- Формула, описывающая статистическую модель:

$$У=f(x1, X2, \ldots, xn)$$

- Формула, описывающая межотраслевой баланс:

$$Ax + y = X$$

ПРЕДМЕТ, МЕТОД И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Вопросы:

- 1.1. Понятие и теоретические основы методов линейного программирования
- 1.2. Основные понятия и обозначения
- 1.3. Общая задача линейного программирования
- 1.4. Геометрическая интерпретация и графический способ решения простейших задач линейного программирования.

- Интерес к фактическому применению МП возрос с 1947 г., когда крупный американский математик Дж. Данциг разработал симплексный (симплекс) – метод для решения общей задачи линейного программирования, хотя первая работа в этой области принадлежит Л. В. Канторовичу.
- Линейное программирование находит широкое применение в экспериментальных и практических расчетах, в анализе и планировании сельскохозяйственного производства.

- В сельскохозяйственном производстве круг задач очень широк. Многие известные отечественные и зарубежные математики и экономисты, специализирующиеся на применении экономико-математических методов в сельскохозяйственном производстве, даже считают, что сельское хозяйство является наиболее перспективной отраслью применения линейного программирования. Множество экономических задач оптимального использования (распределения) ресурсов в сельском хозяйстве вписывается в рамки моделей линейного программирования.
- Специфические особенности сельскохозяйственного производства, такие, как его сезонность, строгая последовательность технологических процессов и т. п., можно учесть при разработке соответствующих линейных моделей.
- Первое и основное условие задач, сводящихся к задачам линейного программирования – это допущение линейности соотношений – условий задачи.

Например, любой бухгалтерский или плановый баланс, состоящий, как известно, из двух частей: источников поступления средств и путей их расходования.

В так называемой приходной части показываются все источники поступления: запасы на начало года, производство, приобретение со стороны и т. п.,

а в расходной – пути распределения: израсходовано в процессе производства, продано на сторону, сдано государству, заложено в страховой фонд и т. п.

Если обозначить **приходную часть** через **X**,

а **расходную** через **Y**,

то в общем случае соотношение расходной и приходной частей баланса можно выразить посредством равенства или неравенства:

$$X=Y, \text{ или } X>Y, \text{ или } X<Y.$$

В первом случае приходная и расходная части полностью сбалансированы, то есть баланс сходится (закрыт).

Во втором и третьем случаях баланс не сходится. Причем во втором случае приходная часть больше расходной (сальдо положительное), а в третьем случае – наоборот.

- Если мы разложим итоговую приходную и расходную части на их составляющие, то соотношения, естественно, не изменяются. В этом случае как левая, так и правая части будут обозначать некоторый набор, некоторую сумму величин.

- Пусть X_1 обозначает запасы на начало года; X_2 – производство; X_3 – приобретение со стороны; Y_1 – то, что израсходовано в процессе производства; Y_2 — то, что продано; Y_3 – то, что сдано государству; Y_4 — то, что заложено в страховой фонд. Теперь можно записать, что $X_1 + X_2 + X_3 =$ (или $>$, или $<$) $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$.
- В данном случае мы получили уже более развернутое линейное уравнение или неравенство (в зависимости от знака между его частями).

- Аналогичным образом можно составить и записать соотношения по всем остальным производственно-финансовым балансам. Если обозначить все позиции любого баланса, как расходной, так и приходной частей, через n, то при условии, что таких балансов m, у нас получится своеобразная система линейных соотношений размерностью (m*n).

Допустим, нам необходимо составить производственно-финансовый план хозяйства, причем такой, чтобы в результате его практической реализации хозяйство смогло бы иметь наивысшую массу прибыли.

Т.е., необходимо определить, что и в каком количестве хозяйству следует производить, как и каким образом распределить ресурсы (то есть оптимизировать все балансовые соотношения), чтобы достичь наивысшего эффекта.

Такая постановка задачи, имеющая непосредственное практическое значение, может быть формализована в виде системы линейных соотношений, сведена к задаче линейного программирования и решена с помощью одного из методов линейного программирования.

Сведем данную экономическую задачу к математической и запишем все ее условия с помощью линейных уравнений и неравенств.

- Обозначим через $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, ..., $\mathbf{X_n}$ множество неизвестных величин производственно-финансового плана, подлежащих определению,
- а через **m** – количество всевозможных балансовых соотношений (ограничений на использование земельных угодий, трудовых ресурсов, техники, кормов, удобрений и т. п.).
- Наличные ресурсы, то есть все те ресурсы, которые к плановому периоду будут находиться в распоряжении хозяйства, обозначим соответственно через $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, ..., $\mathbf{B_n}$.
- Иными словами, мы итоговую приходную часть каждого баланса обозначили через некоторую величину, которую закодировали как $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ **и т. д.**

- Поскольку на производство какого-либо продукта всегда затрачиваются некоторые ресурсы, то необходимо ввести общее обозначение для нормативов затрат ресурсов.

- Обозначим норму затрат первого ресурса на единицу первого продукта через a_{11} , норму затрат первого ресурса на единицу второго продукта через a_{12},
- норму затрат второго ресурса на единицу первого продукта через a_{21} и т. п.
- В общем случае норма затрат i-го ресурса на единицу j-го продукта обозначим a_{ij}…

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1j}X_j + \ldots + a_{1n}X_n \leq B_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2j}X_j + \ldots + a_{2n}X_n \leq B_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{ij}X_j + \ldots + a_{in}X_n \leq B_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mj}X_j + \ldots + a_{mn}X_n \leq B_n$$

- Экономически условия, записанные в виде системы, интерпретируются так: затраты любого из **m** видов ресурса на производство всех **n** видов продуктов не должны превышать объема этого ресурса, имеющегося в хозяйстве на начало планового периода.
- При этом естественно допустить, что производство любого продукта не может быть величиной отрицательной, то есть:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) >= 0$$

- Целевая установка данной задачи – достижение максимальной прибыли.

Если допустить, что единица первого продукта приносит некоторую **величину прибыли**, равную $\mathbf{C_1}$ второго продукта – $\mathbf{C_2}$ и т.д., то условие достижения максимальной прибыли $(\mathbf{Z})$ можно записать так:

$$\mathbf{Z=(C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_jX_j + \ldots + C_nX_n) \to max}$$

- Условия задачи, объединенные вместе, характеризуют поставленную задачу в ее математической форме.

- В задачах линейного программирования все коэффициенты при неизвестных считаются постоянными величинами.

- Все ограничения (условия) должны быть представлены только в виде линейных уравнений и неравенств.

Например, неравенство вида

$$0{,}07X_1+0{,}05X_2<=200$$

в задаче характеризует тот факт, что площадь под просо и гречиху не должна превышать 200 га.

Возможно и наоборот, т. е.

$$0{,}07X_1 + 0{,}05X_2>=200,$$

т. е. площадь под этими культурами должна быть не менее 200 га.

Разумеется, в одной и той же задаче возможно лишь одно из таких ограничений.

Можно ввести условие $X_2>1000$, т. е. производство гречихи должно быть не менее 1000 ц.

- Поскольку в задачах линейного программирования отыскивается оптимальное решение, то в них необходимо кроме условий (ограничений) задачи вводить и так называемый ***показатель качества*** **этого** ***решения*** **— целевую функцию** (целевую установку или целевой функционал).
- **Неизвестными** в задачах линейного программирования, как правило, являются объемы производимых продуктов, наличие конкретных видов кормов в рационе, приобретаемая техника, удобрения и т. п.
- Они должны быть положительными числами, т. е. $X_j>=0$.

- **Технико-экономические коэффициенты** – это есть соответствующие нормативы, т. е. те числовые коэффициенты, которые вводятся в левые части ограничений задачи при неизвестных.
- **Объемы (размеры) ограничений** могут характеризовать объемы конкретных ресурсов ($<A_i$), выполнение производственных планов ($>B_i$) и т. п. Причем объемы (размеры) ограничений должны быть неотрицательными, т. е. (A_j, $B_i>0$).
- **Коэффициенты целевой функции** могут иметь различное содержание. В основном они являются стоимостными оценками (прибыль, цена реализации и себестоимость в расчете на единицу продукции). Они также могут характеризовать урожайность, продуктивность, трудоемкость продукции, тонно-километры, машино-смены и т. п.

- Оценки целевых функций могут иметь как положительные, так и отрицательные и нулевые значения.
- Например, если задача линейного программирования решается на максимум прибыли, то оценки рентабельных продуктов в целевую функцию вводятся с положительными значениями (прибыль), оценки нерентабельных продуктов – с отрицательными значениями (убыток), а те продукты, рентабельность которых равна нулю – естественно с нулевыми коэффициентами.

Общая задача линейного программирования

Заданы:

линейная функция

$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + . . . + C_nX_n$ min(max)

и система линейных ограничений

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1j}X_j + ... + a_{1n}X_nR_1b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2j}X_j + ... + a_{2n}X_nR_2b_2$$

....

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{in}X_nR_ib_i$$

....

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mj}X_j + ... + a_{mn}X_nR_mb_m$$

$X_j \geq 0$, $i=(1, 2, \ldots,m)$, $j=(1, 2, \ldots,n)$, Где $R = \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix}$; a_{ij}, b_i,

C_j – заданные постоянные величины.

- **Определение 1**. Задача, в которой требуется найти такие неотрицательные значения X_1, X_2, ..., X_n, которые удовлетворяют системе ограничений и обращают в минимум (максимум) линейную форму, называется общей задачей линейного программирования. Задача может быть записана и в других формах (векторной, матричной, табличной).

- **Определение 2**. Задача с условиями вида Z = CX min, AX>=B, X>=0 называется стандартной задачей линейного программирования.

- **Определение 3**. Задача с условиями вида: $Z = CX$ max, $AX \le B$, $X \ge 0$ называется симметричной задачей линейного программирования.
- **Определение 4**. Задача с условиями вида $Z = CX$ min (max), $AX = B$, $X \ge 0$ называется канонической задачей линейного программирования.

- **Определение 5**. Набор чисел $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, называется ее планом.
- **Определение 6**. План $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, обращающий в максимум (минимум) линейную форму (1.2.1), называется оптимальным планом или решением задачи линейного программирования.
- **Определение 7**. Задача линейного программирования называется допустимой, если множество M планов задачи не пусто (есть хотя бы один допустимый план), и разрешимой, если не пусто множество M оптимальных планов этой задачи (есть хотя бы один оптимальный план).

Геометрическая интерпретация и графический способ решения простейших задач линейного программирования.

- Применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, поскольку задачу размерности больше трех графически изобразить невозможно.
- Таким образом, графический метод решения применяется для решения таких задач линейного программирования, которые содержат, как правило, две переменные.
- Достоинство метода - наглядность

Задача. При анализе перспективного плана развития хозяйства обнаружилось, что в нем недоиспользуется 200 га пашни. Наиболее эффективными в хозяйстве являются две культуры – просо и гречиха, рентабельность их одинаковая. Хозяйство имеет возможность приобрести сверх плана 800 ц минеральных удобрений (в пересчете на действующее вещество) при условии, что сдаст дополнительно к ранее планируемому объему 1000 ц гречихи.

- Требуется так распределить имеющиеся ресурсы между этими культурами, чтобы хозяйство имело от их производства наивысшую прибыль.

Нормативы затрат ресурсов, прибыльность проса и гречихи (в расчете на 1 ц) установлены

Показатели	Просо	Гречиха
Затраты пашни, га	0,07	0,05
Затраты удобрений, ц	0,10	0,40
Прибыль, руб.	2,00	6,00

Обозначим через X_1 – объем производства проса (ц), через X_2 объем производства гречихи (ц), запишем условия задачи в математическом виде:

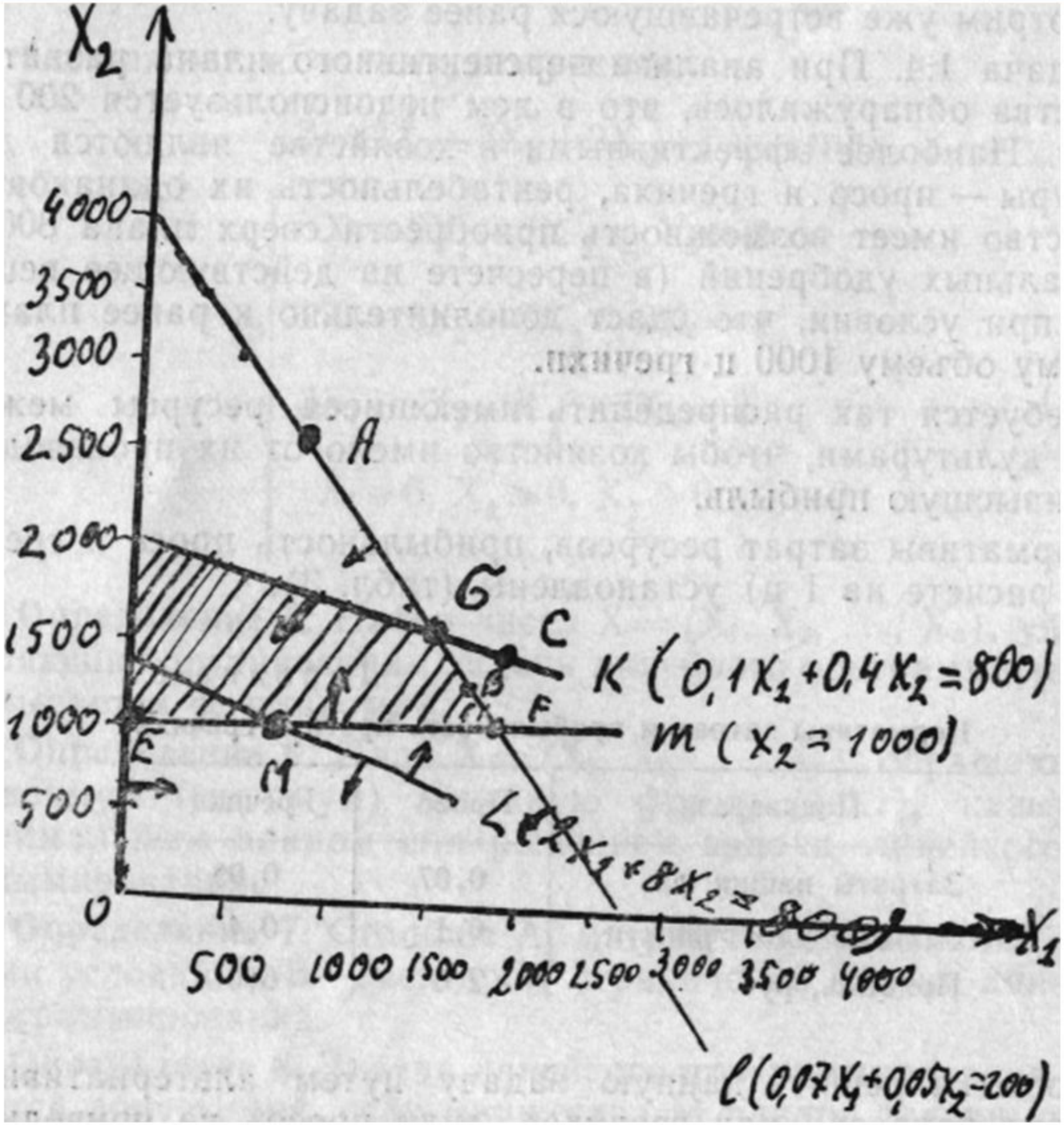
$$0{,}07X_1 + 0{,}05X_2 \le 200$$

$$0{,}1X_1 + 0{,}4X_2 \le 800$$

$$X_2 \ge 1000$$

$$X_1 \ge 0$$

$$Z = 2X_1 + 6X_2 \to \max$$



X2
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
A
G
C
B
F
E
M
K (0,1X1+0,4X2=800)
m (X2=1000)
L (2X1+8X2=8000)
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
X1
l (0,07X1+0,05X2=200)

- Рассмотрим первое неравенство: **$0{,}07X_1+0{,}05X_2<=200$.**

Разрешим его относительно X_2 (можно и относительно X_1);

знак <= мы можем заменить на =, поскольку это допускается по условию задачи. Получим $X_2=4000–1{,}4X_1$. Придавая X_1 произвольное значение (в рамках допустимости), получим некоторые значения X_2.

- Итак, если $X_1=1000$, то $X_2=2600$, а если $X_1=2000$, то $X_2=1200$. мы получили две точки А и В с координатами А(1000, 2600), В(2000, 1200). Известно, что через точки в пространстве можно провести прямую и притом только одну. Нанесем эти точки на трафик и проведем через них прямую 1, соответствующую уравнению $0{,}07X_1+0{,}05X_2=200$.

- Если свободный член 200 этого уравнения сокращать в соответствии с условием задачи, то линии, параллельные 1, будут находиться левее ее и в этом отношении проведенная нами линия является предельной, как предельна (максимально допустима) и сама величина (200) площади пашни.
- На графике направление движения семейства линий при уменьшении площади пашни показано стрелочкой

- Прямая k, соответствующую второму неравенству:

$0{,}1X_1+0{,}4X_2 = 800;$

$X_1 + 4X_2 =8000;$

$X_1 = 8000 – 4X_2$

При $X_2=1500$; $X_1=2000$, C(2000; 1500);

При $X_2 = 2000$; $X_1=0$, D(0; 2000).

- Поскольку третье неравенство отражает ограниченность объема производства гречихи (X_2>=1000) снизу (не менее 1000 ц), то строим линию, отвечающую нижнему пределу этого ограничения, то есть соответствующую уравнению X_2=1000. Эта прямая проходит параллельно оси OX_1 через точку E (0, 1000).
- Данная линия (обозначим ее m) лимитирует сочетание гречихи и проса, то есть ограничивает область допустимых решений так же, как и линия OX_2.

- Итак, возможное сочетание производства проса и гречихи будет находиться в секторе, ограниченном линиями EX_2 и EF, причем (искомый оптимум может находиться на этих линиях или правее линии OX_2 и выше линии EF.

- Построив линии, соответствующие уравнениям задачи, и определив направление движения семейства параллельных прямых в соответствии с изменением свободных членов неравенств, найдем область допустимых значений, в которой возможен искомый оптимум. Эта область ограничена линиями: l, k, m, OX_2 и на графике представляет собой четырехугольник с вершинами EFGD.
- Определив область существования возможных сочетаний производства проса и гречихи, перейдем к графическому изображению целевой функции — линии, соответствующей критерию оптимальности:

- Рассматривая график, видим, что точке G соответствуют значения X_1 1700, X_2 1600. Итак, максимальная величина прибыли достигается в том случае, если хозяйство будет производить 1700 ц проса и 1600 ц гречихи. Прибыль в этом случае составит порядка 13 тыс. руб.

$$(2*1700)+(6*1600)=13000.$$

При необходимости координаты точки G можно определить точно. Для этого надо решить систему двух уравнений, каждое из которых соответствует тем линиям, на пересечении которых эта точка находится,— линиям k и l.

$0,1X_1 + 0,4X_2 = 800;$

$0,07X_1 + 0,05X_2 = 200.$

- Решив эту систему любым из известных методов, определим точное значение координат точки G. Они будут соответственно равны: $X_1=1740$, $X_2=1565$.
- Прибыль в этом случае составит 12870 руб.:

(2*1740+6*1565)=12870.

- Легко убедиться, что именно в этом случае, то есть при X_1=1740 и X_2=1565, прибыль будет максимальной. **Попробуем доказать это экономически.** Рассмотрим, все ли ресурсы и в каком объеме будут использованы при таком сочетании посевов.
- 200–(0,07*1740+0,05*1565)=0
- (0,1*1740)+(0,4*1565)=800.

- Таким образом, при X_1 = 1740 и X_2=1565 второй ресурс используется также полностью.
- А раз оба (первый и второй ресурсы) используются полностью и нормы замены одного вида производства на другой с точки зрения экономии в расходовании ресурсов противоположны, то улучшить программу производства и достичь еще большей прибыли не представляется возможным.
- Найденный вариант сочетания выращивания проса и гречихи является оптимальным и приводит к достижению максимальной величины прибыли, равной 12870 руб.