Тема 3.3.Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных.

Функции нескольких переменных: основные понятия.

1. Определение ФНП.
2. Примеры.

Глава 11, стр. 179-180

В.С.Шипачёв Задачник по высшей математике.

Эпиграф

Лучше изучить лишнее, чем ничего не изучить.

Сенека Младший

Частные производные и дифференцируемость ФНП

Задание:

1. Изучить теоретический материал глава 12 п.1 стр. 184-185+ презентация
2. Выписать основные определения.
3. Разобрать пример стр. 185.

Функция двух переменных

Если каждой паре чисел x_1, x_2 однозначно соответствует число y, то тем самым определена **функция двух переменных**:

$$y = f(x_1, x_2)$$

Поскольку в трехмерном пространстве оси обозначают через Ox, Oy, Oz, функцию двух переменных часто записывают так:

$$z = f(x, y)$$

Пример

Функция двух переменных:

$$z = 1 - x - y$$

При значениях $x = 1, y = 1$

$$z = -1$$

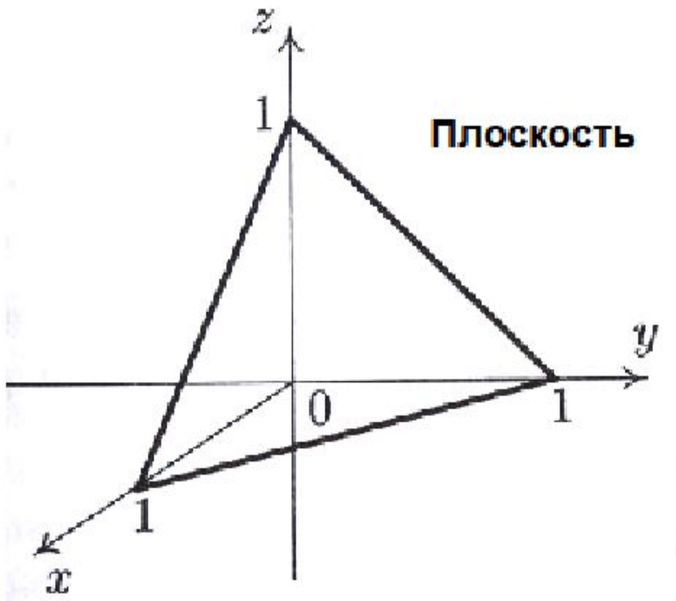
Можно записать эту функцию в другом виде:

$$x + y + z = 1$$

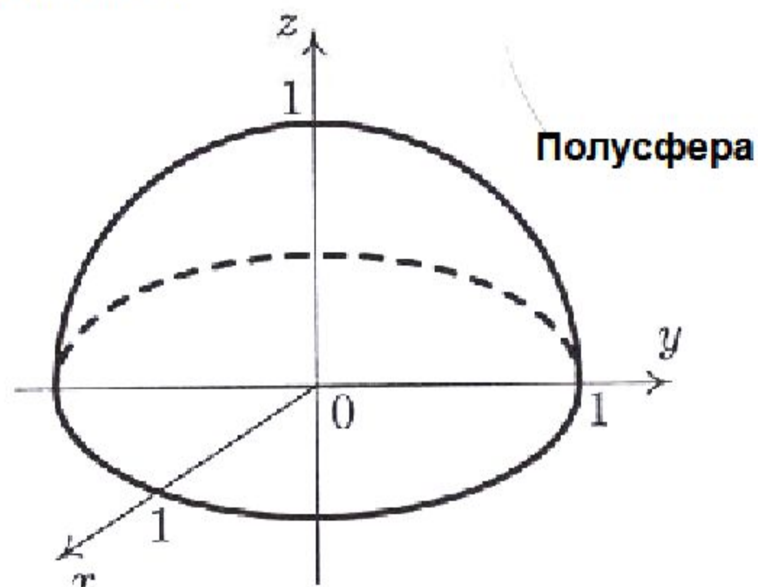
Это есть уравнение плоскости в трехмерном пространстве.

Графики функции двух переменных

Графическое изображение функций двух переменных связано с изображением трехмерного пространства.



$$z = 1 - x - y$$

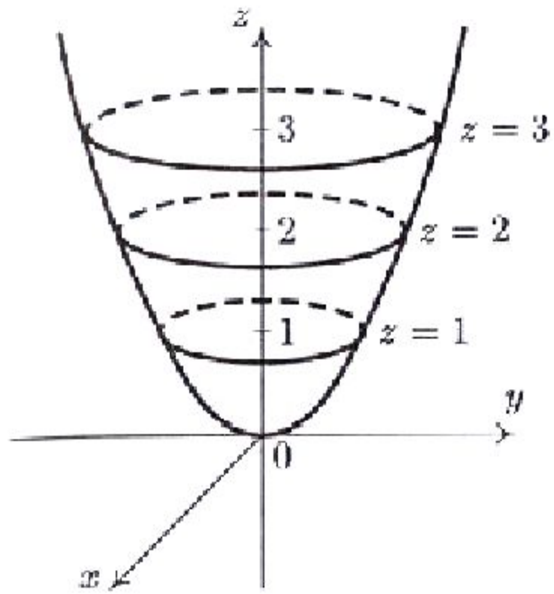


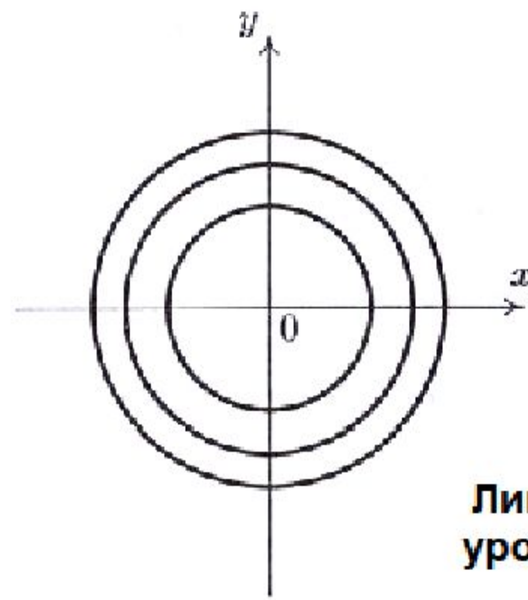
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Линии уровня

Другим представлением функции является метод линий уровня. **Линией уровня** называется геометрическое место точек плоскости, в которых функция $z = f(x, y)$ принимает постоянное значение.

Сечения плоскостями





Линии уровня

Область определения

Множество всех значений независимых переменных x и y, для которых определена функция $z = f(x, y)$ называют **областью определения** этой функции.

Пример. Функция

$$z = x^2 + y^2$$

определена для всех значений независимых переменных.

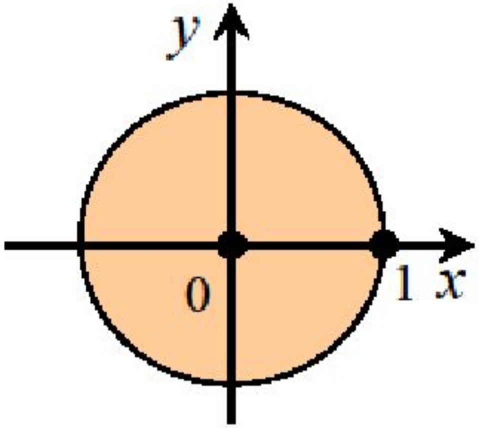
Пример

Функция двух переменных:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

определена при

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$



Это равносильно неравенству:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

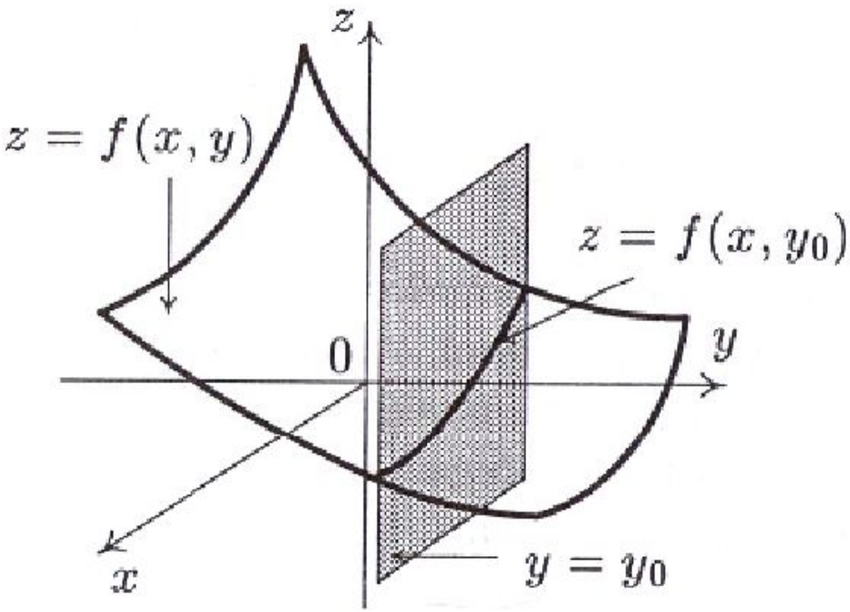
Область определения представляет собой множество точек круга единичного радиуса.

Частная производная z'_x

Будем считать, что независимая переменная y приняла постоянное значение y_0.

Тогда $z = f\,(x,\ y_0)$ есть функция одной переменной.

Ее производная z'_x в точке x_0 называется **частной производной** от функции двух переменных $z = f\,(x,\ y)$ в точке (x_0, y_0).



Частная производная по переменной x

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x$$

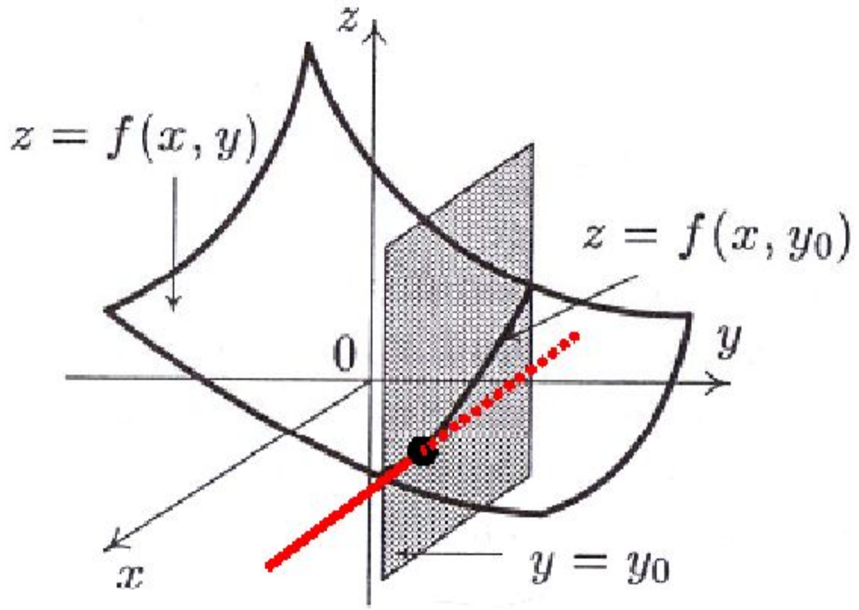
то он называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x.

Обозначения: z'_x $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$

Определите частную производную по второй переменной самостоятельно.

Геометрический смысл

В **геометрическом смысле** частная производная z'_x представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке (x_0, y_0) с направлением оси Ox.



Пример

Найти первые частные производные функции:

$$z = 5x^2 - 8y^2 - 3xy^2 + 11$$

Ответ (пишем сразу):

$$z'_x = 10x - 3y^2$$

$$z'_y = -16y - 6xy$$

Дифференциал функции. Градиент.

Задание:

1. Изучить теоретический материал глава 12 п.3 стр. 188+ презентация
2. Выписать определение, формулу.
3. Разобрать пример 3 стр. 189-190

Полный дифференциал

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ является разность:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$$

А поскольку $\Delta x = dx, \Delta y = dy$

то

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy}$$

Пример

Найти полный дифференциал функции двух переменных:

$$z = 5x^2 - 8y^2 - 3xy^2 + 11$$

Решение. $dz = z'_x dx + z'_y dy =$

$$= (10x - 3y^2)dx + (-16y - 6xy)dy$$

Градиент функции

Градиентом функции *z=f(M)* в точке *M(x,y)* называется вектор , координаты которого равны соответствующим частным производным z'_x, z'_y ,

взятым в точке *M(x,y)*.

Градиент функции

Обозначение:

$$grad\ z = \left\{ z_x^{/} ; z_y^{/} \right\}$$

Проверочная работа

«Дифференциал функции нескольких переменных. Градиент».