породжує метрику (1.48). Отже, простір зі скалярним добутком є метричним простором.

Гільбертовий простір та простір сигналів

- Нескінченновимірний комплексний лінійний простір **H** називають ***гільбертовим****, якщо кожній парі елементів **x** і **y** із **H** поставлено у відповідність комплексне число (**x**, **y**) — скалярний добуток, що задовольняє умовам (1.51).

- Цей простір будемо далі розглядати як *простір сигналів*.

Косинус кута між векторами. Скалярний добуток векторів для просторів C^n та $L^2(T)$

У деяких випадках скалярний добуток корисно подавати як деяку міру кута θ між векторами і

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}. \tag{1.53}$$

Для тих просторів, що розглянуто, скалярний добуток можна подати такими аналітичними виразами:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^*; \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^n, \tag{1.54}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_T x(t) y^*(t)\, dt; \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^2(T). \tag{1.55}$$

Класифікація та математичні моделі радіотехнічних кіл та сигналів

В курсі СПР вивчаються системи, утворені з'єднанням різних електричних (радіотехнічних) кіл, заданих своїми системними або передавальними функціями. Особливу увагу далі буде приділено найпростішому нетривіальному з'єднанню — системі зі зворотним зв'язком.

Вичерпним описом електричного кола (його моделлю) є такий опис, що встановлює однозначний зв'язок вхідної дії з реакцією на неї кола, тобто встановлює зв'язок вхід-вихід.

Класифікація та математичні моделі радіотехнічних кіл та сигналів

Опис за допомогою диференційних рівнянь (ДР)

Будь-яке радіотехнічне коло може бути описано ДР такого вигляду:

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t). \quad (1.56)$$

Тут a_i та b_j — деякі коефіцієнти, що залежать від структури та параметрів кола; $x(t)$ — вхідна дія; $y(t)$ — реакція кола на $x(t)$.

Для фізичних кіл, тобто таких, що можуть бути реалізовані, $n \geq m$. Якщо коло описано рівнянням (1.56), то кажуть, що коло має порядок n. Таким чином, порядок кола визначається *порядком найвищої похідної від вихідної змінної* $y(t)$.

За видом ДР (1.56) проводять класифікацію електричних кіл.

Класифікація та математичні моделі радіотехнічних кіл та сигналів

Опис за допомогою інтегральних виразів

В такому разі модель лінійного кола записується за допомогою *інтеграла згортки (Дюамеля)*:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = x(t) \otimes h(t). \quad (1.57)$$

Тут $h(t)$ — імпульсна характеристика кола, що є реакцією кола на вхідну дію $x(t) = \delta(t)$.

Усі кола, що можуть бути представлені за допомогою звичайних лінійних ДР з постійними коефіцієнтами, можуть бути описані також інтегральними моделями (1.57). Однак не усі кола, що можуть бути представлені моделями (1.57), можуть бути описані за допомогою звичайних лінійних ДР з постійними коефіцієнтами.

Аналогова, дискретна, квантована та цифрова системи

Неперервні та дискретні кола та системи

Система є *системою з неперервним часом*, якщо в ній діє неперервний сигнал. Якщо діючий сигнал дискретний, то і система називається ***системою з дискретним часом***. У тому разі, якщо діючий сигнал квантований на скінченне число рівнів, система називається ***квантованою***. Нарешті, у разі дії в системі цифрового сигналу система називається ***цифровою системою***.

Непараметричні та параметричні системи

Системи з постійними та змінюваними у часі параметрами

Система (коло) є ***системою (колом) з постійними параметрами***, якщо в математичній моделі (1.56) жоден з коефіцієнтів a_i та b_j не є функцією часу. Якщо хоч один з коефіцієнтів змінюється за часом, система (коло) буде ***системою (колом) зі змінюваними параметрами*** або ***параметричною системою (параметричним колом)***.

Детерміновані (каузальні) та не детерміновані (не каузальні) системи

Каузальні та некаузальні системи та кола

Каузальною системою (колом) є така система (коло), відгук якої не випереджає вхідної дії, тобто відгук не може з'явитися раніше в часі, ніж буде прикладено вхідну дію.

Система (коло) з неперервним часом є ***каузальною системою (колом)***, якщо та лише якщо з умови, що вхідний вплив

$x_1(t) = x_2(t)$, $t < t_0$, виходить, що відгук $y_1(t) = y_2(t)$, $t < t_0$ (1.58)

при будь-яких $x_1(t)$, $x_2(t)$ і t_0.

Інакше кажучи, система є каузальною, якщо за умови, що різниця двох вхідних сигналів дорівнює нулю для $t < t_0$, різниця сигналів на її виході також дорівнює нулю при $t < t_0$.

З наведених визначень виходить, що умова каузальності кола ставить жорсткі вимоги до її імпульсної характеристики. Використовуючи вираз (1.57), можна довести, що для каузальних систем повинна виконуватися умова

$$h(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0. \tag{1.59}$$

Системи з пам’яттю та без пам’яті

Інерційні та безінерційні системи та кола

Система (коло), відгук якої у будь-який довільний момент часу залежить від величини впливу лише в цей момент часу і не залежить від значень впливу в інші моменти часу, називається ***безінерційною системою (колом) або системою (колом) без пам’яті***.

Інерційною або ***динамічною*** системою називають таку систему, реакція якої залежить як від величини впливу в цей момент, так і від попередніх або майбутніх значень вхідної дії. Якщо система ще й каузальна, то реакція інерційної системи в деякий момент часу залежить як від значення вхідної дії у цей момент, так і від значень його в попередні моменти часу.

Системи, описані ДР вигляду (1.56) або інтегральними рівняннями вигляду (1.57), є динамічними.

Принцип суперпозиції

Лінійні та нелінійні системи та кола

Система називається ***лінійною***, якщо в ній *виконується принцип суперпозиції.*

Принцип суперпозиції (лінійності) визначається так:

Нехай є система така, що $y_1(t) = H[x_1(t)]$ і $y_2(t) = H[x_2(t)]$.

В системі виконується принцип суперпозиції, якщо при довільних сталих α_1 і α_2,

$$H[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 H[x_1(t)] + \alpha_2 H[x_2(t)] = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t).$$

Система (коло) називається ***нелінійною***, якщо в ній *не виконується принцип суперпозиції.*