Примеры задач линейного программирования

Задача об использовании ресурсов

Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используют четыре вида ресурсов: S1, S2, S3 и S4.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	-	1
S4	21	3	-

Прибыль от реализации единицы продукции P1 и P2 соответственно 2 и 3 ден. ед.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет **максимальной**.

Задача об использовании ресурсов

Решение

Введем переменные

X1 – число единиц продукции P1, запланированных к производству

X2 – число единиц продукции P2, запланированных к производству

Прибыль:

$F = 2*X1+3*X2$

Цель:

$F \rightarrow \max$

Задача об использовании ресурсов

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	-	1
S4	21	3	-

Решение

Ограничения

1) Условие неотрицательности:

$X1 \geq 0,\ X2 \geq 0$

2) На запас сырья S1: $1*X1+3*X2 \leq 18$

3) На запас сырья S2: $2*X1+1*X2 \leq 16$

4) На запас сырья S3: $0*X1+1*X2 \leq 5$

5) На запас сырья S4: $3*X1+0*X2 \leq 21$

Задача об использовании ресурсов

Экономико-математическая модель (задача линейного программирования)

Т.о. необходимо найти план выпуска продукции $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

при котором целевая функция $F = 2x_1 + 3x_2 \to max$ (принимает максимальное значение)

Экономико-математическая модель (коротко)

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача составления рациона

В дневной рацион питания цыплят включают два продукта П1 и П2. Причем продукта П1 должно войти в дневной рацион не более 200 ед.

Стоимость 1 ед. продукта П1 составляет 2 ден. ед., а продукта П2 – 4 ден. ед.

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет **наименьшей**

Задача составления рациона

Решение

Введем переменные

X1 – число единиц продукта П1, входящего в дневной рацион

X2 – число единиц продукта П2, входящего в дневной рацион

Стоимость дневного рациона :

$F = 2*X1+4*X2$

Цель:

$F \rightarrow \min$

Задача составления рациона

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Решение

Ограничения

1) Условие неотрицательности:

$X1 \geq 0,\ X2 \geq 0$

2) Ограничение на максимальное содержание продукта П1: $X1 \leq 200$

3) Ограничения на минимальное содержание питательных веществ:

$0,2 \cdot X1 + 0,2 \cdot X2 \geq 120$

$0,4 \cdot X1 + 0,2 \cdot X2 \geq 160$

Задача составления рациона

Экономико-математическая модель (задача линейного программирования)

Найти рацион питания $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \le 200, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \ge 120, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \ge 160, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

при котором целевая функция $F = 2x_1 + 4x_2 \to min$ (принимает минимальное значение)

Поясним термин **линейное программирование**

линейное означает: ищется экстремальное значение (min или max) **линейной** целевой функции при **линейных** ограничениях (линейных уравнениях или неравенствах)

программирование в данном словосочетании имеет смысл **планирования**

Общий вид задачи линейного программирования

Целевая функция

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2 , \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m , \\ x_1, x_2, \ldots x_n \ge 0 \end{cases}$$

Общий вид
задачи линейного программирования

Краткая форма

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

Каноническая задача ЛП

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

В канонической задаче:

1) Целевая функция → max
2) Все ограничения имеют вид уравнений
3) Все переменные неотрицательны

В канонической задаче:
1) Целевая функция → max
2) Все ограничения имеют вид уравнений
3) Все переменные неотрицательны

Для выполнения этих условий может понадобиться выполнить следующие преобразования:

1. Пусть **F → min**
   Переходим к **(-F) → max** (переходим к противоположной функции)

В канонической задаче:
1) Целевая функция → max
2) Все ограничения имеют вид уравнений
3) Все переменные неотрицательны

Для выполнения этих условий может понадобиться выполнить следующие преобразования:

2. Пусть дано ограничение неравенство

$$a_1x_1+a_2x_2 \geq b$$

Вводим новую переменную $x_3 \geq 0$:

$$a_1x_1+a_2x_2-x_3 = b$$

В канонической задаче:
1) Целевая функция → max
2) Все ограничения имеют вид уравнений
3) Все переменные неотрицательны

Для выполнения этих условий может понадобиться выполнить следующие преобразования:

3. Пусть $\mathbf{x_i \le 0}$

Вводим новые переменные $\mathbf{x_j \ge 0, x_k \ge 0}$:

$$\mathbf{x_i = x_j - x_k}$$

Таким образом, задача линейного программирования (ЗЛП) в любом виде **может быть преобразована к канонической форме**

Литература

1. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операций. - М.: ТК Велби, 2006. - 280 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. - СПб.: Питер, 2005. - 464 с.