

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# МАТРИЦЫ

$$(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, операция над матрицами. Приведение матрицы к виду Гаусса.  
Ранг матрицы

# МАТРИЦЫ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- **Определение 1.** Матрицей размерности  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- содержащая  $m$ -строк и  $n$ -столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами (их обозначают:  $a_{ij}$  где  $i$ -номер строки матрицы,  $j$  - номер столбца матрицы, в которых расположен данный элемент)

# МАТРИЦЫ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- Матрицу обозначают:

$$A \quad \text{или} \quad (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

- **Определение 2.** Две матрицы называются равными, если они совпадают поэлементно.
- **Определение 3.** Матрица размерности называется нулевой (обозначают:  $O$ ), если все ее элементы равны нулю.

# МАТРИЦЫ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- **Определение 4.** Матрица размерности  $1 \times n$  называется матрицей-строкой:  $(a_{11}, \dots, a_{1n})$ .

Матрица размерности  $m \times 1$  называется матрицей-столбцом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- **Определение 5.** Если  $m=n$ , то матрица называется квадратной матрицей порядка  $n$ . Ее элементы  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  образуют главную диагональ; числа  $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$  - побочную диагональ.

# МАТРИЦЫ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- **Замечание 1.** В частности, квадратной матрицей второго порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

содержащая две строки и два столбца. Числа  $a_{ij}$  ( $i=j=1,2$ ) называются элементами матрицы, где  $i$  – номер строки, а  $j$  – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа  $a_{11}, a_{22}$  образуют главную диагональ матрицы  $A$ ; числа  $a_{12}, a_{21}$  – побочную (второстепенную) диагональ матрицы.

# МАТРИЦЫ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- Квадратной матрицей третьего порядка называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

содержащая три строки и три столбца. Числа  $a_{ij}$  ( $i=j=1,2,3$ ) называются элементами матрицы, где  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  образуют главную диагональ матрицы; числа  $a_{13}, a_{22}, a_{31}$  – побочную (второстепенную) диагональ матрицы.

# МАТРИЦЫ

## 1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- **О п р е д е л е н и е 6.** Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.
- **О п р е д е л е н и е 7.** Квадратная матрица называется верхнетреугольной (нижнетреугольной), если все ее элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю.

# МАТРИЦЫ

## 1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

- **О п р е д е л е н и е 8.** Квадратная матрица называется единичной (обозначают:  $E$ ), если она диагональная и все элементы главной диагонали равны единице.
- **О п р е д е л е н и е 9.** Матрица, полученная из квадратной матрицы  $A$  заменой всех строк соответствующими (по номеру) столбцами, называется транспонированной к матрице  $A$  и обозначается  $A^T$

# МАТРИЦЫ

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

---

- **Определение 10.** Суммой (разностью) матриц  $A$  и  $B$  размерности  $m \times n$  называется такая матрица  $A \pm B$  размерности  $m \times n$ , у которой все элементы равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$
- **Определение 11.** Произведением матрицы  $A$  размерности  $m \times n$  на число  $\alpha$  называется такая матрица  $\alpha A$  размерности  $m \times n$ , у которой все элементы равны произведению соответствующего элемента матрицы  $A$  на число  $\alpha$ .

# МАТРИЦЫ

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

---

1) Сложение, вычитание,  
умножение матрицы на число

Операции сложения, вычитания двух матриц **одинаковой размерности**, умножения матрицы на число вводятся (по определению) с помощью **поэлементного** выполнения соответствующего действия, если

$$A = \left( a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \quad B = \left( b_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$$A \pm B = \left( a_{ij} \pm b_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$$\alpha \cdot A = \left( \alpha \cdot a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

# МАТРИЦЫ

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

---

- **Свойства операций**

$$A + B = B + A,$$

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A,$$

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$$

где  $\alpha, \beta = \text{const}$ ;  $A, B, C$  – матрицы одинаковой размерности.

# МАТРИЦЫ

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

### 2) Умножение матриц

- **Определение 12.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,k}}}$  размерности  $m \times k$  на матрицу  $B = (b_{ij})_{i=\overline{1,k}}$  размерности  $k \times n$  называется такая матрица  $C$  размерности  $m \times n$ , у которой элемент с номером  $ij$  вычисляется по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1)$$

**Замечание 2.** Число (1) равно скалярному произведению вектора, составленного из элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$ , на вектор, составленный из элементов  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .

# МАТРИЦЫ

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

---

**Свойства операции:**

$$A_{(n \times m)} \cdot O_{(m \times k)} = O_{(n \times k)},$$

$$O_{(k \times n)} \cdot A_{(n \times m)} = O_{(k \times m)},$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A \quad (\text{для квадратных матриц}),$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Предполагается, что указанные здесь действия определены.

# МАТРИЦЫ

## 2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

### 3) Возведение в степень

- Эта операция определена только для квадратных матриц и вводится по правилу:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \boxtimes, \quad A^k = A^{k-1} \cdot A.$$

В частности, справедливы равенства:  $O^k = O \quad \forall k \in N,$   
 $E^k = E \quad \forall k \in N.$

Для *диагональной* матрицы справедлива формула:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{nn}^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in N.$$

# МАТРИЦЫ

## 3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

- **Определение 13.** Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования следующих типов:
  - 1) *перестановка местами двух строк матрицы,*  
условное обозначение:  , где стрелки указывают на строки, переставляемые местами;
  - 2) *замена строки суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число  $\alpha$*   
условное обозначение:  $(\alpha)$ , где стрелка указывает на изменяемую строку;  

- Множитель  $(\alpha)$  ставят рядом со вспомогательной строкой;

# МАТРИЦЫ

## 3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

---

- 3) *умножение строки на ненулевое число  $\alpha$* , условное обозначение:  $(\alpha)$ , ставится рядом с изменяемой строкой .
- **З а м е ч а н и е 3.** Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов матрицы.
- **О п р е д е л е н и е 14.** Опорным элементом строки матрицы называется первый слева ненулевой элемент этой строки. Если строка нулевая, то опорного элемента у нее нет.
- **О п р е д е л е н и е 15.** Матрица называется ступенчатой (или имеющей ступенчатый вид), если выполнены следующие условия:
  - \* если какая-то строка матрицы нулевая, то все последующие строки – нулевые;
  - \* опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.

# МАТРИЦЫ

## 3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

---

- **Определение 16.** Говорят, что матрица имеет вид Гаусса, если:
  - матрица является ступенчатой;
  - все опорные элементы равны единице;
  - над опорными элементами стоят только нули.
- **Теорема 1.** Любая матрица  $A$  может быть приведена к ступенчатой матрице  $A_1$  с помощью элементарных преобразований строк первого и второго типов. Любая матрица  $A$  может быть приведена к ступенчатой матрице  $A_2$  вида Гаусса с помощью элементарных преобразований строк первого – третьего типов.

# МАТРИЦЫ

## 3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

---

- **Определение 17.** Матрицы  $A_1$  и  $A_2$ , построенные по матрице  $A$  с помощью элементарных преобразований, называются, соответственно, ступенчатым видом матрицы  $A$  и видом Гаусса матрицы  $A$ .
- **Замечание 4.** Ступенчатый вид у матрицы и ее вид Гаусса не единственен. Наборы базисных строк и базисных столбцов матрицы также не являются инвариантами этой матрицы.

# МАТРИЦЫ

## 4. РАНГ МАТРИЦЫ

---

- **Определение 19.** Рангом матрицы  $A$  называется число ненулевых строк в ступенчатом виде этой матрицы. Обозначение:  $r(A)$ .
- **Замечание 5.** Ранг матрицы не меняется при применении к матрице  $A$  элементарных преобразований, то есть не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду.
- **Замечание 6.** Справедливы неравенства:

$$0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Пример 1. Определить размерность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

и указать  
ее элементы:

$$a_{13}, a_{24}, a_{32}.$$

Решение. Матрица  $A$  имеет три строки и четыре столбца, то есть

$$m = 3, n = 4.$$

$$a_{13} = 3; a_{24} = -2; a_{32} = 7.$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Пример 2. Вычислить матрицу  $2A - 3B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Зная матрицы  $A$  и  $B$ , находим:

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 14 & 6 \end{pmatrix}; \quad 3B = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -3 \\ 0 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$2A - 3B = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0-12 & 2-9 & 4-(-3) & & & \\ \hline -2-0 & 14-15 & 6-18 & & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -12 & -7 & 7 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Пример 3. Вычислить:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$

- Р е ш е н и е. а) Первая из перемножаемых матриц имеет размерность  $2 \times 3$ , а вторая матрица – размерность  $2 \times 1$ .
- Так как число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй, то данные две матрицы перемножить нельзя.

- Пример 4. Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Решение. Пользуясь формулой (1), находим матрицу размерности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 7 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

- Пример 5. Найти  $A^2$ , если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Решение. а) Так как  $A^2 = A \cdot A$   
матрицы являются квадратными, то вычисляем:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

- б) Учитывая, что рассматриваемая матрица является диагональной, получаем:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Пример 6. Указать ступенчатый вид матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Назвать базисные строки и столбцы матрицы  $A$ .

**Решение.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)(6)}$$

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

---

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем: у матрицы  $A$

базисные строки —  $1^{\text{я}}, 2^{\text{я}}$ ;

базисные столбцы —  $1^{\text{й}}, 3^{\text{й}}$ .



# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \rightarrow \\ & & & & & & \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \rightarrow \end{array}$$

Diagram illustrating the row reduction process for a 5x3 matrix. The steps are as follows:

- Initial matrix:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Red arrows indicate row swaps: Row 2 and Row 5 are swapped, and Row 3 and Row 4 are swapped.
- Matrix after row swaps:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . A blue arrow indicates the operation  $(-2)(3)$  applied to Row 3.
- Matrix after row operations:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .
- Matrix after further row operations:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ . Red arrows indicate the operation  $(1)(3)$  applied to Row 4.
- Matrix after row operations:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Red arrows indicate the operations  $(-2)(-3)$  applied to Row 2 and Row 3.
- Final matrix after row operations:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . A red arrow indicates the operation  $(-2)$  applied to Row 1.

# МАТРИЦЫ

## 5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

---

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$