Линейное программирование

Задача линейного программирования

- Общая постановка ЗЛП: функция цели, система ограничений
- Каноническая (основная) форма записи ЗЛП, симметричная (стандартная) форма ЗЛП
- Допустимое решение (план) ЗЛП
- Оптимальное решение ЗЛП
- Правила приведения к канонической форме ЗЛП

Пример – приведение к канонической форме

$$\max Z = 2x_1 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$

x_3 – любого знака

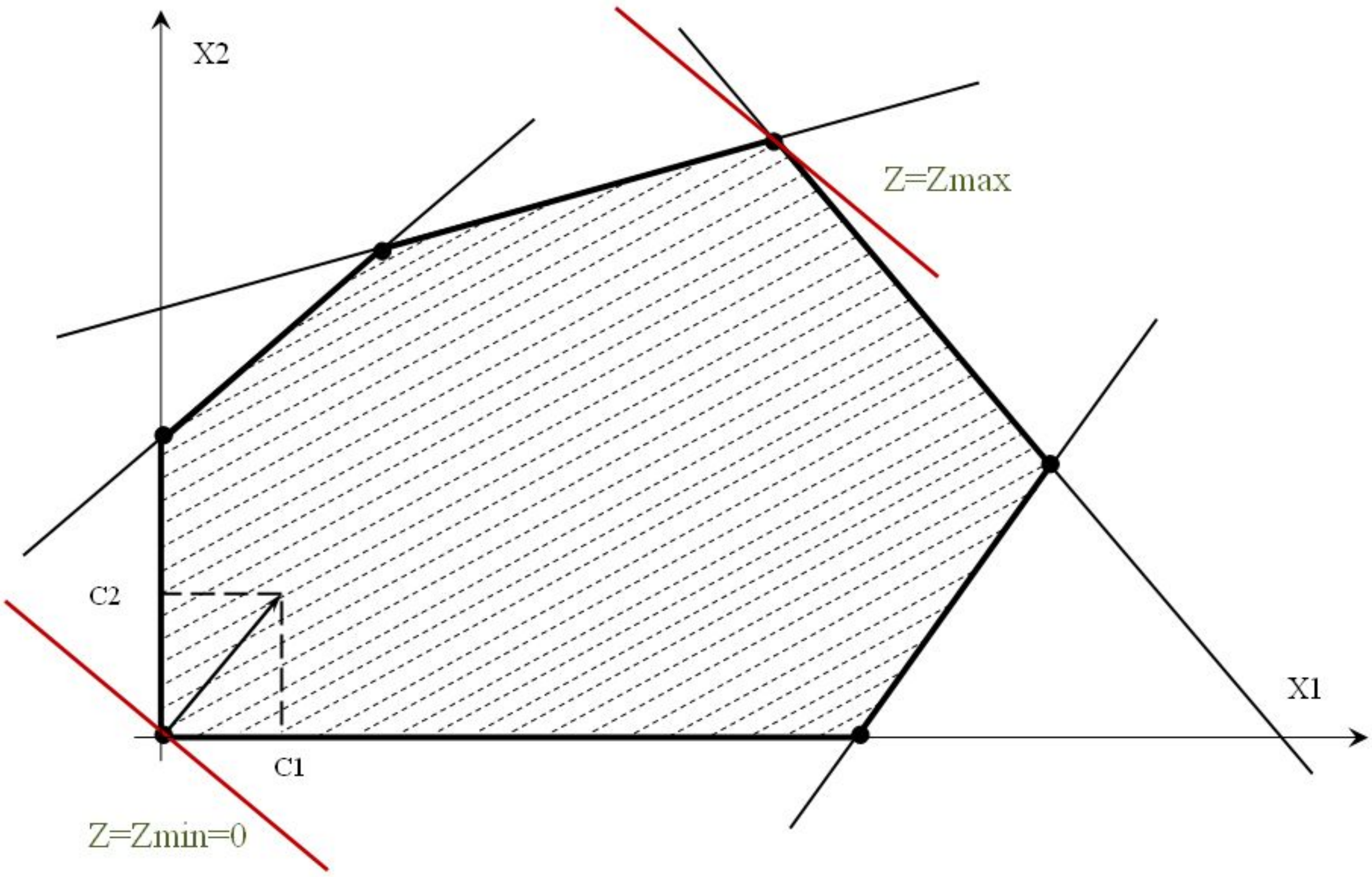
$$\max Z = 2x_1 - x_3' + x_3'' + 0s_1 + 0s_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 3(x_3' - x_3'') = 8 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3' - x_3'' + s_1 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3(x_3' - x_3'') - s_2 = 3 \end{cases}$$

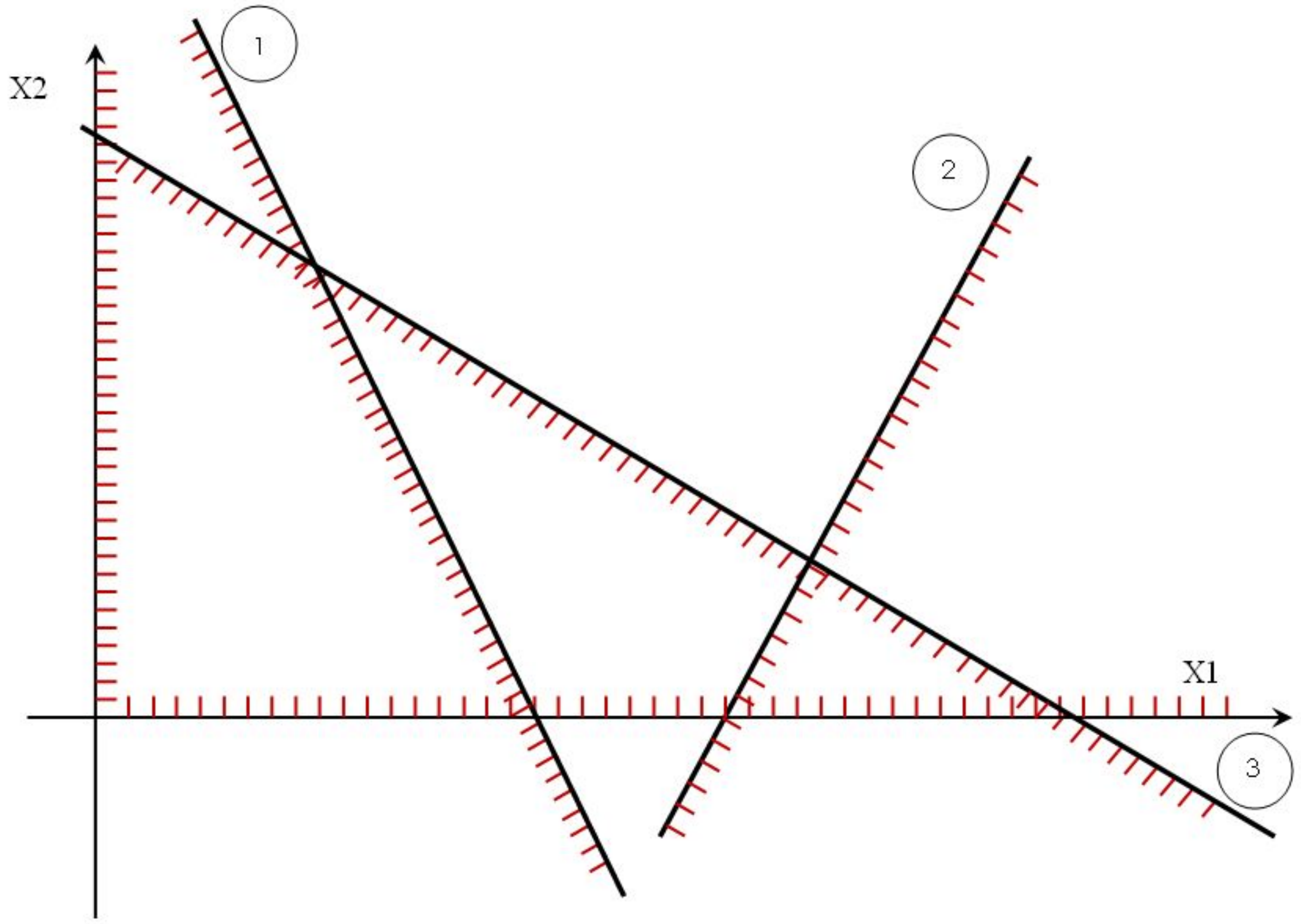
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3' \ge 0, \quad x_3'' \ge 0$

$s_1 \ge 0, \quad s_2 \ge 0$

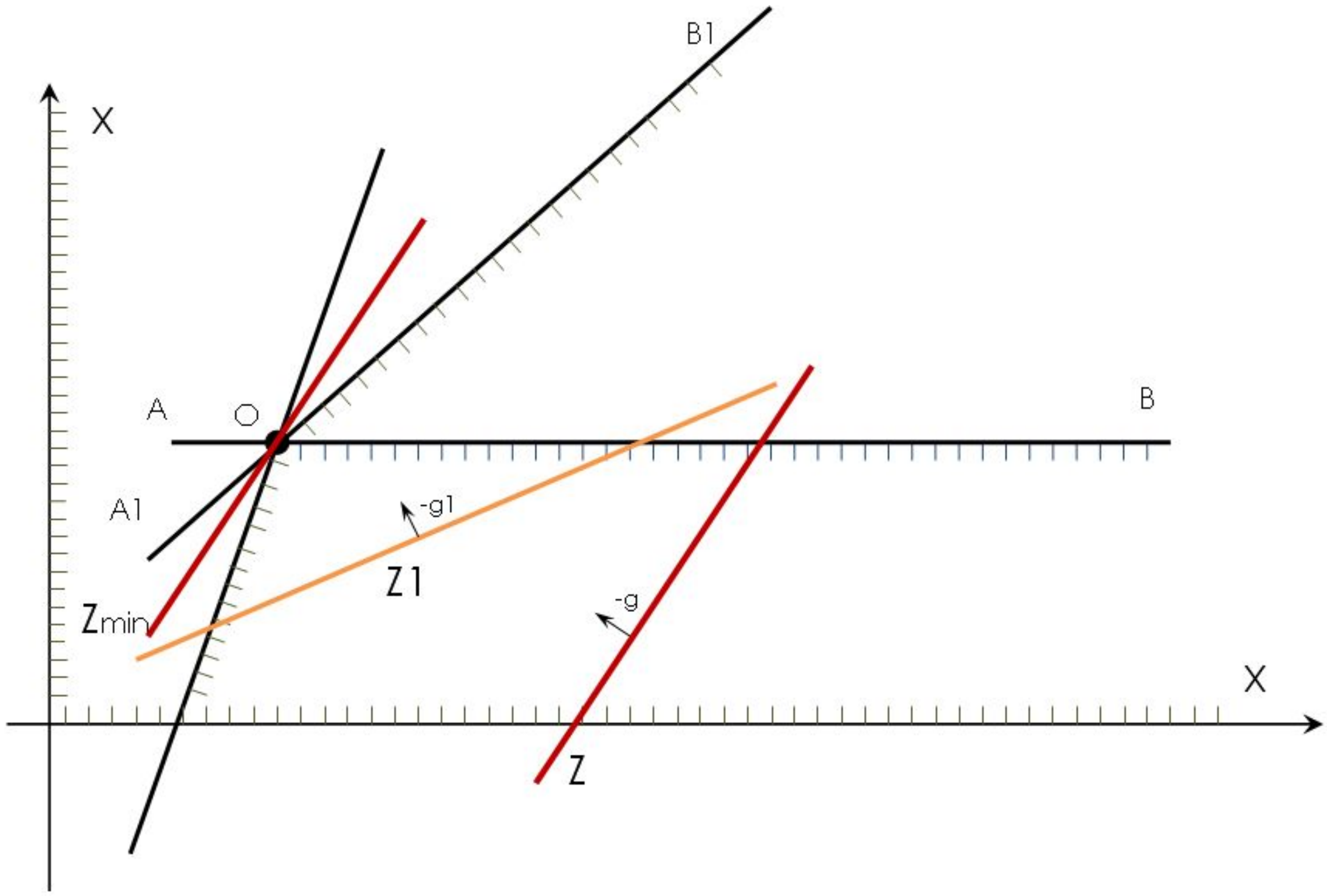
Графический метод решения ЗЛП



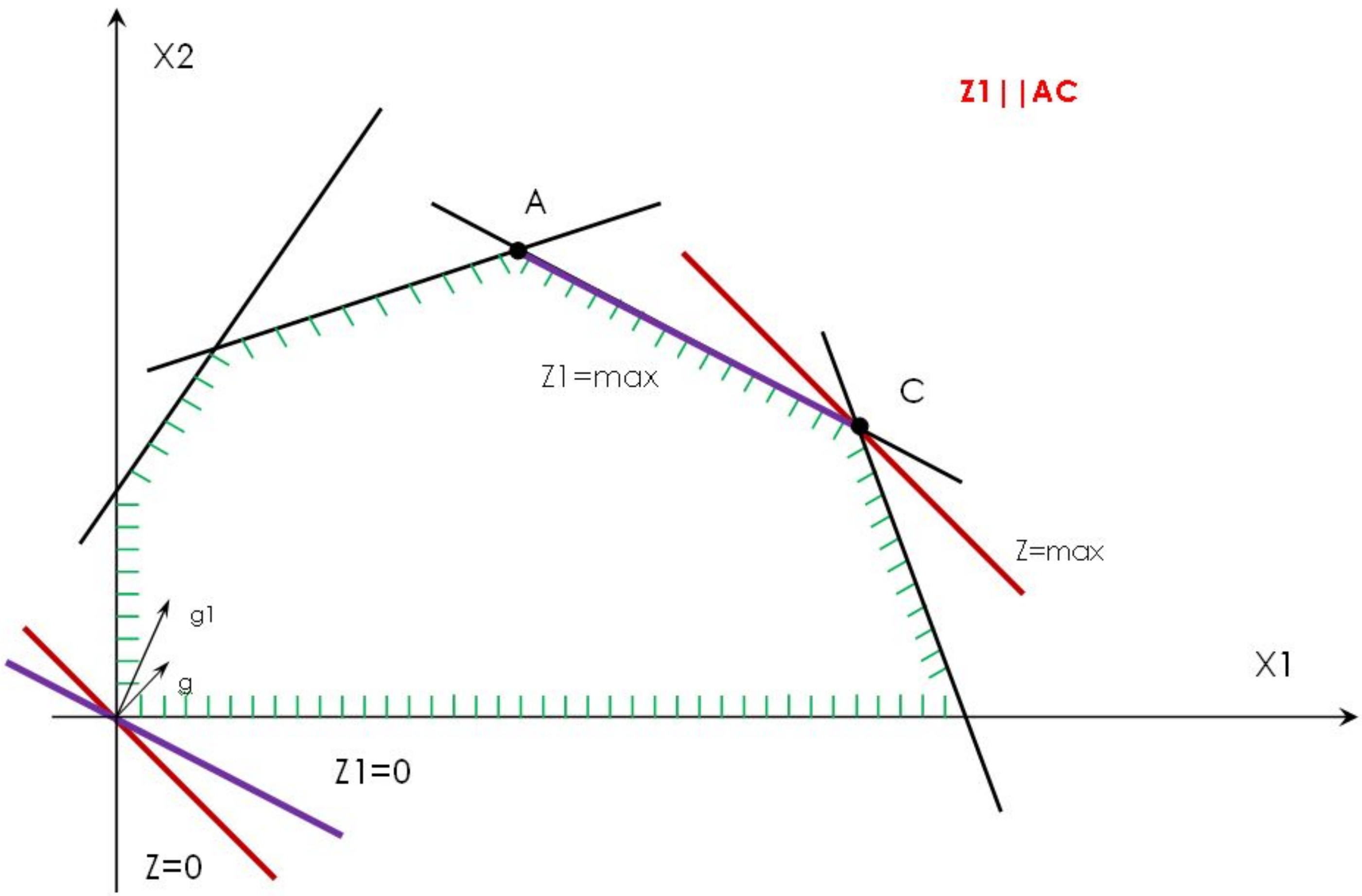
Особый случай ЗЛП – нет решений (графический метод)



Особый случай ЗЛП – решение неограниченно (графический метод)



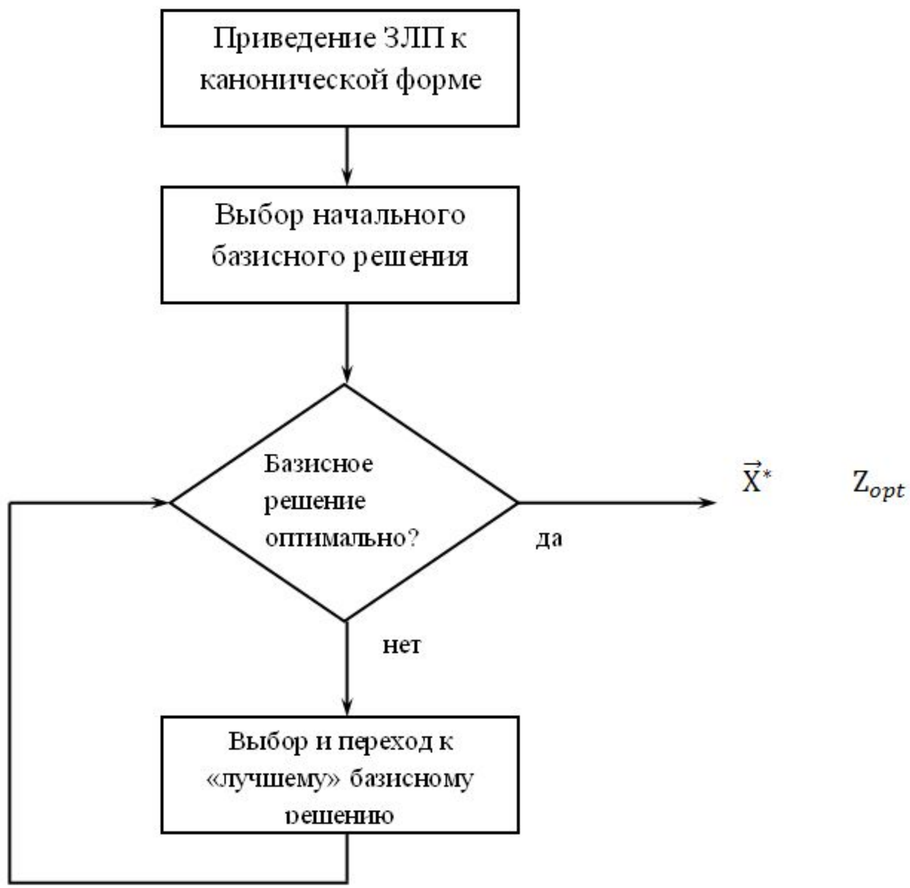
Особый случай ЗЛП – бесконечное множество решений



Основные положения теории линейного программирования

- 1. Множество M всех планов ЗЛП выпукло
- 2. Замкнутую многогранную область M порождает конечное число особых (крайних) точек – вершин полиэндра
- 3. Если существуют допустимые планы, то существуют базисные (опорные) планы – вершины области M
- 4. Оптимальное решение находится среди базисных (опорных) решений

Блок-схема алгоритма решения ЗЛП аналитическими методами



Выбор начального базисного решения

Каноническая форма ЗЛП - n переменных

m ограничений-равенств $m < n$

Базисные решения - базисные переменные x_i $i = \overline{1, m}$

свободные переменные $x_i = 0$ $i = \overline{m+1, n}$

Количество базисных решений

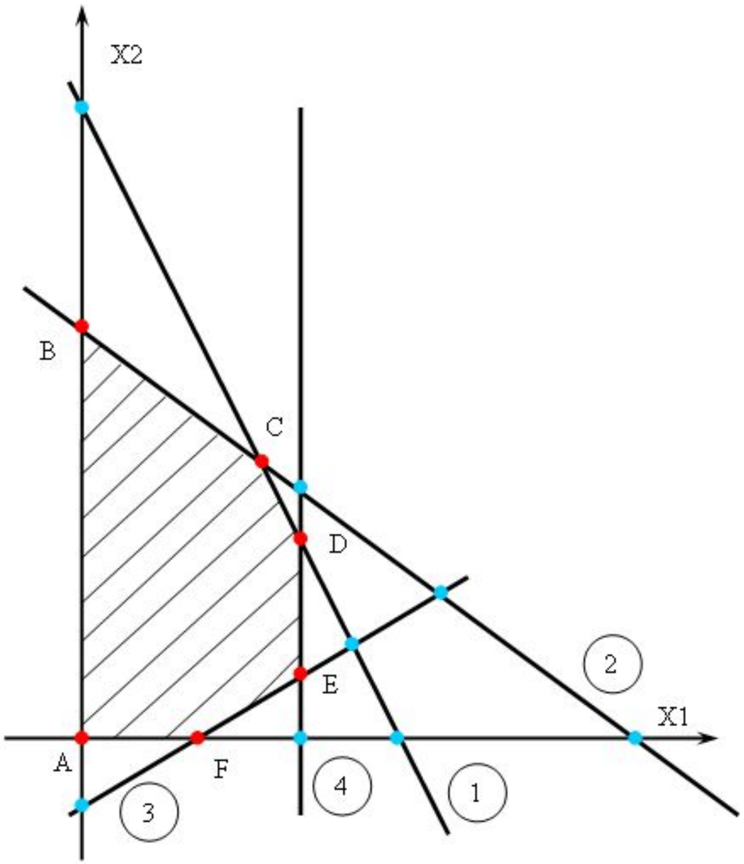
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Допустимые базисные решения

базисные переменные $x_i \geq 0$ $i = \overline{1, m}$

свободные переменные $x_i = 0$ $i = \overline{m+1, n}$

Пример выбора начального базисного решения



$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \le 2 \\ x_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,2}\right) \end{cases}$$

Каноническая форма

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_6 = 2 \\ x_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,6}\right) \end{cases}$$

Точка	Набор свободных переменных	Набор базисных переменных
A	$x_1, \quad x_2$	$x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6$
B	$x_1, \quad x_4$	$x_3, \quad x_2, \quad x_5, \quad x_6$
C	$x_3, \quad x_4$	$x_1, \quad x_2, \quad x_5, \quad x_6$
D	$x_3, \quad x_6$	$x_1, \quad x_2, \quad x_5, \quad x_4$
E	$x_5, \quad x_6$	$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$
F	$x_5, \quad x_2$	$x_1, \quad x_6, \quad x_3, \quad x_4$

Пример решения ЗЛП симплекс-методом

A

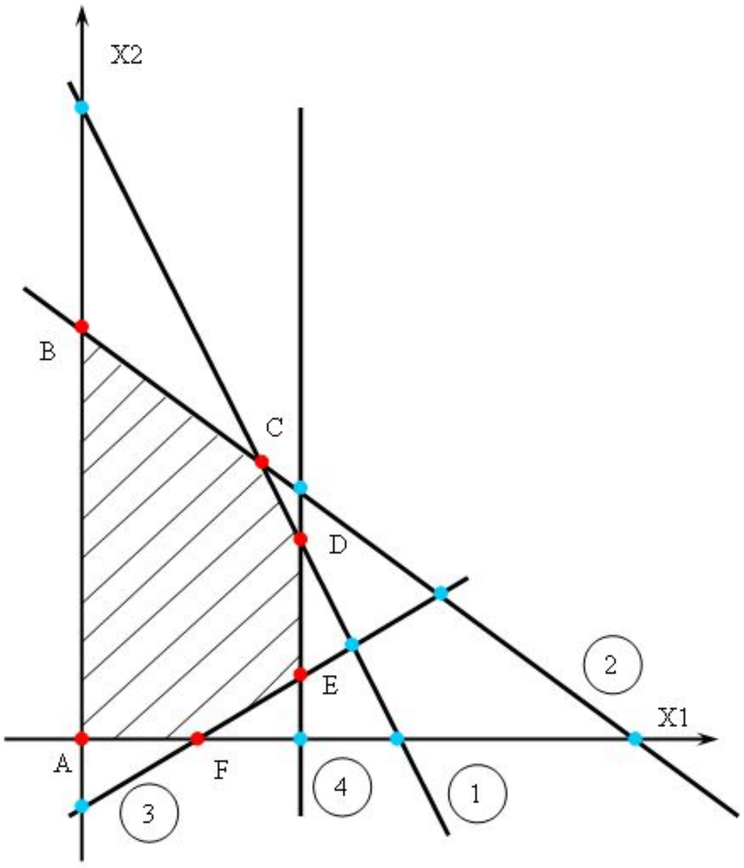
БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	симплексное соотношение
x3	2	1	1	0	0	0	6	6
x4	1	2	0	1	0	0	8	4
x5	1	-1	0	0	1	0	1	-1
x6	1	0	0	0	0	1	2	
f	-2	-3	0	0	0	0	0	

B

БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение	симплексное соотношение
x3	1,5	0	1	-0,5	0	0	2	1,33333
x2	0,5	1	0	0,5	0	0	4	8
x5	1,5	0	0	0,5	1	0	5	3,33333
x6	1	0	0	0	0	1	2	2
f	-0,5	0	0	1,5	0	0	12	

C

БП	x1	x2	x3	x4	x5	x6	решение
x1	1	0	0,67	-0,3	0	0	1,33333
x2	0	1	-0,33	0,7	0	0	3,33333
x5	0	0	-1	1	1	0	3
x6	0	0	-0,67	0,3	0	1	0,66667
f	0	0	0,33	1,3	0	0	12,6667



Алгоритм симплекс-метода

- I Перевод задачи ЛП в каноническую форму
- II Выбор начального базисного решения

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max/\min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} X_j \le b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} X_j \le b_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} X_j \le b_m \end{cases}$$

$$X_j \ge 0 \qquad j = \overline{1, n}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max/\min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} X_j + X_{n+1} = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} X_j + X_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} X_j + X_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$X_j \ge 0 \qquad j = \overline{1, n+m}$$

Базисные переменные $\quad X_{n+i} = b_i \quad i = \overline{1, m}$

Свободные переменные $\quad X_j = 0 \quad j = \overline{1, n}$

Алгоритм симплекс-метода (продолжение)

- III Представление ЦФ в виде уравнения

$$Z-\sum_{j=1}^{n+m} C_j X_j = 0$$

Обозначим $G_j = -C_j \quad j=\overline{1,(n+m)}$

Выполняются условия $G_{n+1} = G_{n+2} = \ldots = G_{n+m} = 0$

Алгоритм симплекс-метода (продолжение)

- IV Заполнение исходной симплекс-таблицы

БП	X_1	X_2	…	X_s	…	X_n	X_{n+1}	…	X_{n+m}	Решение
X_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	$a_{1(n+1)}$	…	$a_{1(n+m)}$	b_1
X_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}	$a_{2(n+1)}$	…	$a_{2(n+m)}$	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+r}	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	$a_{r(n+1)}$	…	$a_{r(n+m)}$	b_r
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	$a_{m(n+1)}$	…	$a_{m(n+m)}$	b_m
Z	G_1	G_2	…	G_s	…	G_n	G_{n+1}	…	G_{n+m}	$Z_0 = 0$

Алгоритм симплекс-метода (продолжение)

- V Проверка условия оптимальности (невыполнение условия – переход к п. VI)

БП	X_1	X_2	…	X_s	…	X_n	X_{n+1}	…	X_{n+m}	Решение
X_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	$a_{1(n+1)}$	…	$a_{1(n+m)}$	b_1
X_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}	$a_{2(n+1)}$	…	$a_{2(n+m)}$	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+r}	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	$a_{r(n+1)}$	…	$a_{r(n+m)}$	b_r
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	$a_{m(n+1)}$	…	$a_{m(n+m)}$	b_m
Z	G_1	G_2	…	G_s	…	G_n	G_{n+1}	…	G_{n+m}	$Z_0 = 0$

Максимум найден $\quad G_j \geq 0 \quad j = \overline{1,(n+m)}$

Минимум найден $\quad G_j \leq 0 \quad j = \overline{1,(n+m)}$

Алгоритм симплекс-метода (продолжение)

- VI Улучшение допустимого базисного решения

БП	X_1	X_2	…	X_s	…	X_n	X_{n+1}	…	X_{n+m}	Решение	СС
X_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	$a_{1(n+1)}$	…	$a_{1(n+m)}$	b_1	b_1/a_{1s}
X_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}	$a_{2(n+1)}$	…	$a_{2(n+m)}$	b_2	b_2/a_{2s}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+r}	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	$a_{r(n+1)}$	…	$a_{r(n+m)}$	b_r	b_r/a_{rs}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{ms}	…	a_{mn}	$a_{m(n+1)}$	…	$a_{m(n+m)}$	b_m	b_m/a_{ms}
Z	G_1	G_2	…	G_s	…	G_n	G_{n+1}	…	G_{n+m}	$Z_0 = 0$	

Алгоритм симплекс-метода (продолжение)

- VII Преобразование симплекс-таблицы методом Гаусса-Жордана

а)

$$a'_{rj} = {a_{rj}}/{a_{rs}} \qquad j = \overline{1,(n+m)}$$

$$b'_r = {b_r}/{a_{rs}}$$

б)

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{is} \cdot a'_{rj} \qquad j = \overline{1,(n+m)}$$

$$b'_i = b_i - a_{is} \cdot b'_r \qquad i = \overline{1,m}$$

$$G'_j = G_j - G_s \cdot a'_{rj}$$

$$Z'_0 = Z_0 - G_s \cdot b'_r$$

Получение нового базисного решения – переход к п. V

БП	X_1	X_2	…	X_s	…	X_n	X_{n+1}	…	X_{n+m}	Решение
X_{n+1}	a'_{11}	a'_{12}	…	0	…	a'_{1n}	$a'_{1(n+1)}$	…	$a'_{1(n+m)}$	b'_1
X_{n+2}	a'_{21}	a'_{22}	…	0	…	a'_{2n}	$a'_{2(n+1)}$	…	$a'_{2(n+m)}$	b'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_s	a'_{r1}	a'_{r2}	…	1	…	a'_{rn}	$a'_{r(n+1)}$	…	$a'_{r(n+m)}$	b'_r
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_{n+m}	a'_{m1}	a'_{m2}	…	0	…	a'_{mn}	$a'_{m(n+1)}$	…	$a'_{m(n+m)}$	b'_m
Z	G'_1	G'_2	…	0	…	G'_n	G'_{n+1}	…	G'_{n+m}	Z'_0