Начало

Оглавление

Составитель

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(учебная дисциплина)

Составители

доценты кафедры математики и моделирования ВГУЭС

Шуман Галина Ивановна

Волгина Ольга Алексеевна

ВГУЭС

Элементы аналитической геометрии в пространстве

Содержание

ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

Начало

Оглавление

Составитель

- Уравнение $\boldsymbol{F(x; y; z) = 0}$ определяет некоторую **поверхность** в пространстве $Oxyz$.

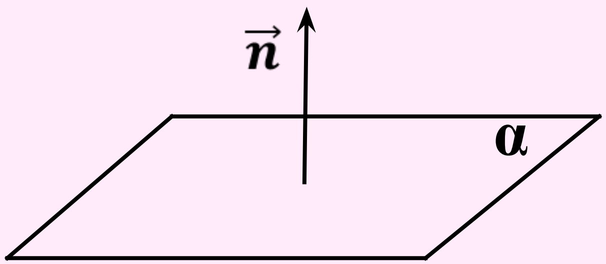
Поверхностью в некоторой системе координат называется геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих некоторому уравнению, называемому **уравнением поверхности.**

ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- Любой вектор, перпендикулярный плоскости (α) , называется **нормальным вектором или нормалью плоскости**

$$\vec{n}(A;B;C)$$



ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Плоскость в пространстве

- Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$ и нормаль $\vec{n}(A; B; C)$, $M(x; y; z)$ – текущая точка плоскости α.

Уравнение вида

$$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Называется **уравнением плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.**

ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые в последнем уравнении, получим
$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$
Обозначим $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, тогда уравнение примет вид
$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$, которое называется **общим уравнением плоскости.**

ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

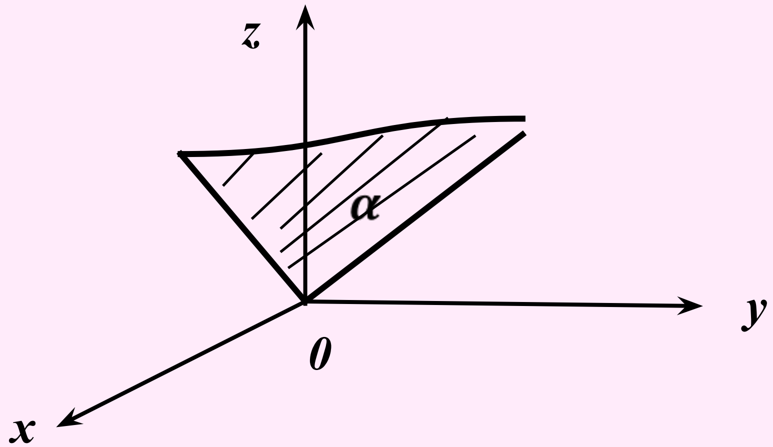
Начало

Оглавление

Составитель

- Частные случаи общего уравнения плоскости:

1) если $D = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, уравнение плоскости примет вид $Ax + By + Cz = 0$, которая проходит через начало координат



ВГУЭС

Начало

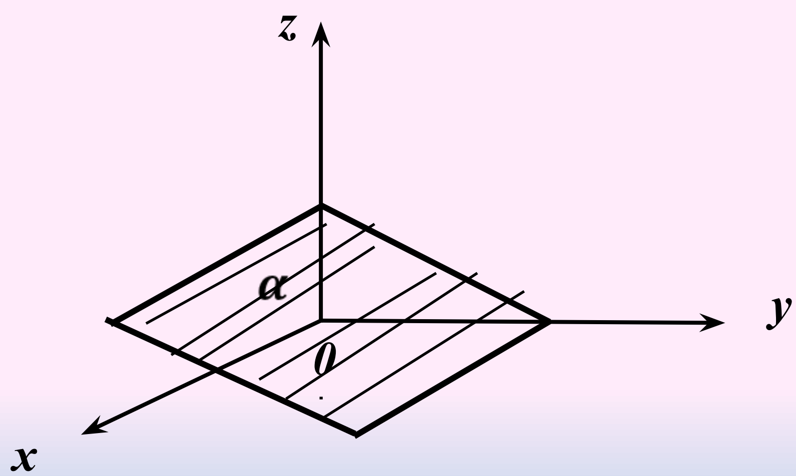
Оглавление

Составитель

§ 1. Плоскость в пространстве

2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то есть $\vec{n}(0; B; C)$, тогда получим уравнение плоскости

$By + Cz + D = 0$, параллельной оси Ox

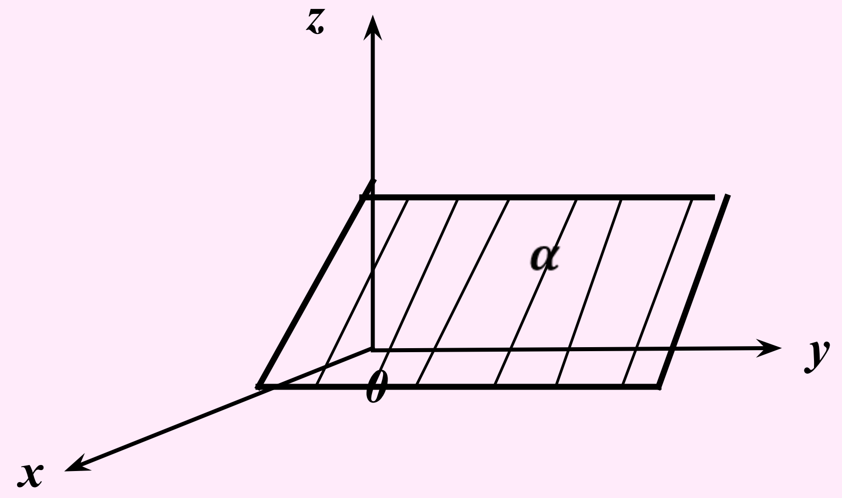


ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- 3) $B = 0; A \neq 0; C \neq 0; D \neq 0$, то есть $\vec{n}(A; 0; C)$, получим уравнение плоскости

$Ax + Cz + D = 0$, параллельной оси Oy



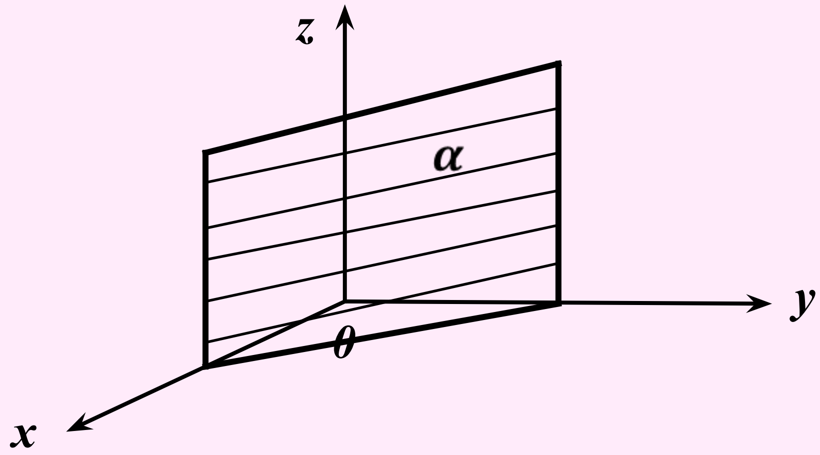
ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

Начало
Оглавление
Составитель

- 4) $C = 0; A \neq 0; B \neq 0; D \neq 0$, то есть $\vec{n}(A; B; 0)$, получим уравнение плоскости

$Ax + By + D = 0$, параллельной оси Oz

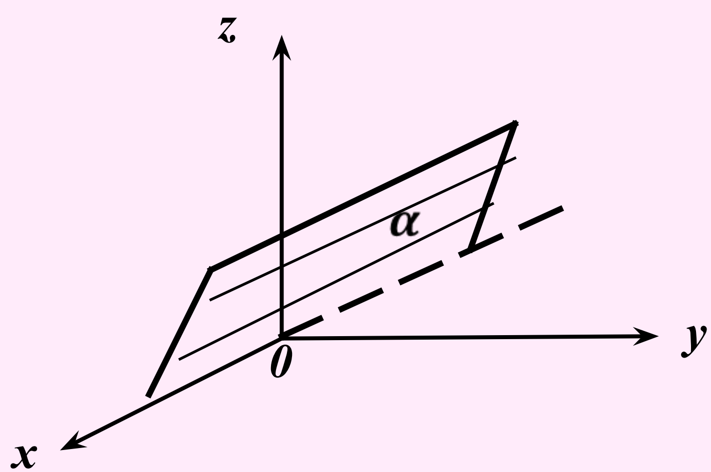


ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- 5) $A = 0, D = 0, B \neq 0, C \neq 0$, получим

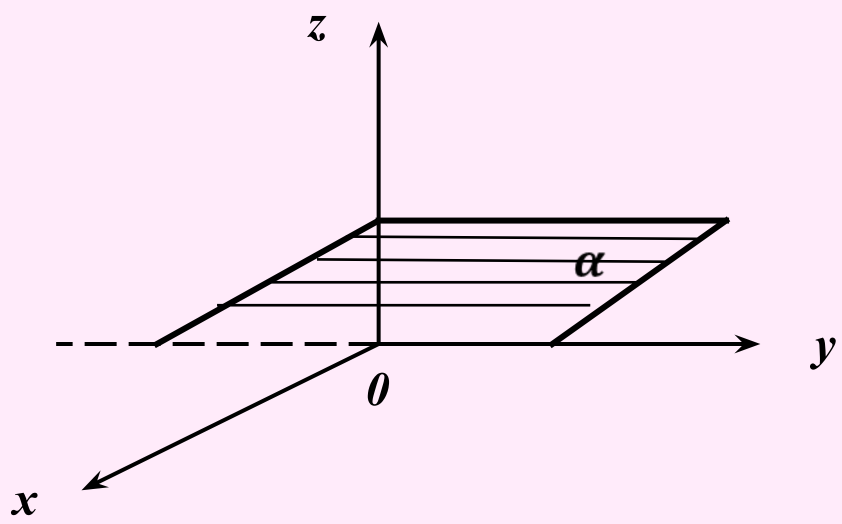
$By + Cz = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через ось Ox



ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- б) $B = 0, D = 0, A \neq 0, C \neq 0$, уравнение плоскости $Ax + Cz = 0$, проходящей через ось Oy



ВГУЭС

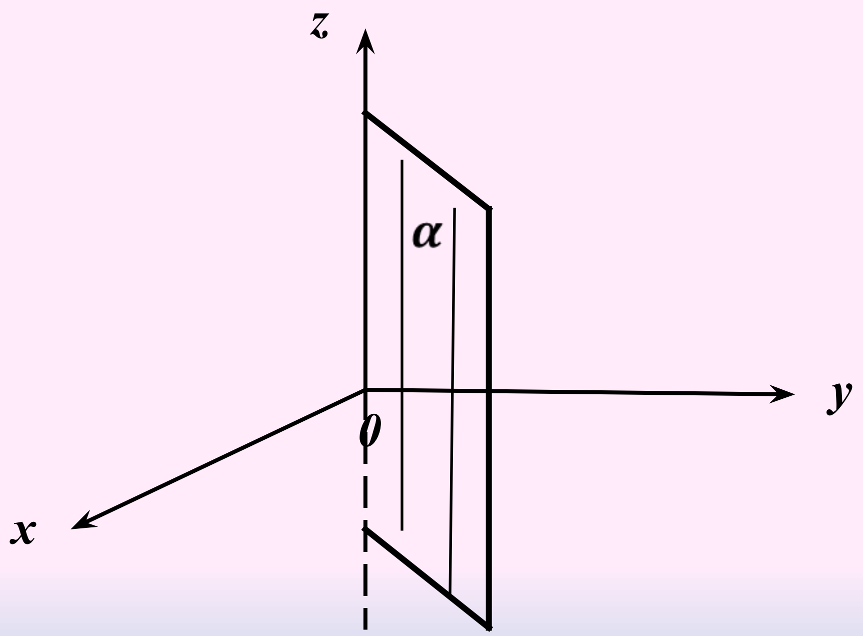
Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Плоскость в пространстве

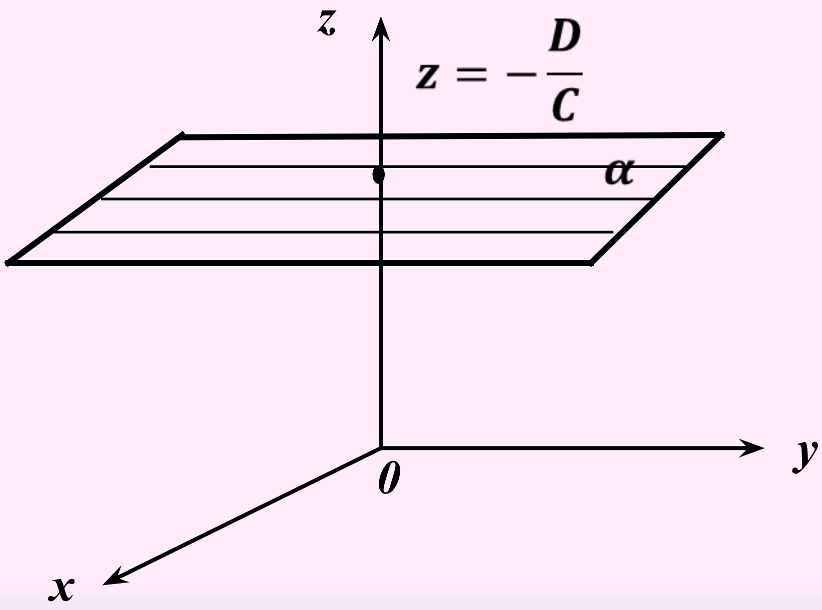
- 7) $C = 0, D = 0, A \neq 0, B \neq 0$, уравнение плоскости $Ax + By = 0$, проходящей через ось Oz



ВГУЭС

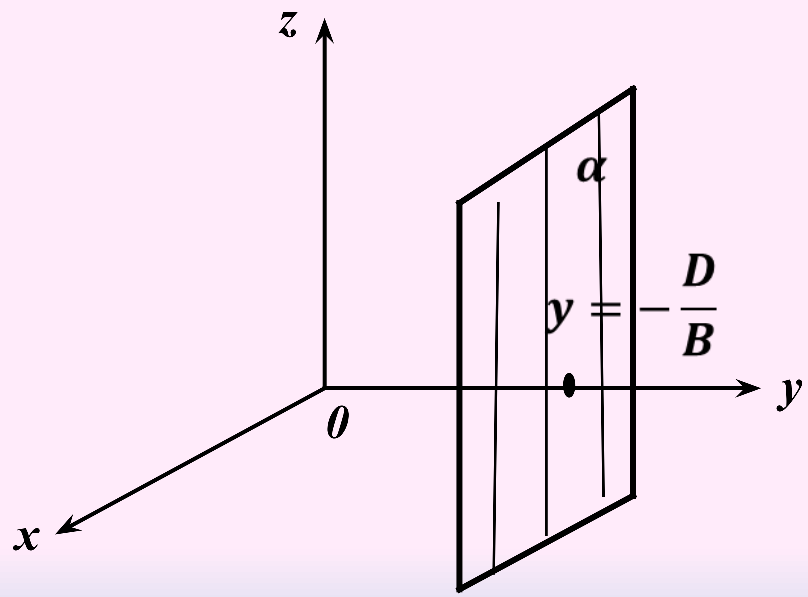
§ 1. Плоскость в пространстве

- 8) $A = B = 0, C \neq 0, D \neq 0$, уравнение плоскости $Cz + D = 0$ или $z = -\frac{D}{C}$, параллельной плоскости Oxy



§ 1. Плоскость в пространстве

- 9) $A = C = 0, B \neq 0, D \neq 0$, уравнение плоскости $By + D = 0$ или $y = -\frac{D}{B}$, параллельной плоскости Oxz



ВГУЭС

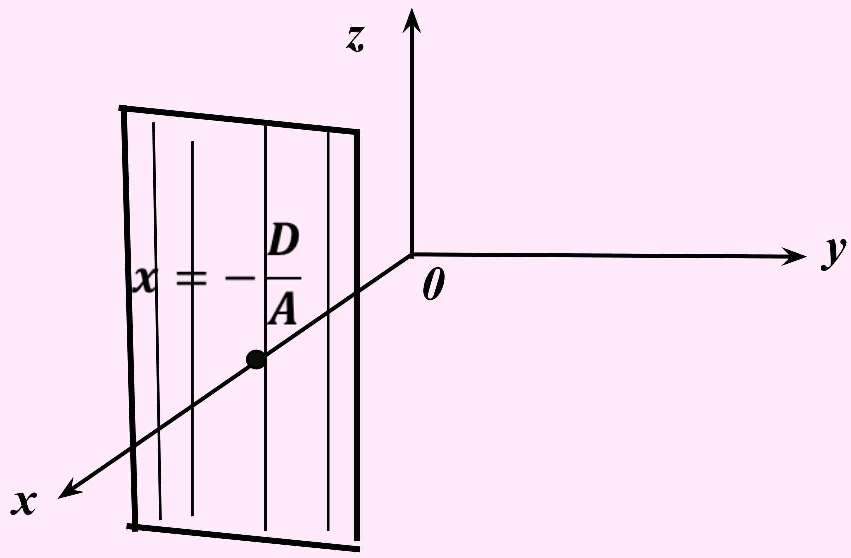
Начало

Оглавление

Составитель

§ 1. Плоскость в пространстве

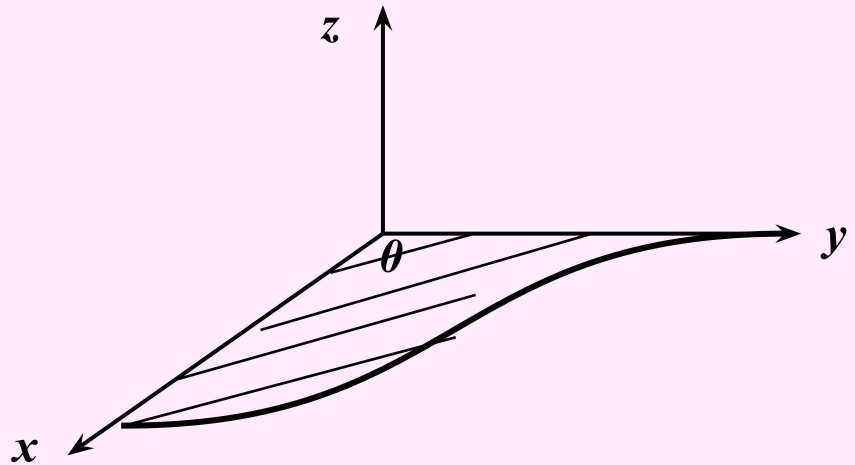
- 10) $B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$, уравнение плоскости $Ax + D = 0$ или $x = -\frac{D}{A}$, параллельной плоскости Oyz



ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- 11) $A = B = D = 0, C \neq 0$, уравнение плоскости $Cz = 0$ или $z = 0$ задает плоскость Oxy



ВГУЭС

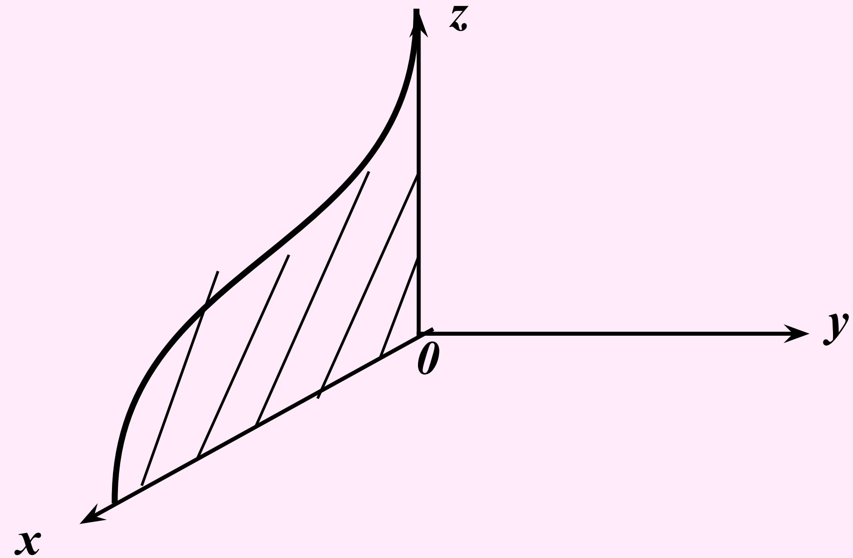
§ 1. Плоскость в пространстве

Начало

Оглавление

Составитель

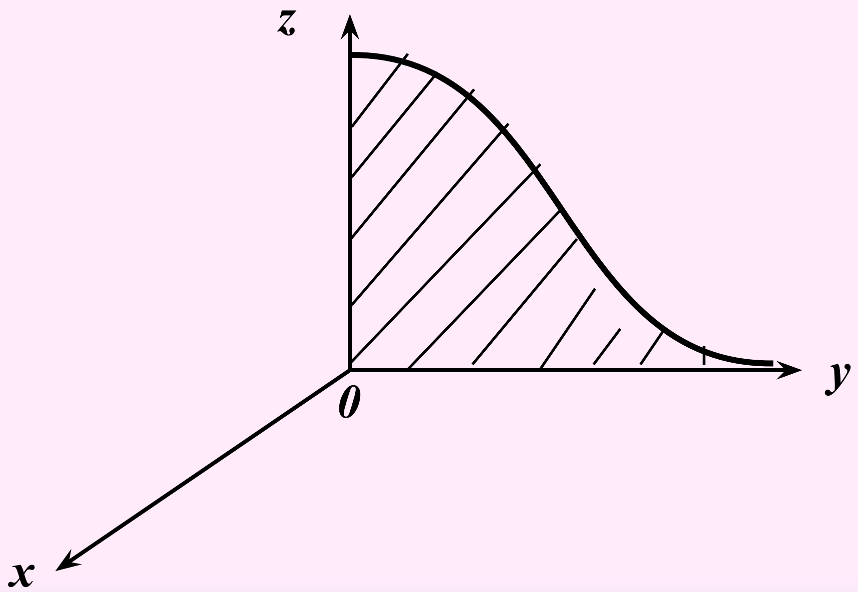
- 12) $A = C = D = 0$, $B \neq 0$, уравнение плоскости $By = 0$ или $y = 0$ задает плоскость Oxz



ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- 13) $B = C = D = 0$, $A \neq 0$ уравнение плоскости $Ax = 0$ или $x = 0$ задает плоскость Oyz



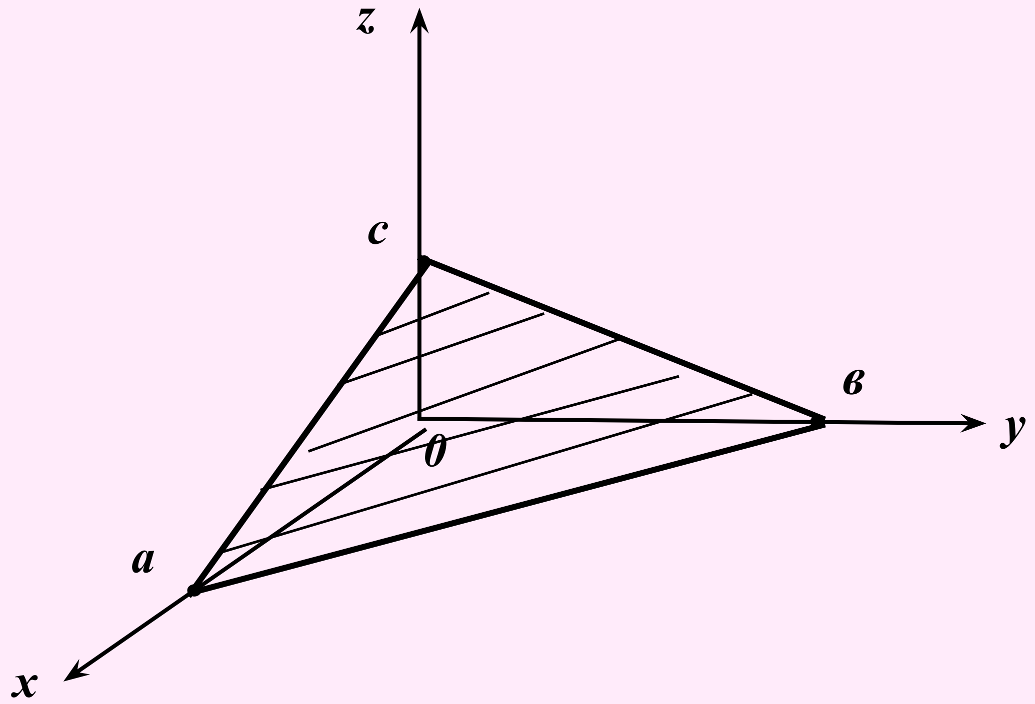
ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- Преобразуем общее уравнение плоскости при условии, что $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$:
$Ax + By + Cz = -D$, $\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$.
Обозначим $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$, тогда уравнение плоскости примет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, которое называется **уравнением плоскости в отрезках.**

ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве



ВГУЭС

§ 1. Плоскость в пространстве

- Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тогда уравнение **плоскости, проходящей через эти точки**, имеет вид

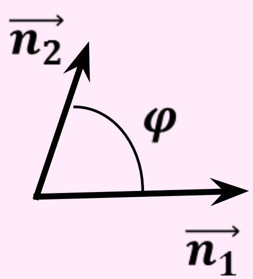
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

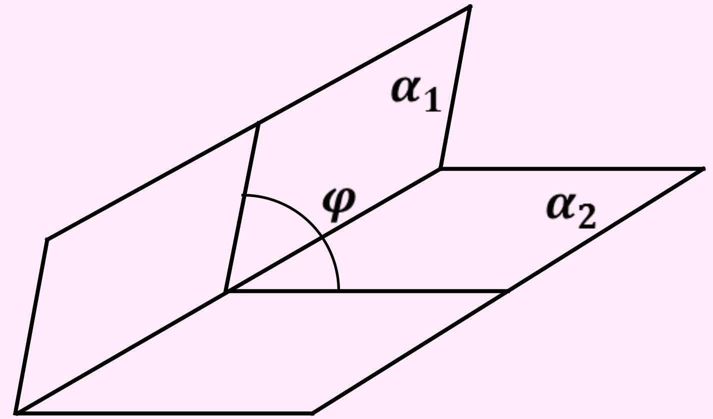
§ 2. Взаимное расположение плоскостей

- Пусть даны две непараллельные плоскости

$$\alpha_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$$

$$\alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$$





ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 2. Взаимное расположение плоскостей

- $\cos(\alpha_1 \hat{} \alpha_2) = \cos\varphi = \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

ВГУЭС

§ 2. Взаимное расположение плоскостей

- Если $\alpha_1 \| \alpha_2$, тогда $\overrightarrow{n_1} \| \overrightarrow{n_2}$, то есть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ -}$$

условие параллельности двух плоскостей.

Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, тогда $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, то есть $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$,

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \text{ -}$$

условие перпендикулярности двух плоскости.

ВГУЭС

§ 3. Расстояние от точки до плоскости

- $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$ точка

$M_0(x_0; y_0;\ z_0) \notin \alpha$, d – расстояние от точки M_0 до плоскости α. Тогда

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

расстояние от точки до прямой

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 4. Прямая в пространстве

- $\begin{cases} \alpha_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - данная система определяет прямую как линию пересечения двух плоскостей, которая называется **общими уравнениями прямой в пространстве.**

ВГУЭС

§ 4. Прямая в пространстве

Начало
Оглавление
Составитель

- Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \boldsymbol{l}, \vec{s}(m; n; p)$ – направляющий вектор прямой $\boldsymbol{l}$, тогда уравнения вида

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

называются **каноническими уравнениями прямой**.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 4. Прямая в пространстве

- Пусть $\frac{x-x_0}{m}=t, \frac{y-y_0}{n}=t, \frac{z-z_0}{p}=t$, где $t\in R$.

Выразив x, y и z, получим

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \\ t \in R \end{cases}$$

параметрические уравнения прямой.

ВГУЭС

§ 4. Прямая в пространстве

- Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \boldsymbol{l}, M_2(x_2, y_2, z_2) \in \boldsymbol{l}$, тогда

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

уравнение прямой , проходящей через две данные точки.

ВГУЭС

§ 5. Взаимное расположение прямых в пространстве

- Пусть даны две прямые

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$ и

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

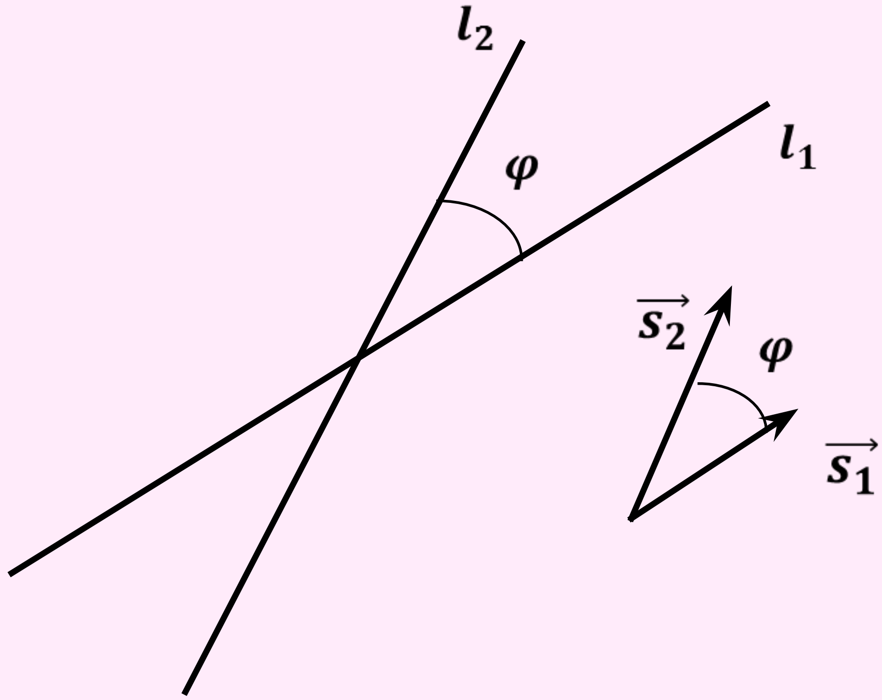
$\overrightarrow{s_1}(m_1; n_1; p_1)$ и $\overrightarrow{s_2}(m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы этих прямых соответственно.

§ 5. Взаимное расположение прямых в пространстве

Начало

Оглавление

Составитель



ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Взаимное расположение прямых в пространстве

- $\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}) = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|}$

или

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

косинус угла между двумя пересекающимися прямыми в пространстве.

ВГУЭС

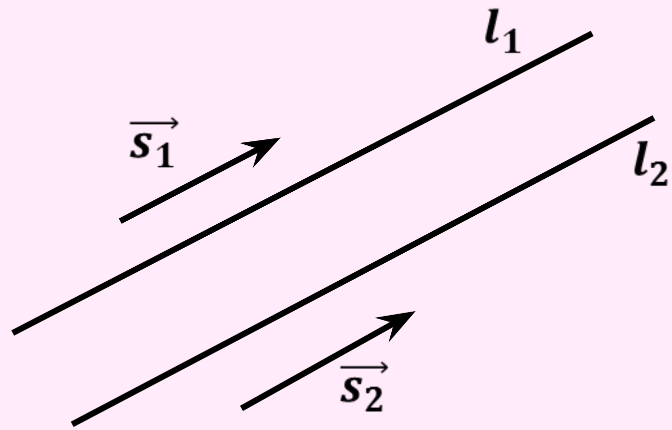
Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Взаимное расположение прямых в пространстве

- Если $l_1 \| l_2$, тогда $\overrightarrow{s_1} \| \overrightarrow{s_2}$: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ **- условие параллельности двух прямых**

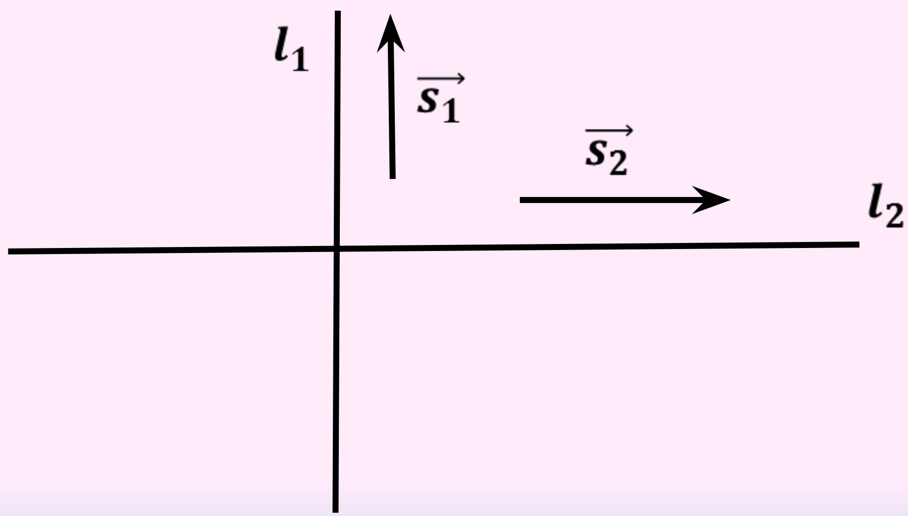


ВГУЭС

§ 5. Взаимное расположение прямых в пространстве

- Если $l_1 \perp l_2$, тогда $\overrightarrow{s_1} \perp \overrightarrow{s_2}$:

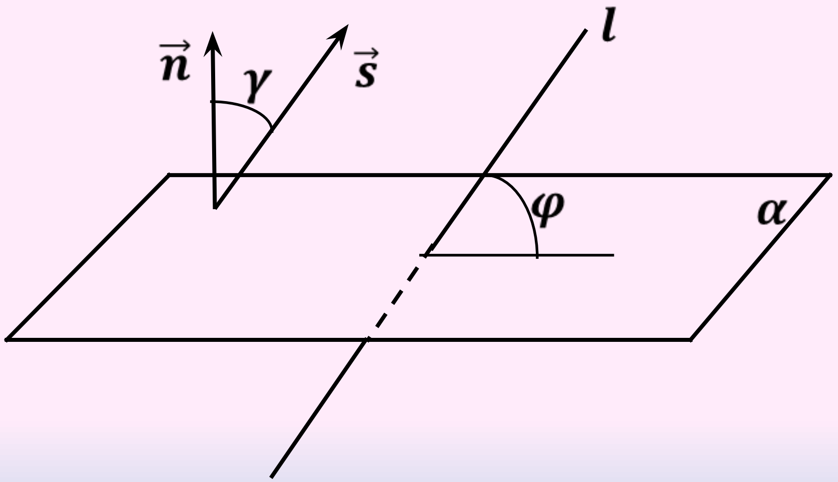
$\boldsymbol{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$ **– условие перпендикулярности двух прямых.**



§ 6. Прямая и плоскость в пространстве

Начало
Оглавление
Составитель

- Даны прямая $\boldsymbol{l}$: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ с направляющим вектором $\vec{s}(m;n;p)$ и плоскость $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ с нормалью $\vec{n}(A;B;C)$



Начало

Оглавление

Составитель

§ 6. Прямая и плоскость в пространстве

- $\varphi = (l \wedge \alpha)$, $\gamma = (\vec{s} \wedge \vec{n})$, $\varphi + \gamma = \frac{\pi}{2}$, тогда $\varphi = \frac{\pi}{2} \pm \gamma$, $\sin\varphi = |\cos\gamma|$, следовательно

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

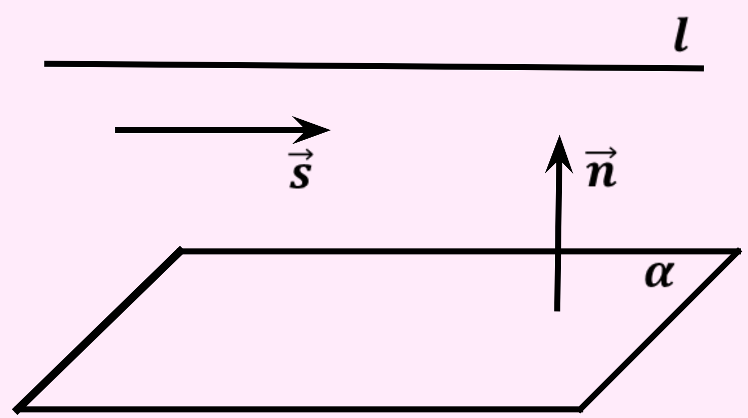
- синус угла между прямой и плоскостью

ВГУЭС

§ 6. Прямая и плоскость в пространстве

- Если $l \| \alpha$, $\vec{s} \perp \vec{n}$, тогда $\boldsymbol{Am + Bn + Cp = 0}$

условие параллельности прямой и плоскости



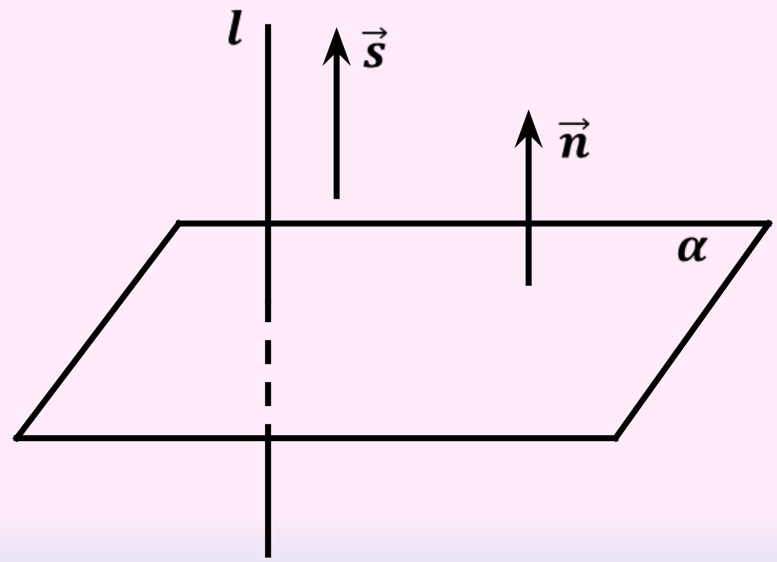
Начало

Оглавление

Составитель

§ 6. Прямая и плоскость в пространстве

- Если $l \perp \alpha$, $\vec{s} \| \vec{n}$, тогда $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ - **условие перпендикулярности прямой и плоскости.**



ВГУЭС