Лекция 10

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже знаем, при расчете статически неопределимых систем методом сил исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются силы (усилия) в этих связях.

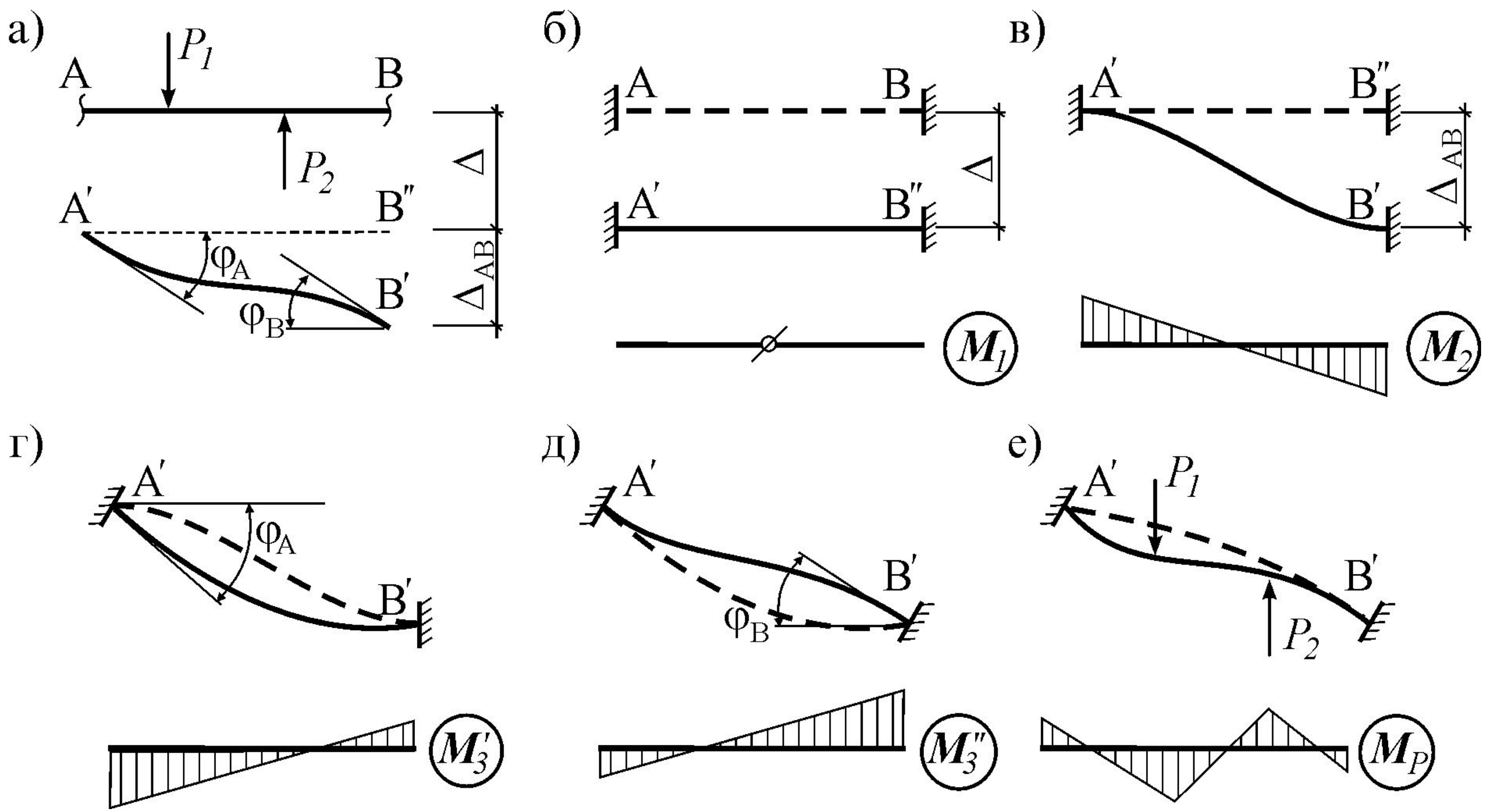
После их определения из канонических уравнений, определяются все остальные усилия, а также перемещения, напряжения и деформации, т.е. полное напряженно-деформированное состояние (НДС) системы.

НДС статически неопределимых систем можно устанавливать и по-другому. Для этого в систему вводятся дополнительные связи, а за неизвестные принимаются перемещения во введенных связях.

Такой метод называется ***методом перемещений***.

1. Неизвестные метода перемещений

Определим минимальное число узловых перемещений, необходимых для определения НДС стержневой системы. Для этого установим простейшие деформации стержня *AB* при его переходе в деформированное состояние *A'B'* (рис. а). Задача упрощается, если стержень закрепить по обоим концам.



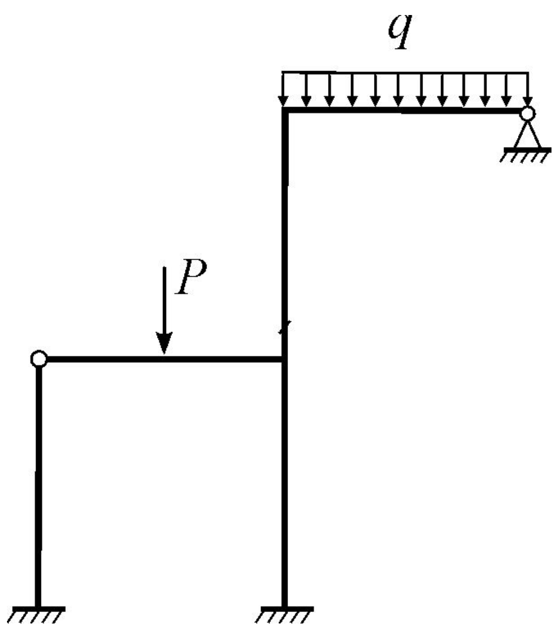
Из рисунков видно, что для того чтобы деформации закрепленного по концам стержня были такими же как у незакрепленного, его концам следует последовательно задавать поступательные перемещения Δ и Δ_{AB} (рис. б, в), угловые перемещения φ_A и φ_B (рис. г, д), а внутри стержня приложить внешнюю нагрузку (рис. е).

При этом от поступательного перемещения Δ всего стержня внутренние усилия не возникают (рис. б). Внутренние усилия от местной нагрузки, действующей в пределах закрепленного стержня можно найти отдельно.

Значит, для определения НДС стержня достаточно знать три неизвестных перемещения – два угловых перемещения его концов φ_A и φ_B и одно поступательное перемещение (взаимное смещение концов) стержня Δ_{AB}.

2. Выбор основной системы

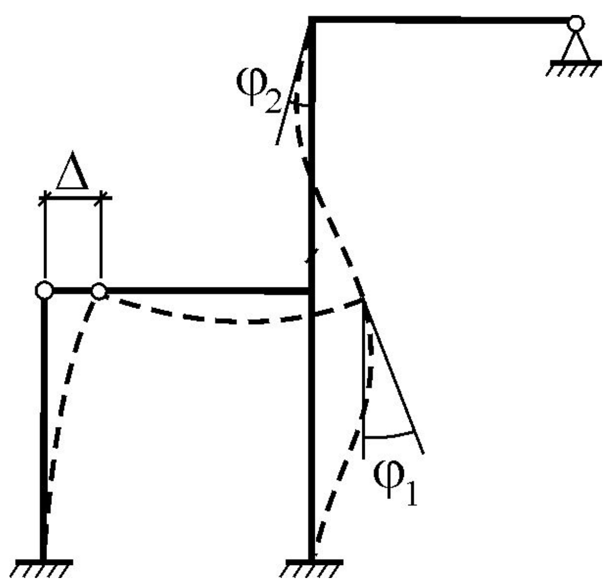
Для получения основной системы МП из ЗС следует ввести дополнительные связи, чтобы исключить перемещения концов ее стержней. Например, для рамы из пяти стержней их число будет равно *5·3=15*.



Это число можно уменьшить, если **примем гипотезы**:

1. Поперечные и продольные деформации стержней малы;
2. Длина хорды, соединяющей концы изогнутого стержня, равна первоначальной длине стержня;
3. В упругом рамном узле углы между стержнями сохраняются.

Тогда в рассмотренной раме достаточно будет знать только три перемещения – поступательное перемещение Δ и угловые перемещения φ_1 и φ_2:

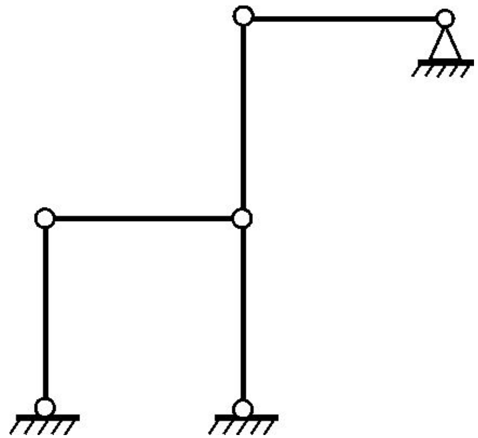


Таким образом, принятые гипотезы позволили уменьшить число неизвестных перемещений с 15 до 3.

Из 3-ей гипотезы (о том что углы между стержнями в упругом рамном узле сохраняются) следует, что число неизвестных угловых перемещений будет определяться по формуле:

$n_{угл}$ = ***числу упругих рамных узлов.***

Для определения числа неизвестных поступательных (линейных) перемещений во все узлы рамы, включая и опоры, нужно ввести шарниры:



Тогда число линейных перемещений можно определить по известной формуле кинематического анализа для фермы:

$$n_{лин} = W = 2n_{У} - n_C - n_{C_0}\,.$$

Например, в рассматриваемой раме $n_{лин} = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1.$

Общее число всех неизвестных определяется по формуле

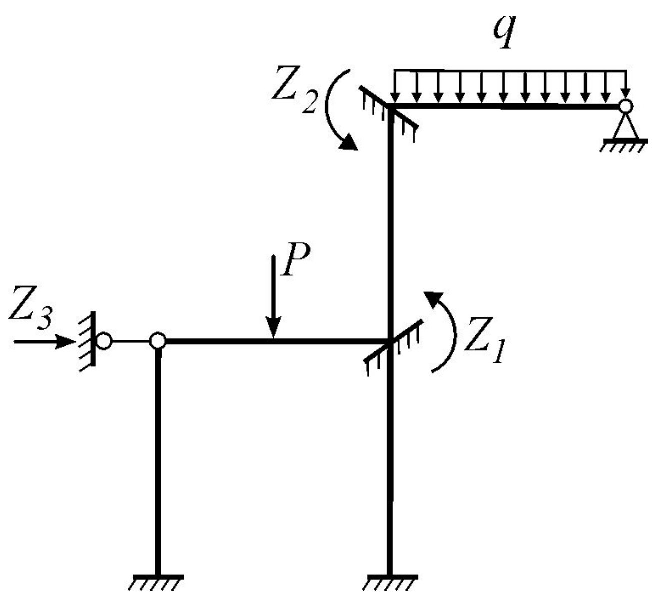
$$n = n_{угл} + n_{лин}\ .$$

Оно называется ***степенью кинематической неопределимости***.

Неизвестные перемещения обозначаются $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

После определения числа неизвестных, в ЗС вводятся столько же связей для исключения перемещений концов ее стержней.

Например, в рассмотренную раму вводятся две заделки и одна опорная связь:



Полученная схема называется ***основной системой*** (***ОС***) метода перемещений.

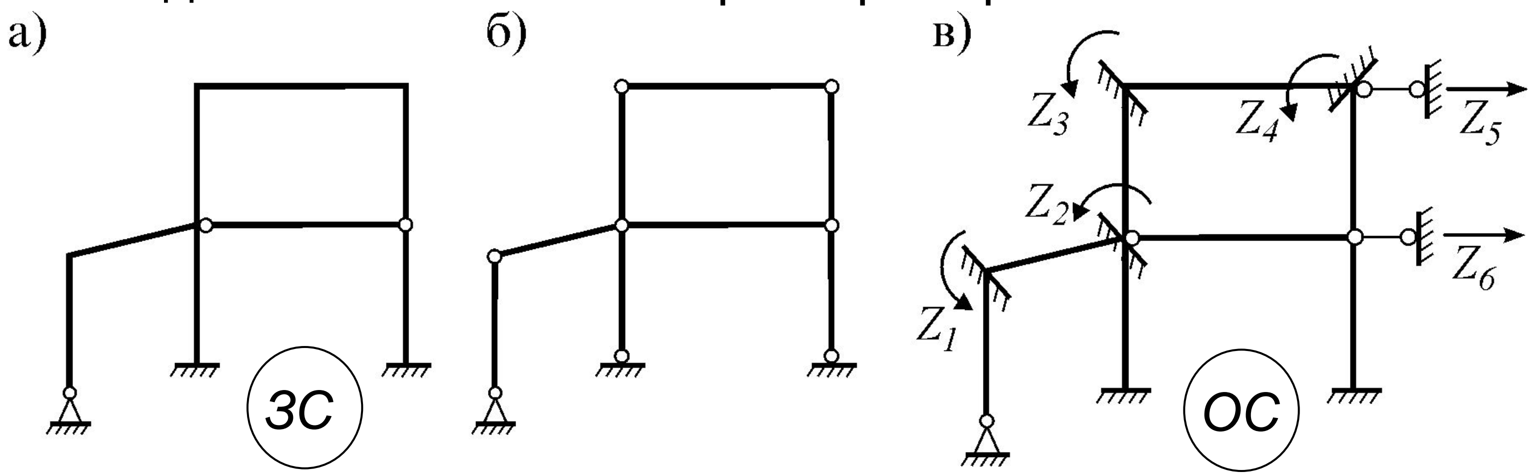
Для получения ОС метода перемещений необходимо:

– в упругие рамные узлы ЗС ввести $n_{угл}$ заделок;

– по направлениям линейных перемещений узлов ввести $n_{лин}$ связей (для того чтобы система с введенными шарнирами стала ГНС).

Введенные связи внешне похожи на обычные опорные связи, но от них принципиально отличаются т.к.: 1) введенная заделка исключает лишь угловое перемещение узла, оставляя возможность его линейного смещения; 2) введенная опорная связь исключает только линейное перемещение узла, оставляя возможность его поворота.

При соблюдении этих требований ОС метода перемещений является единственной. Рассмотрим пример:



$n_{угл}=4.$ $\quad n_{лин}=2 \cdot 8-8-6=2.$ $\quad n=n_{угл}+n_{лин}=4+2=6.$

3. Сущность метода перемещений

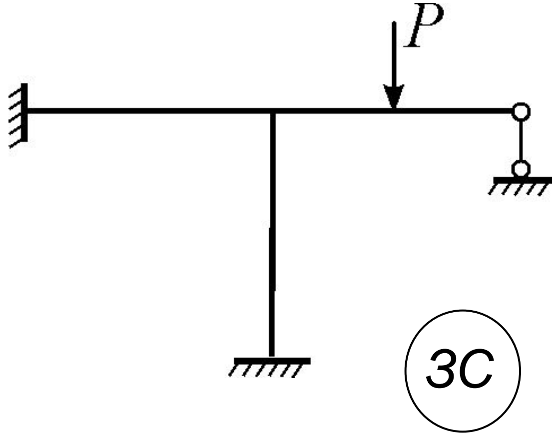
Рассмотрим статически неопределимую раму.

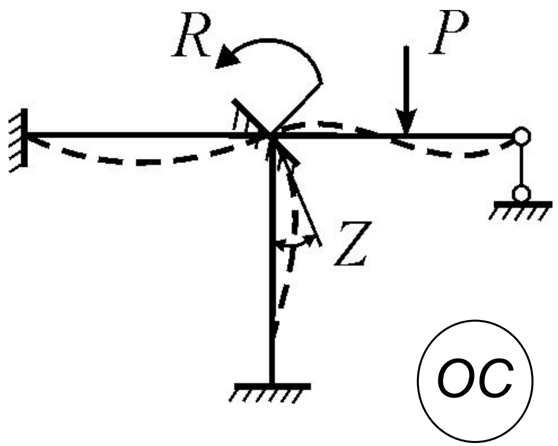
При ее расчете МС нужно исключать четыре лишние связи и выбирать основную систему по МС с четырьмя неизвестными.

При расчете рамы МП имеем:

$n = n_{угл} + n_{лин} = 1 + 0 = 1.$

Выберем основную систему, вводя заделку в упругом узле:



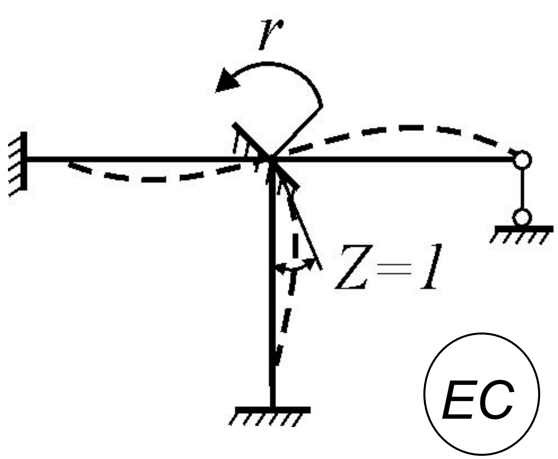


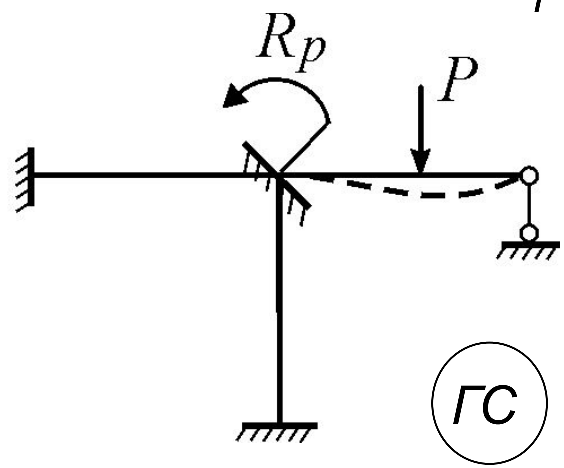
Потребуем, чтобы усилия в ОС были как в ЗС, т.е. ***R=0***. *А* реакцию *R* определим рассматривая единичное и грузовое состояния основной системы.

В единичном состоянии введенной связи зададим единичное перемещение *Z=1* и определим возникающую в ней реакцию *r.*

Эта реакция от единичного перемещения называется ***жесткостью***.

В грузовом состоянии приложим только внешнюю нагрузку и во введенной связи основной системы определим реакцию R_P :





С учетом упругости системы и принципа суперпозиции, наше уравнение приводится к виду

$$r \cdot Z + R_P = 0.$$

Оно называется ***каноническим уравнением метода перемещений***.

Если известны реакции *r* и R_P, то из него можно найти величину узлового перемещения:

$$Z = -R_P / r.$$

Если степень кинематической неопределимости стержневой системы равна n, ее ОС получается введением n дополнительных связей с неизвестными Z_1, Z_2, …, Z_n.

Чтобы ОС была эквивалентна ЗС, реакции во введенных связях должны равняться нулю. С учетом этого можно записать n уравнений.

После рассмотрения n единичных состояний и одного грузового состояния и дальнейшего определения реакций (реактивных усилий) во всех состояниях, эти n уравнений приводятся к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0,\\
&r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0,\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0.
\end{aligned}
$$

Все вместе они называются ***системой канонических уравнений метода перемещений***. Здесь r_{ii} – главные коэффициенты, r_{ij} – боковые коэффициенты. Свободные члены R_{iP} назывются грузовыми коэффициентами.

После введения матриц и векторов

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ddots & r_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_\mathrm{n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} R_{1\mathrm{P}} \\ R_{2\mathrm{P}} \\ \vdots \\ R_{\mathrm{nP}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

система канонических уравнений записывается в матричной форме:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_\mathrm{P} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{r}$ – матрица жесткости, $\mathbf{Z}$ – вектор неизвестных, $\mathbf{R}_\mathrm{P}$ – вектор нагрузки, $\mathbf{0}$ – нуль-вектор. Из них определяется вектор неизвестных:

$$\mathbf{Z} = -\,\mathbf{r}^{-1}\,\mathbf{R}_\mathrm{P},$$

где $\mathbf{r}^{-1}$ – обратная матица жесткости.