Электротехника и электроника

Лекция 2

Однофазные электрические цепи синусоидального тока

Параметры синусоидальных электрических величин

- Синусоидальная функция является периодической функцией времени, т.е. через равный промежуток времени, называемый периодом T, цикл колебаний повторяется $i(t) = i(t+T)$
- Периоду T соответствует фазовый угол 2π или 360°
- Величина обратная периоду T называют частотой и измеряется в Гц $f = \frac{1}{\mathrm{T}}$
- Угловая частота показывает насколько фазовый угол синусоиды изменился за период $\omega = 2\pi f$

Аналитические выражения синусоидальных величин

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$ **Мгновенное значение ЭДС**

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$ **Мгновенное значение напряжения**

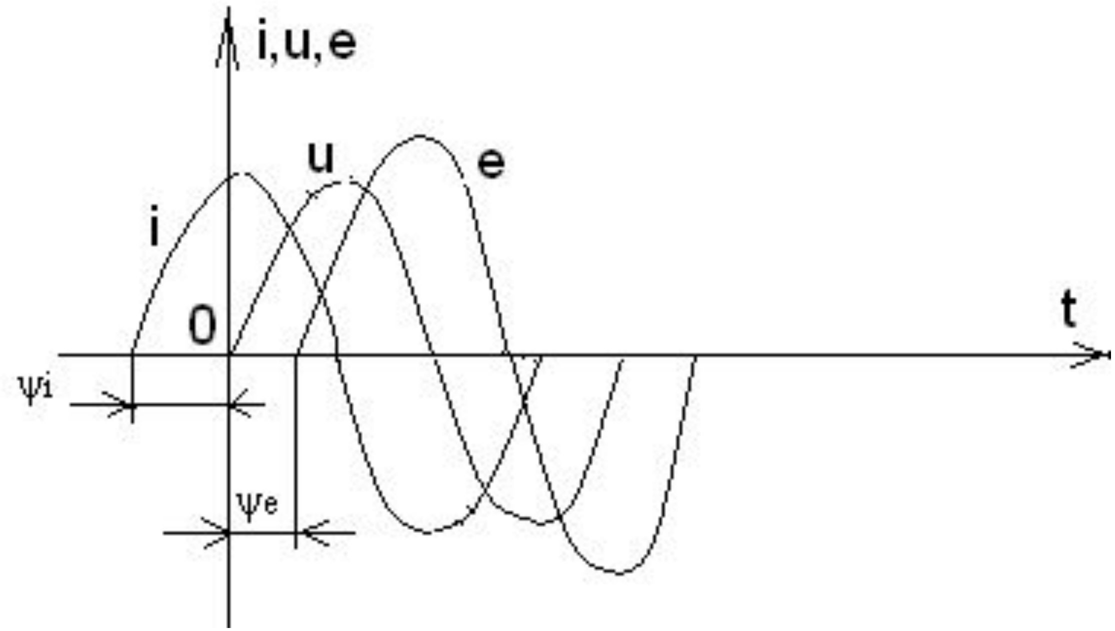
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$ **Мгновенное значение тока**

Im, Um, Em - амплитудные значения тока, напряжения и ЭДС

(ωt+ψ)- аргумент синуса, который определяют фазовый угол синусоидальной функции в данный момент времени t (фаза)

Ψ – начальная фаза

Начальные фазы синусоидальных величин



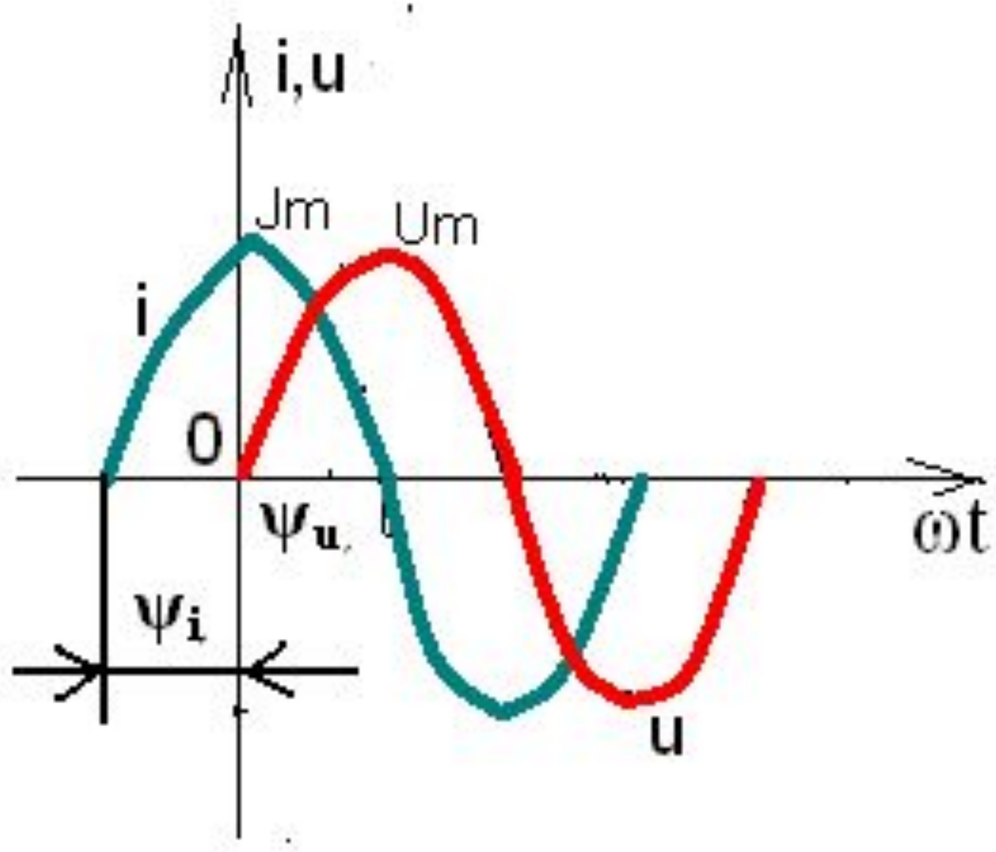
$$\psi_i \;\square\; 0$$

$$\psi_u = 0$$

$$\psi_e \;\square\; 0$$

Знак «+» или «-» перед начальной фазой означает, сколько не хватает градусов, чтобы наша функция выходила из начала координат.

Сдвиг фаз между напряжением и током



$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

Действующие и средние значения

Расчет действующих значений

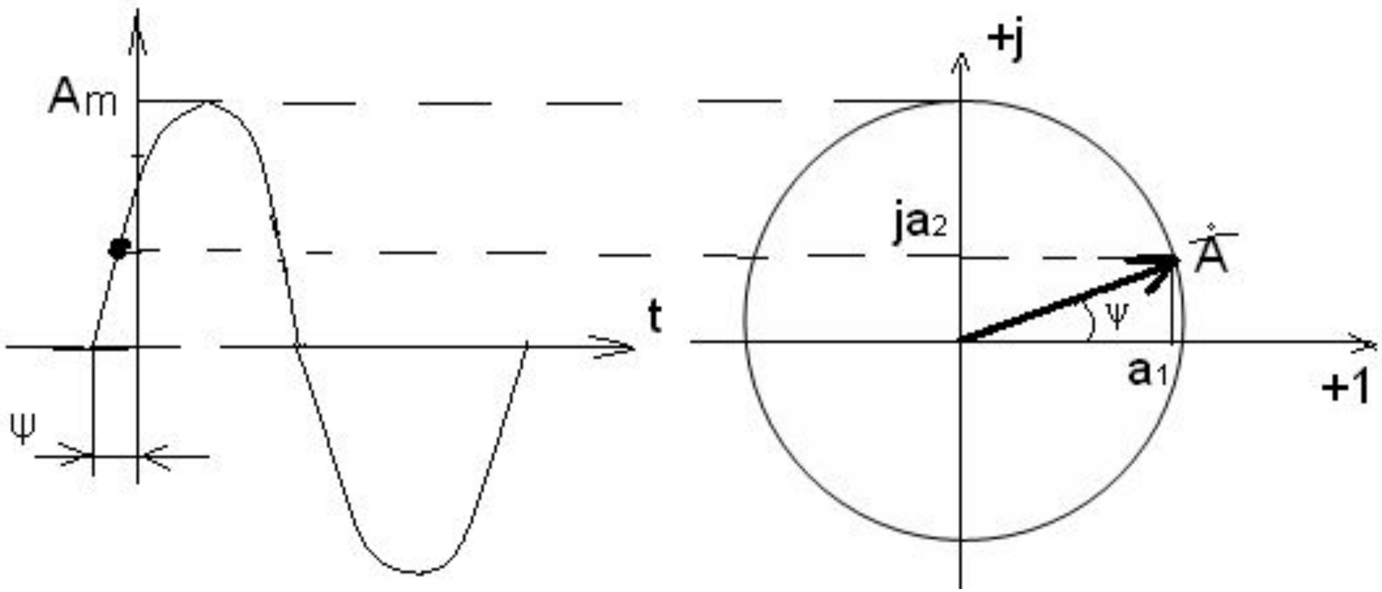
$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \qquad I = \frac{\mathrm{Im}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\mathrm{I}_\mathrm{m} \qquad U = \frac{\mathrm{Um}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\mathrm{U}_\mathrm{m}$$

Расчет среднего значения

$$I_{cp} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}638 I_m$$

Применение комплексных чисел для расчета электрических цепей

$$A(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a) \cong \dot{A}_m = A_m e^{j\psi_a}$$



$$\dot{A} = a_1 + ja_2$$

$$a_1 = A\cos\psi_a \quad a_2 = A\sin\psi_a$$

$$\dot{A} = Ae^{j\psi_a} \qquad A = A\cos\psi_a + jA\sin\psi_a$$

Применение комплексных чисел для расчета электрических цепей

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\psi a} \cong A(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$$

Амплитудные значения

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi i} \qquad \dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u} \qquad \dot{E}_m = E_m e^{j\psi_e}$$

Действующие значения

$$\dot{I} = I e^{j\psi i} \qquad \dot{U} = U e^{j\psi u} \qquad \dot{E} = E e^{j\psi e}$$

Правила перехода из одной формы в другую
Из показательной в алгебраическую

$$\dot{A} = Ae^{j\psi_a}$$

Формула Эйлера:

$$e^{j\psi_a} = \cos\psi_a + j\sin\psi_a$$

Результат:

$$\dot{A} = A(\cos\psi_a + j\sin\psi_a) = A\cos\psi_a + jA\sin\psi_a$$

Правила перехода из одной формы в другую
Из алгебраической в показательную

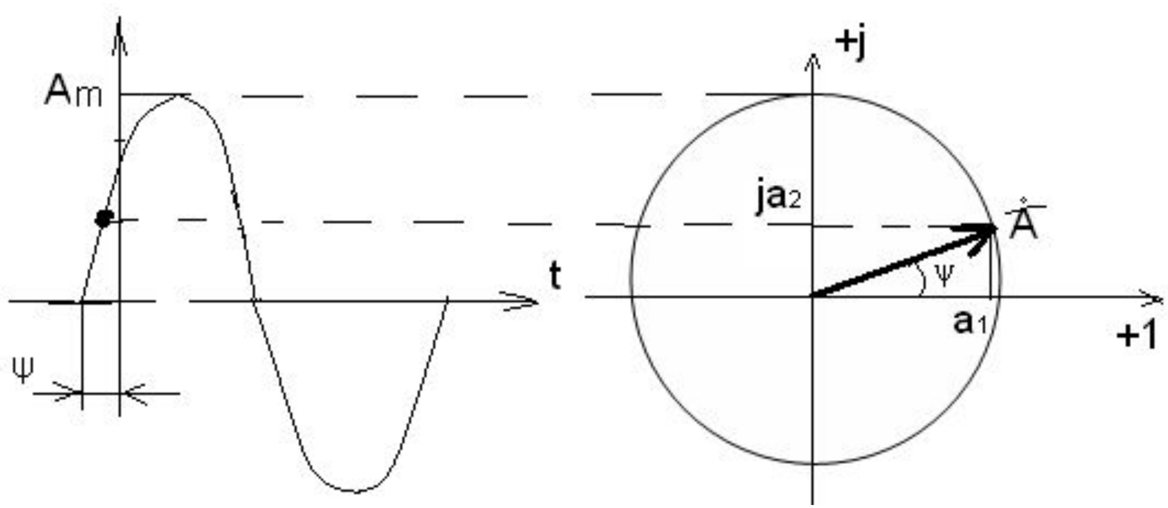
$$\dot{A} = A\cos\psi_a + jA\sin\psi_a$$

Длина вектора А:

$$A = \sqrt{a1^2 + a2^2}$$

Угол между вектором и осью:

$$\psi_a = arctg\frac{a2}{a1}$$



Простейшие математические операции с комплексными числами

$$\dot{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha = Ae^{j\alpha} \qquad \dot{B} = B\cos\beta + jB\sin\beta = Be^{j\beta}$$

Сложение и вычитание:

$$\dot{A} \pm \dot{B} = A\cos\alpha \pm B\cos\beta + j(A\sin\alpha + B\sin\beta)$$

Умножение и деление:

$$\dot{A}\dot{B} = Ae^{j\alpha}Be^{j\beta} = AB^{j(\alpha+\beta)} \qquad \frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}$$

Простейшие математические операции с комплексными числами

Единичные комплексы

$$e^{j0} = 1$$

$$e^{j180} = -1$$

$$e^{j90} = j$$

$$e^{-j90} = -j$$

Действия с j

$$jj = -1$$

$$j(-j) = 1$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\frac{1}{-j} = j$$

Комплексное сопротивление

Комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}m}{\dot{I}m} = \frac{Um}{Im} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{Um}{Im} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$$

Модуль комплексного сопротивления:

$$\frac{Um}{Im} = \underline{Z}$$

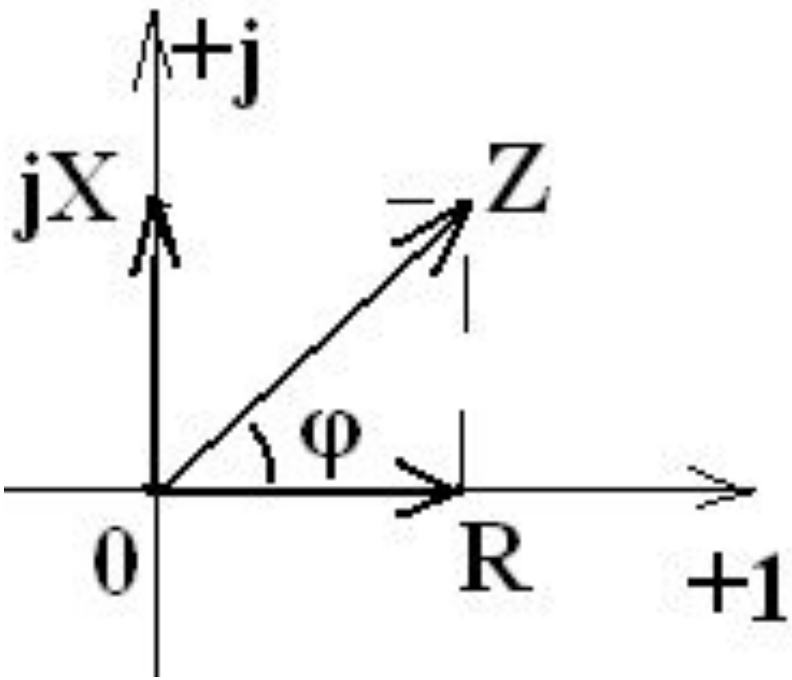
Комплексное сопротивление через действующие значения:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \underline{Z}$$

Закон Ома для амплитудных значений: $\dot{U}m = \dot{I}m * \underline{Z}$

Закон Ома для действующих значений: $\dot{U} = \dot{I} * \underline{Z}$

Треугольник сопротивлений



В алгебраической форме

$\underline{Z}=R+jX$, где

R- активное сопротивление ,

X- реактивное сопротивление

$R=\underline{Z}\cos\varphi$, $R\geq0$

$X=\underline{Z}\sin\varphi$

Причем реактивное сопротивление может быть как положительным так и отрицательным или равное нулю.

Мощности в цепях переменного тока

Полная мощность: $\underline{S} = \dot{U}\overset{*}{I}$

Комплексное действующее значение напряжения: $\dot{U} = U e^{j\psi_u}$

Сопряженный комплекс тока: $\overset{*}{I} = I e^{-j\psi_i}$

$$\underline{S} = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i}$$

$$\underline{S} = UI e^{j\psi_u - \psi_i} = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi}$$

$$\underline{S} = UI$$

Мощности в цепях переменного тока в алгебраической форме

$$\underline{S} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi$$

(ВА –вольт-ампер)

Активная мощность:

$$P = UI\cos\varphi$$

(Вт – ватт)

Реактивная мощность:

$$Q = UI\sin\varphi$$

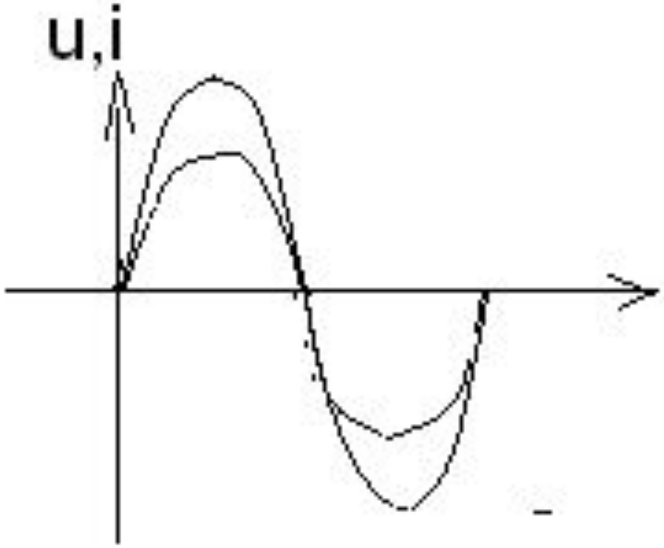
(ВАр – вольт-ампер реактивный)

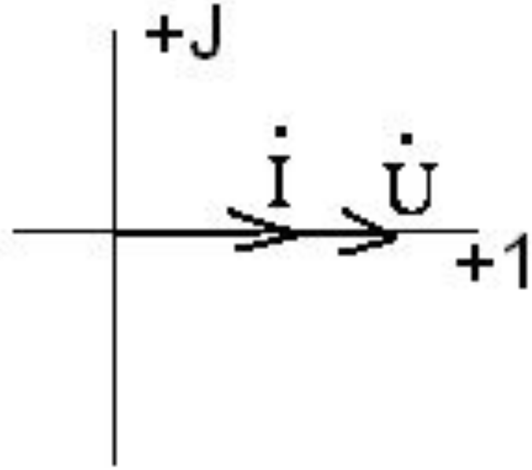
Электрическая цепь с R,L,C-элементами

Для каждого элемента необходимо определить:

- Угол сдвига фаз между напряжением и током (угол φ), построить векторную диаграмму
- Полное комплексное сопротивление (Z)
- Энергетическую характеристику цепи (P, Q, S)

R-элемент





Начальная фаза

$$\psi_u = \psi_i$$

Угол сдвига фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$$

$$i = u/R = \left(U_m/R\right)\sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$U_m = I_m R \qquad U = IR$$

Полное комплексное сопротивление R-элемента

Комплексное сопротивление резистивного элемента всегда является действительным положительным числом, которое равно значению активного сопротивления R.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

$$\underline{Z} = R$$

Закон Ома: $U = IR$

Мощность на R-элементе

На резистивном элементе полная мощность равна активной мощности. Это означает, что на резисторе совершается работа по преобразованию электрической энергии в другие виды энергии.

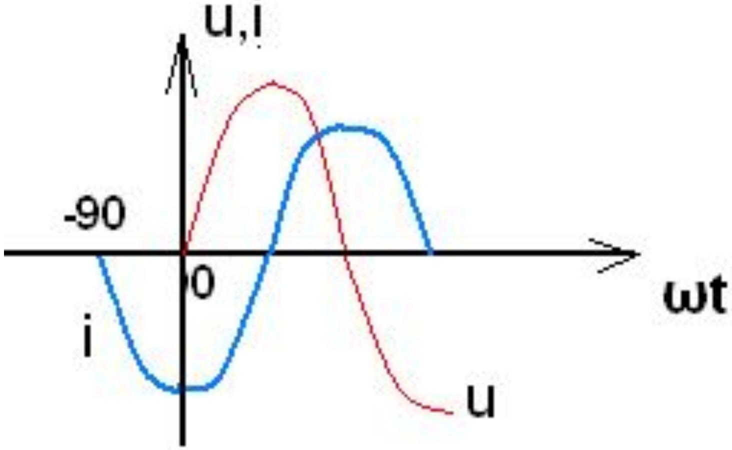
$$\underline{S}_R = P \pm jQ$$

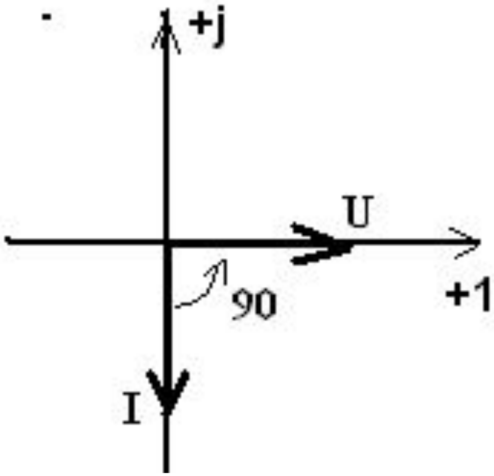
$$P = UI\cos\varphi = UI$$

$$Q = UI\sin\varphi = 0$$

$$\underline{S}_R = P$$

L-элемент





Начальная фаза

$$\psi_u = \psi_i + 90^\circ$$

Угол сдвига фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Полное комплексное сопротивление L-элемента

Комплексное сопротивление L-элемента всегда является мнимым положительным числом, модуль которого равен X_L.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = jX_L$$

$$Z = X_L = \omega L$$

Реальная катушка имеет активное сопротивление, определяемое сопротивлением проводов, поэтому полное комплексное сопротивление равно:

$$\underline{Z}_L = R_L + jX_L$$

Закон Ома: $U = IX_L$

Мощность на L-элементе

$$\underline{S}_L = P \pm jQ$$

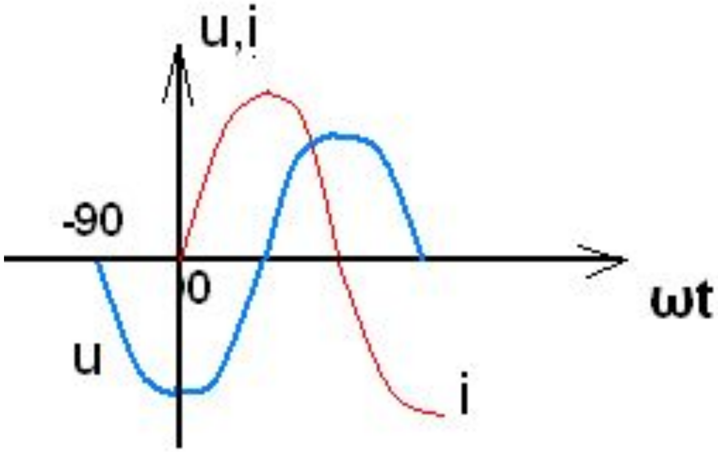
На L–элементе происходит обмен энергией между источником электрической энергии и магнитным полем катушки, что определяет реактивную мощность Q.

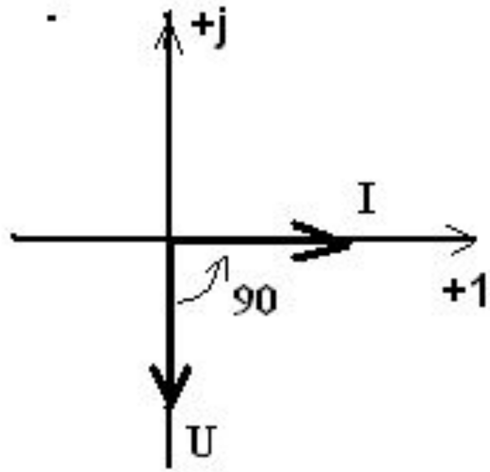
$$P = UI\cos\varphi = 0$$

$$Q = UI\sin\varphi = UI$$

$$\underline{S}_L = jQ$$

С-элемент





Начальная фаза

$$\psi_i = \psi_u + 90^\circ$$

Угол сдвига фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = C\omega U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Полное комплексное сопротивление С-элемента

Комплексное сопротивление С-элемента всегда является мнимым отрицательным числом, модуль которого равен X_C.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = -jX_C$$

$$Z = X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Следовательно сопротивление конденсатора чисто реактивное и равно:

$$\underline{Z}_C = -jZ$$

Закон Ома: $U = IX_C$

Мощность на С-элементе

$$\underline{S}_C = P \pm jQ$$

На С–элементе происходит обмен энергией между источником электрической энергии и электрическим полем конденсатора, что определяет реактивную мощность Q. С-элемент работы не совершает, поэтому активная мощность равна 0.

$$P = UI\cos\varphi = 0$$

$$Q = UI\sin\varphi = -UI$$

$$\underline{S}_C = -jQ$$

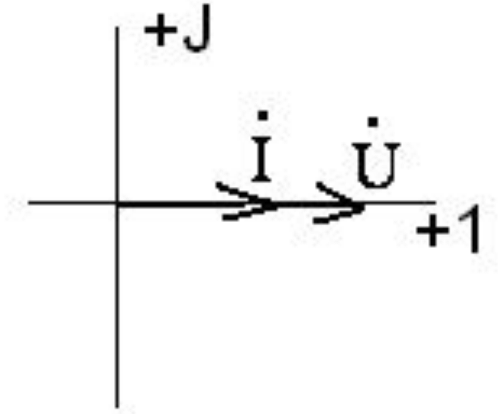
Анализ цепей синусоидального тока

Анализ цепей синусоидального тока происходит при условии, что все элементы цепи идеальны, т.е. R, L, C идеальны.
Электрическое состояние цепей синусоидального тока описывается теми же законами, что и в цепях постоянного тока.

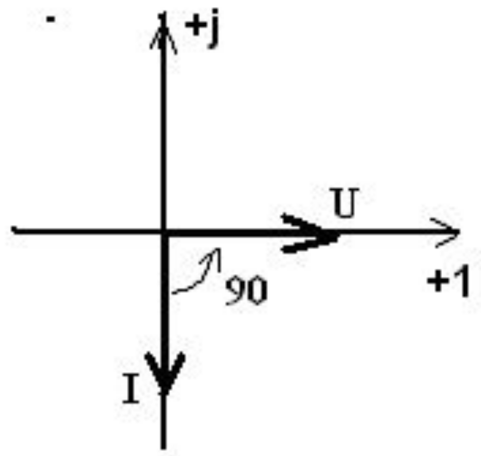
Закон Ома:	$\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{\underline{Z}_{экв}}$	
Законы Кирхгофа	Тригонометрический вид	Комплексный вид
Первый закон:	$\sum\limits_{k=1}^{n} i_k = \sum\limits_{k=1}^{n} I_{km} \sin(\psi_{ik} + \omega t) = 0$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \dot{I}_k = \sum\limits_{k=1} I_k \cdot e^{j\Psi_{ik}} = 0$
Второй закон:	$\sum\limits_{k=1}^{m} u_k = \sum\limits_{k=1}^{m} U_{km} \sin(\omega t + \psi_n) = 0$	$\sum\limits_{k=1}^{m} \dot{U}_k = \sum\limits_{k=1}^{m} U_k e^{j\Psi_{nk}} = 0$

Правила построения векторных диаграмм

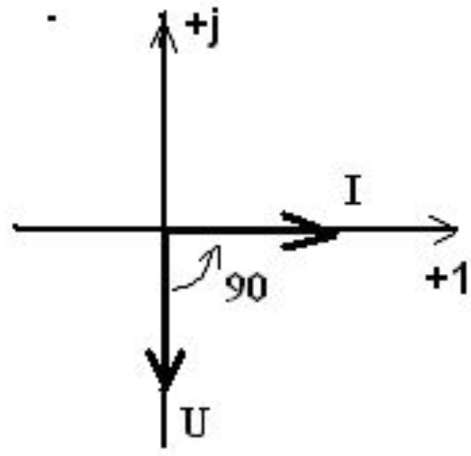
Если электрическая цепь содержит идеализированный R элемент, то угол φ=0 и векторная диаграмма имеет вид



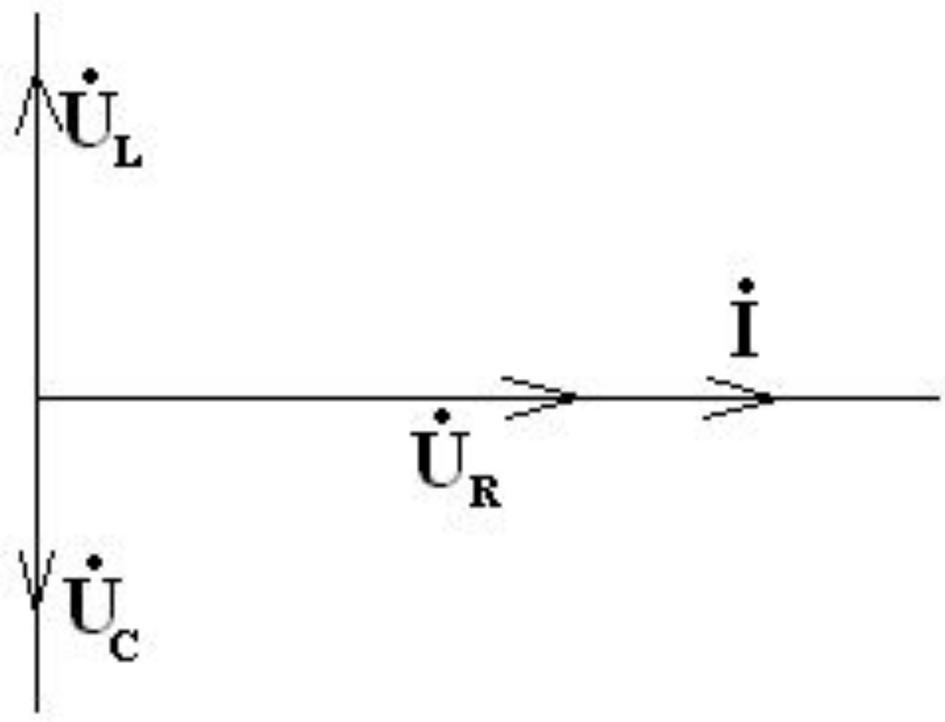
Если электрическая цепь содержит идеализированный L элемент, то угол φ=90 и векторная диаграмма имеет вид



Если электрическая цепь содержит идеализированный C элемент, то угол φ=-90 и векторная диаграмма имеет вид



Правила построения векторных диаграмм



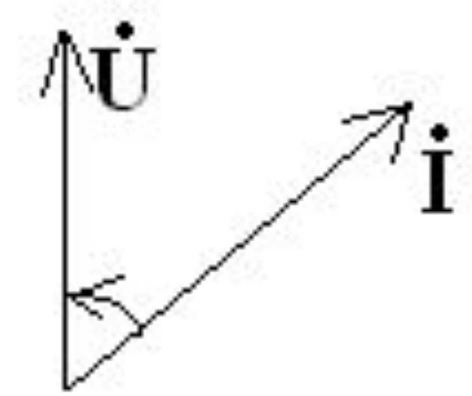
$\varphi_R=0$

$\varphi_L=90$

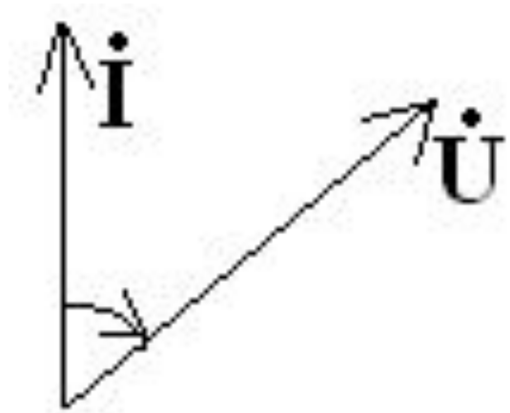
$\varphi_C=-90$

Правила построения векторных диаграмм

Если электрическая цепь содержит активно-индуктивную нагрузку, то угол 0<φ<90 и векторная диаграмма имеет вид:



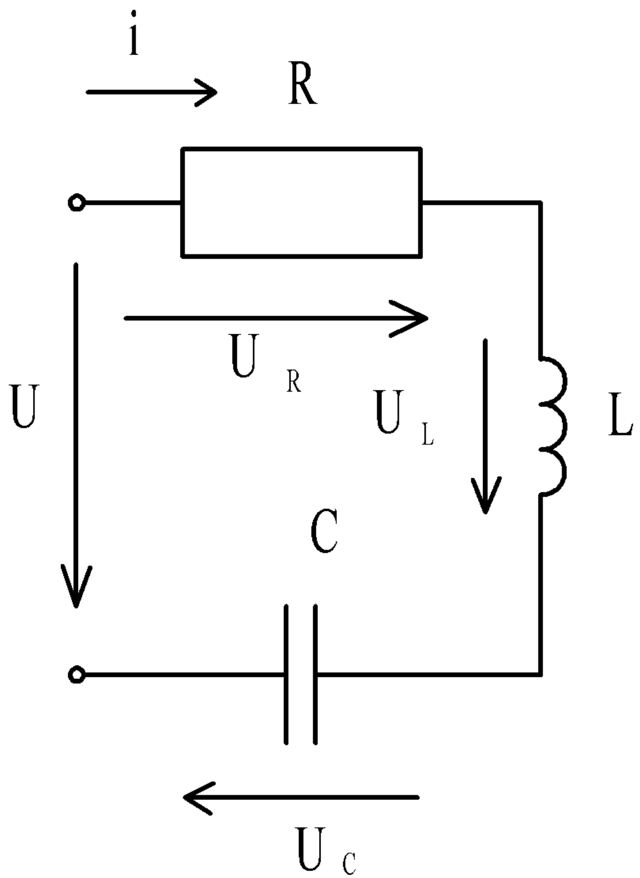
Если электрическая цепь содержит активно-емкостную нагрузку, то угол -90<φ<0 и векторная диаграмма имеет вид:



Правила построения векторных диаграмм

- Если электрическая цепь содержит последовательное соединение элементов, то за основу векторной диаграммы принимается вектор тока, относительно которого строятся вектора напряжений.
- Если электрическая цепь содержит параллельное соединение элементов, то за основу векторной диаграммы принимается вектор напряжения, относительно которого строятся вектора токов.

Последовательное соединение элементов в цепи синусоидального тока.



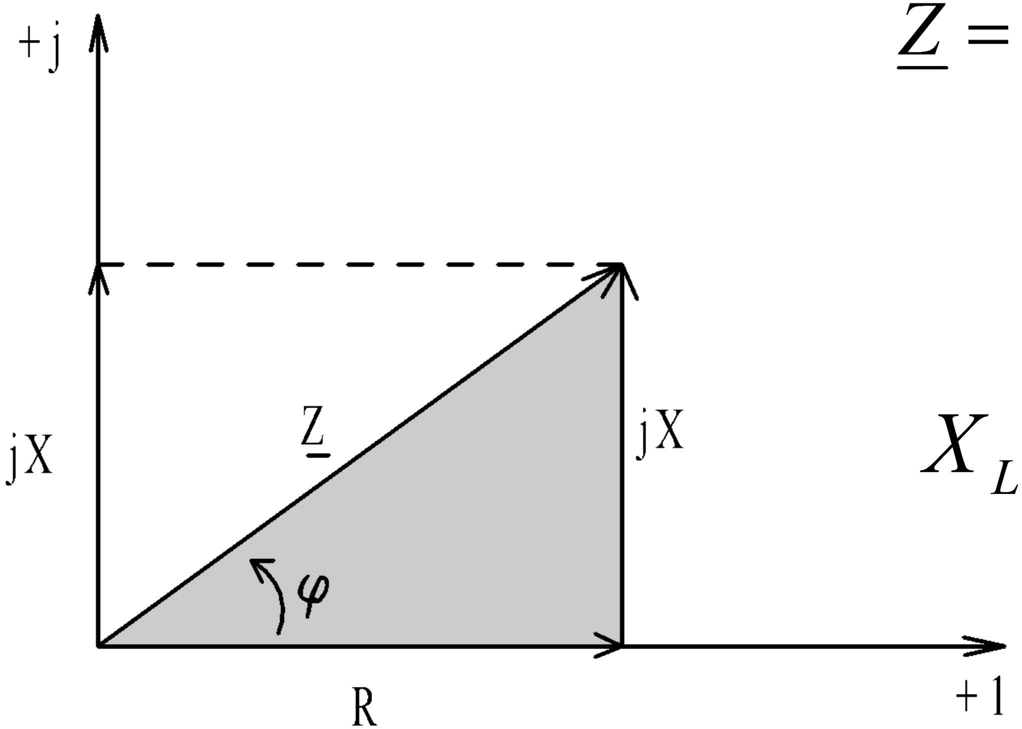
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} + (-jX_C)\dot{I}$$

$$\dot{U} = (R + jX_L - jX_C)\dot{I} = \underbrace{(R + j(X_L - X_C))}_{\underline{z}_{экв}}\dot{I}$$

Закон Ома: $\dot{U} = Z_{экв}\dot{I}$

$$\underline{Z}_{Экв} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + jX_L - jX_C = Z_{экв}e^{j\varphi_{экв}}$$

Треугольник сопротивлений



$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

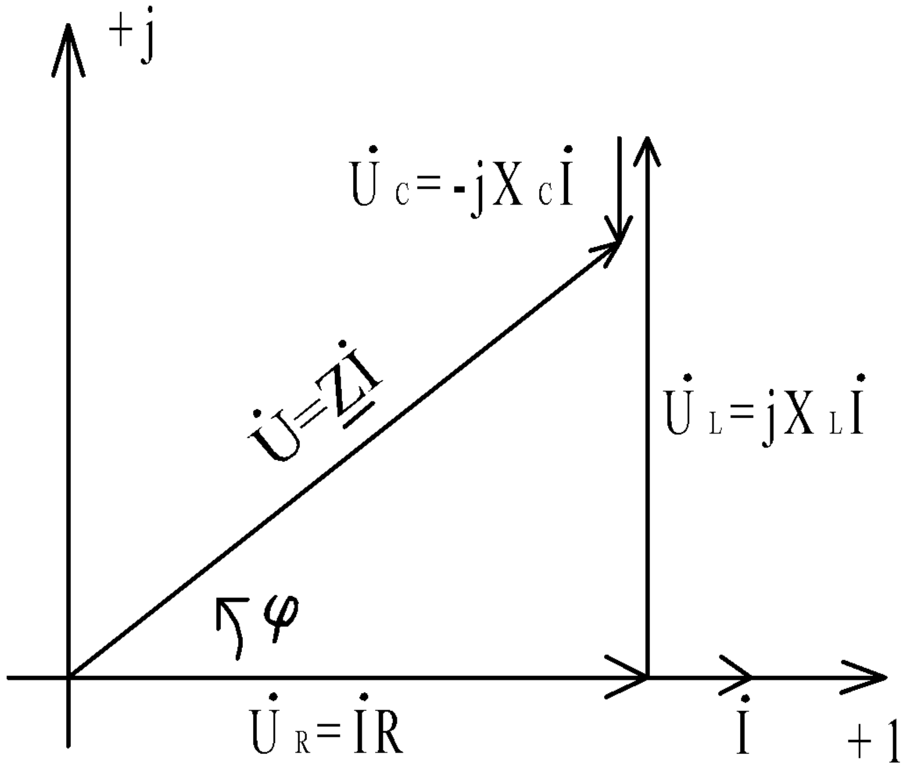
$$X = X_L - X_C$$

$$X_L = L\omega \qquad X_C = \frac{1}{c\omega}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad R = Z\cos\varphi \quad X = Z\sin\varphi \quad \varphi = arctg\frac{X}{R}$$

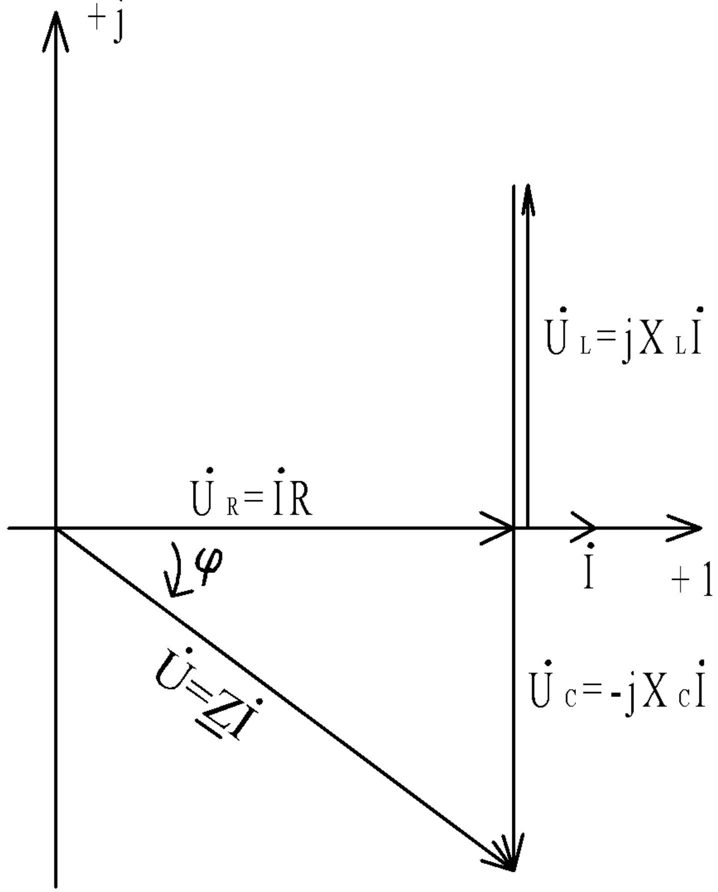
Треугольники напряжений



Если $X_L > X_C$ то отсюда следует что U опережает I, значит цепь имеет индуктивный характер.

$$\varphi > 0$$

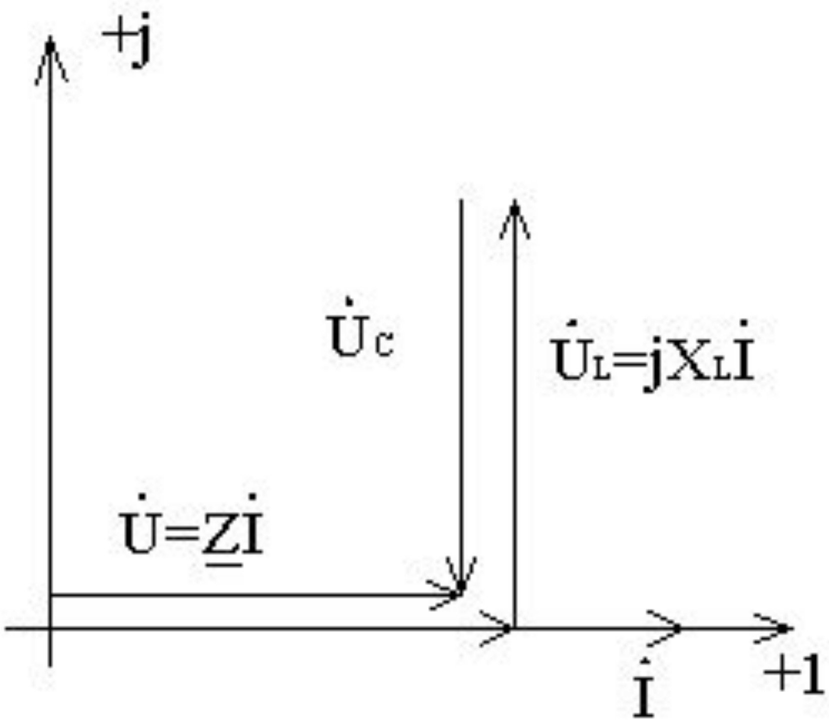
Треугольники напряжений



Если $\mathbf{X_L < X_C}$ то отсюда следует что I опережает U, значит цепь имеет емкостной характер.

$$\varphi \; ⊠ \; 0$$

Резонанс напряжений



Режим работы RLC цепи, при условии равенства реактивных сопротивлений $X_C = X_L$, когда общее напряжение цепи совпадает по фазе с её током φ=0 - называется резонансом напряжений.

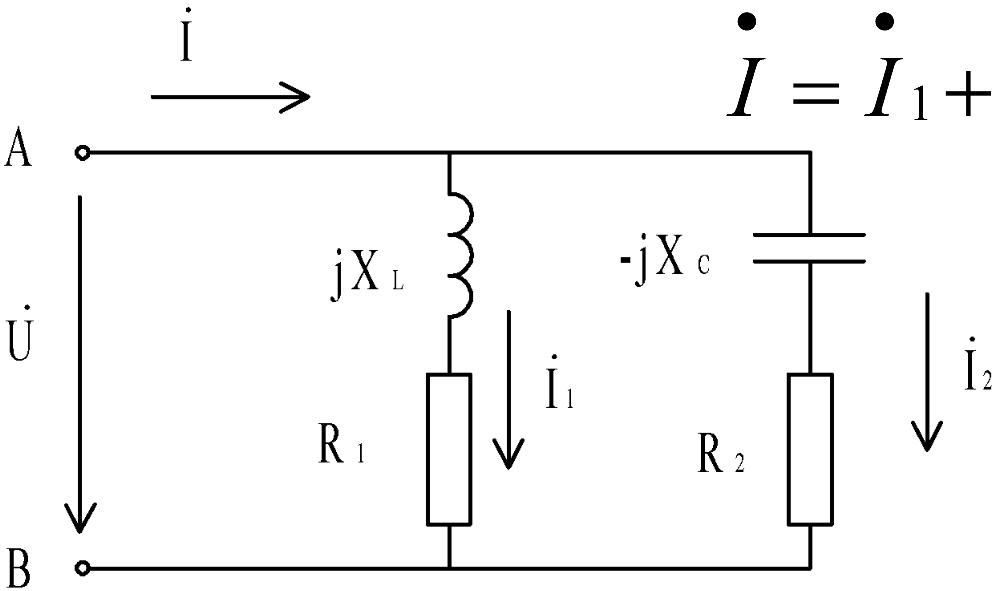
Цепь имеет активный характер:

$$\varphi = 0$$

Признаки резонанса напряжений

1. Напряжение на входе совпадает по фазе с током, т.е. сдвиг фаз между I и U $\varphi=0$, $\cos(\varphi)=1$
2. Ток в цепи будет наибольшим и как следствие $P_{\mathbf{max}}=I^2_{max}R$ тоже максимальна, а реактивная мощность равна нулю.
3. Напряжения на элементах цепи могут в несколько раз превышать напряжение на входе
4. $\dot{U}_C = \dot{U}_L \Rightarrow \dot{U}_C - \dot{U}_L = 0 \Rightarrow \dot{U} = \dot{U}_L - \dot{U}_C + \dot{U}_R = \dot{U}_R.$

Параллельное соединение элементов в цепях синусоидального тока



$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{ЭКВ1}}$$

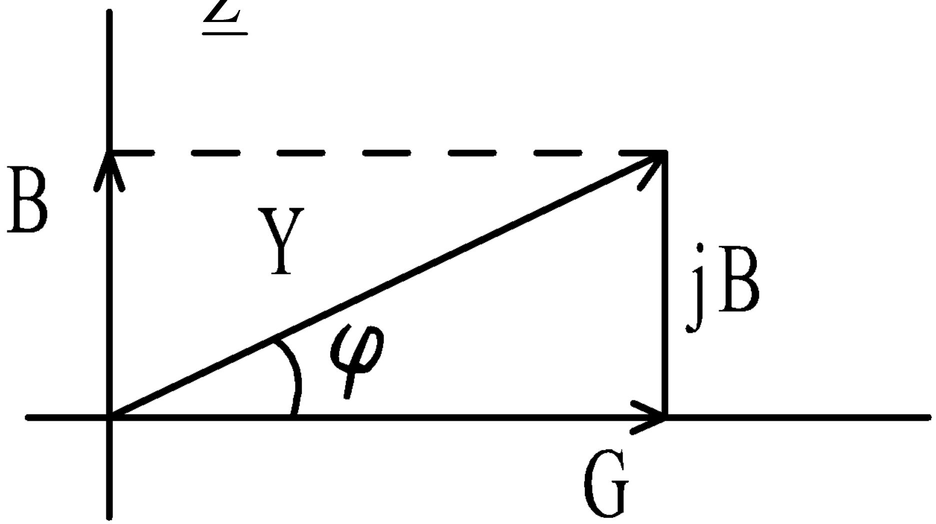
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{ЭКВ2}}$$

$$\underline{Z}_{ЭКВ1} = R_1 + jX_L \qquad \underline{Z}_{ЭКВ2} = R_2 - jX_C$$

Треугольники проводимостей

$$Y = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$$

G – действительная часть, активная составляющая
B – мнимая часть, реактивная составляющая



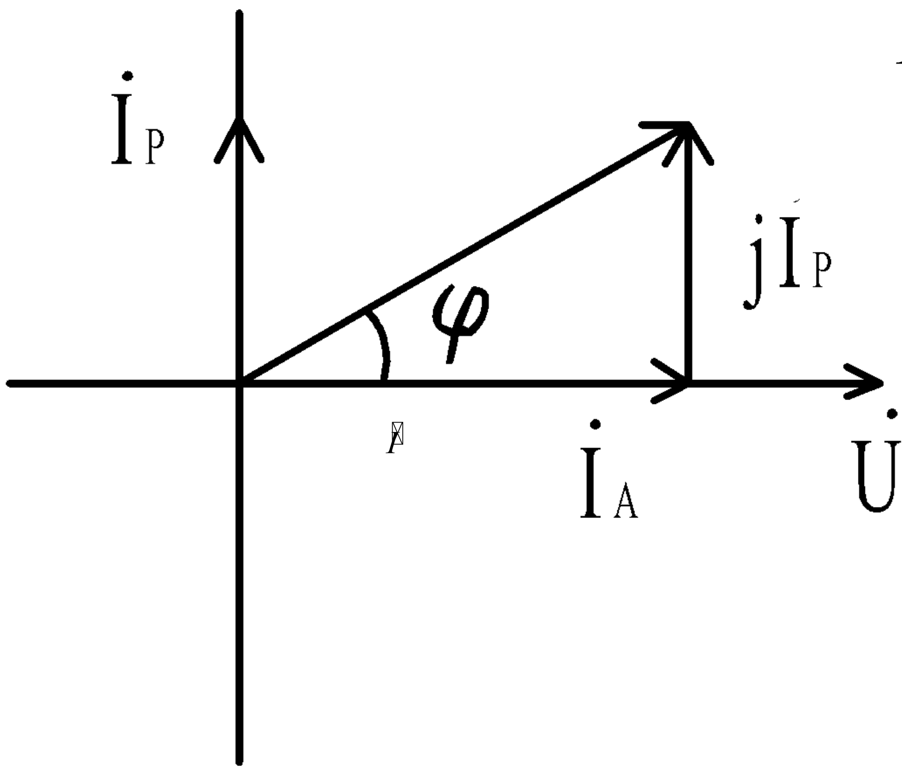
$$G = Y\cos\varphi$$

$$B = Y\sin\varphi$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad G = \frac{R}{Z^2} \qquad B = \frac{X}{R^2 + X^2} \qquad B = \frac{X}{Z^2}$$

Треугольники токов



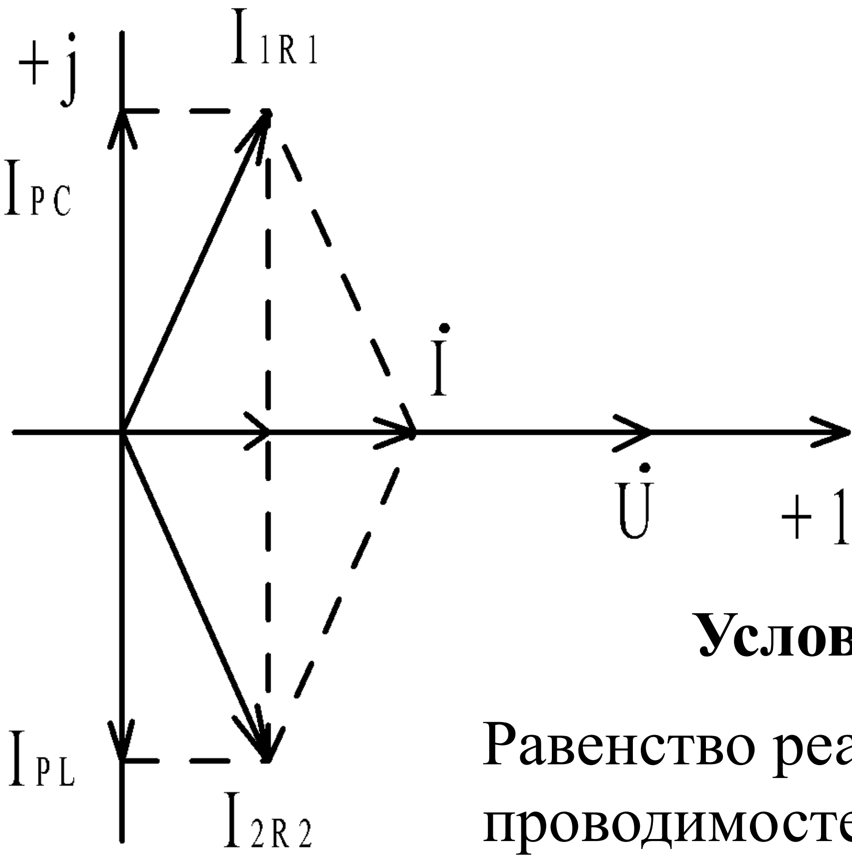
$$\dot{I} = Ie^{j\Psi_i} = \sqrt{I_A{}^2 + I_P{}^2}$$

$$I_A = I\cos\varphi$$

$$I_P = I\sin\varphi$$

$$\varphi = arctg\frac{I_P}{I_A}$$

Резонанс токов



Режим токов при котором в цепи, содержащей параллельные ветви с индуктивными и емкостными элементами, ток неразветвленного участка цепи совпадает по фазе с напряжением (φ=0), называют резонансом токов.

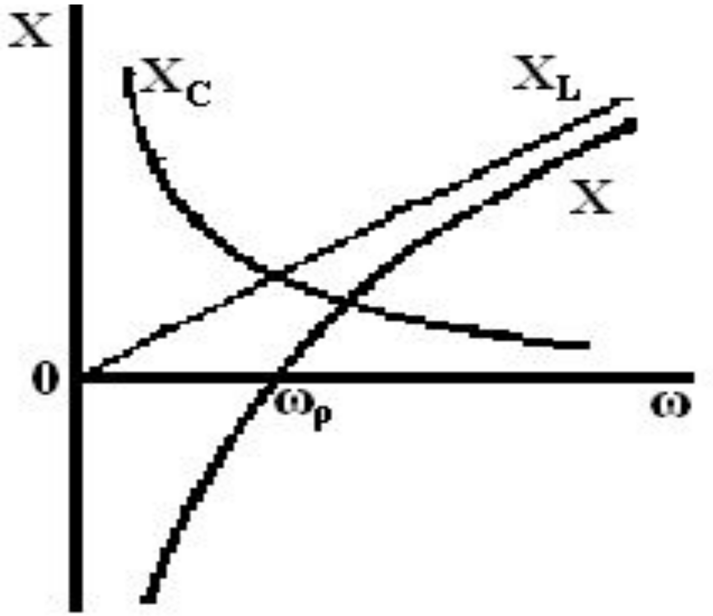
Условие резонанса токов:

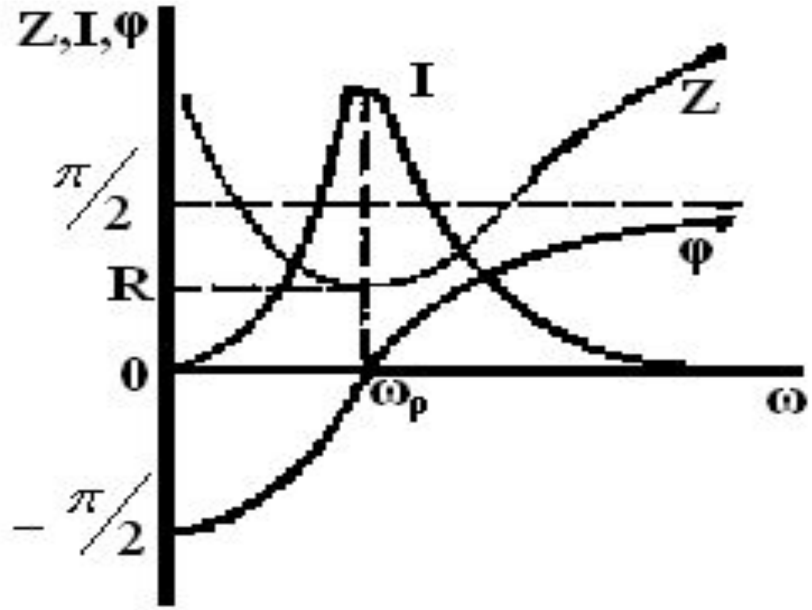
Равенство реактивных составляющих проводимостей в ветвях $B_L = B_C$

Признаки резонанса токов

1. Токи ветвей равны $I_{PC}=I_{PL}$ и находятся в противофазе.
2. Токи ветвей превышают полный ток цепи, который имеет минимальное значение.
3. $\dot{I}$ и $\dot{U}$ совпадают по фазе, **φ= 0**

Частотные характеристики цепей синусоидального тока



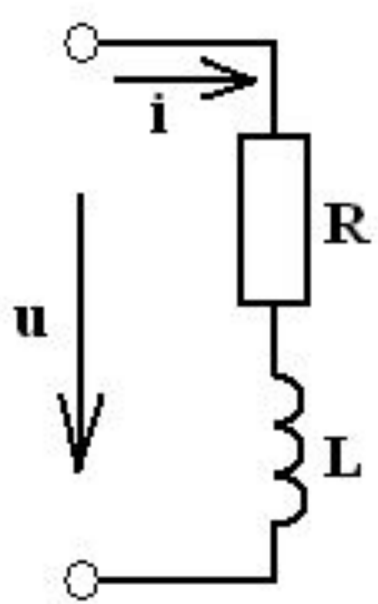


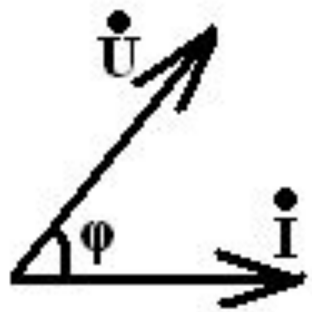
R – активное сопротивление не зависит от частоты

X_L, X_C – реактивные сопротивления зависят от частоты

На графиках показаны зависимости тока, полного комплексного сопротивления и угла сдвига фаз от частоты

Коэффициент мощности в цепях синусоидального тока



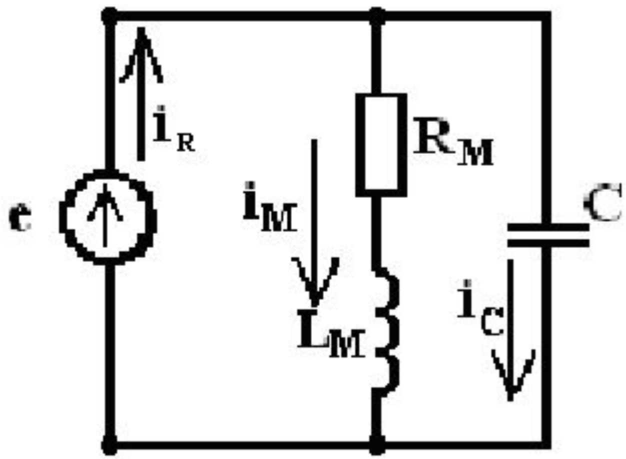


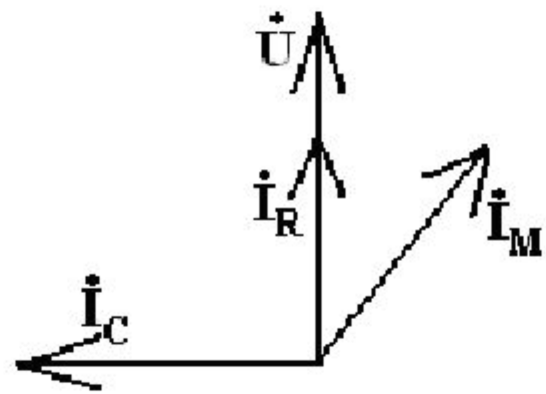
$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi$$

$$P = UI\cos\varphi$$

Увеличение напряжения U приведет к увеличению изоляции проводов, увеличение тока I приведет к увеличению площади сечения проводов.

Повышение коэффициента мощности в цепях синусоидального тока





I_R совпадает с U следовательно φ=0, cosφ=1 и $P=P_{мах}$

Имеется возможность:

1. **использовать для неразветвленного участка провода меньшей площади сечения**
2. **использовать источник меньшей мощности**
3. **подключать к источнику дополнительную нагрузку**