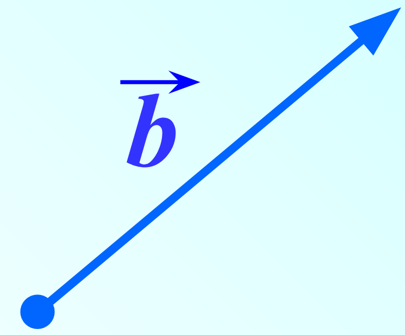
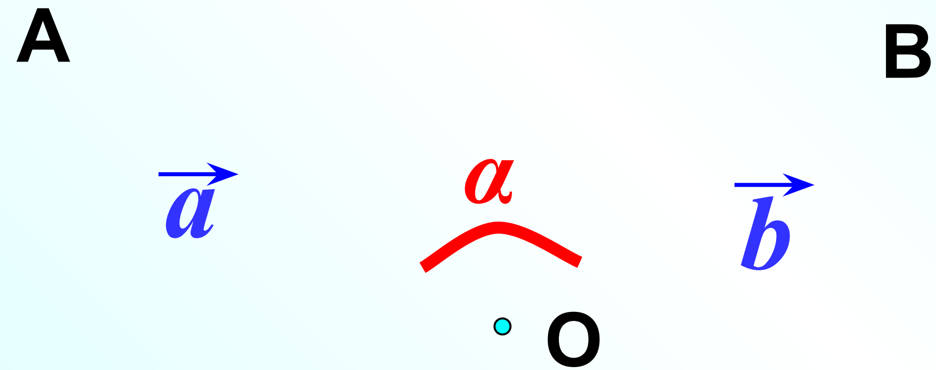
Скалярное произведение векторов

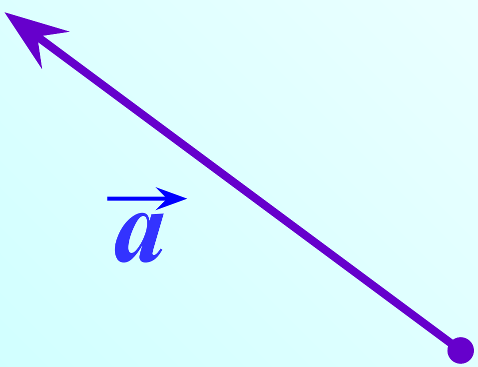
Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

Угол между векторами





$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \alpha$

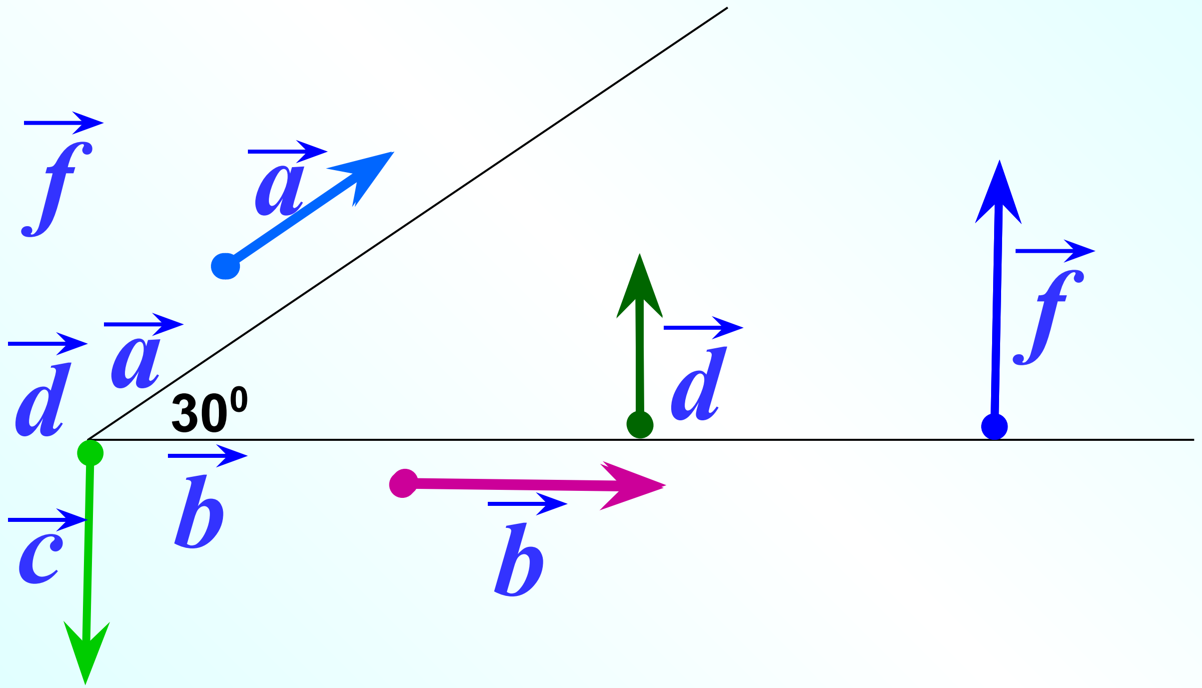


Лучи ОА и ОВ образуют угол АОВ.

Градусную меру этого угла обозначим буквой α

Угол между векторами $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **равен** α

Найти углы между векторами.



$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$

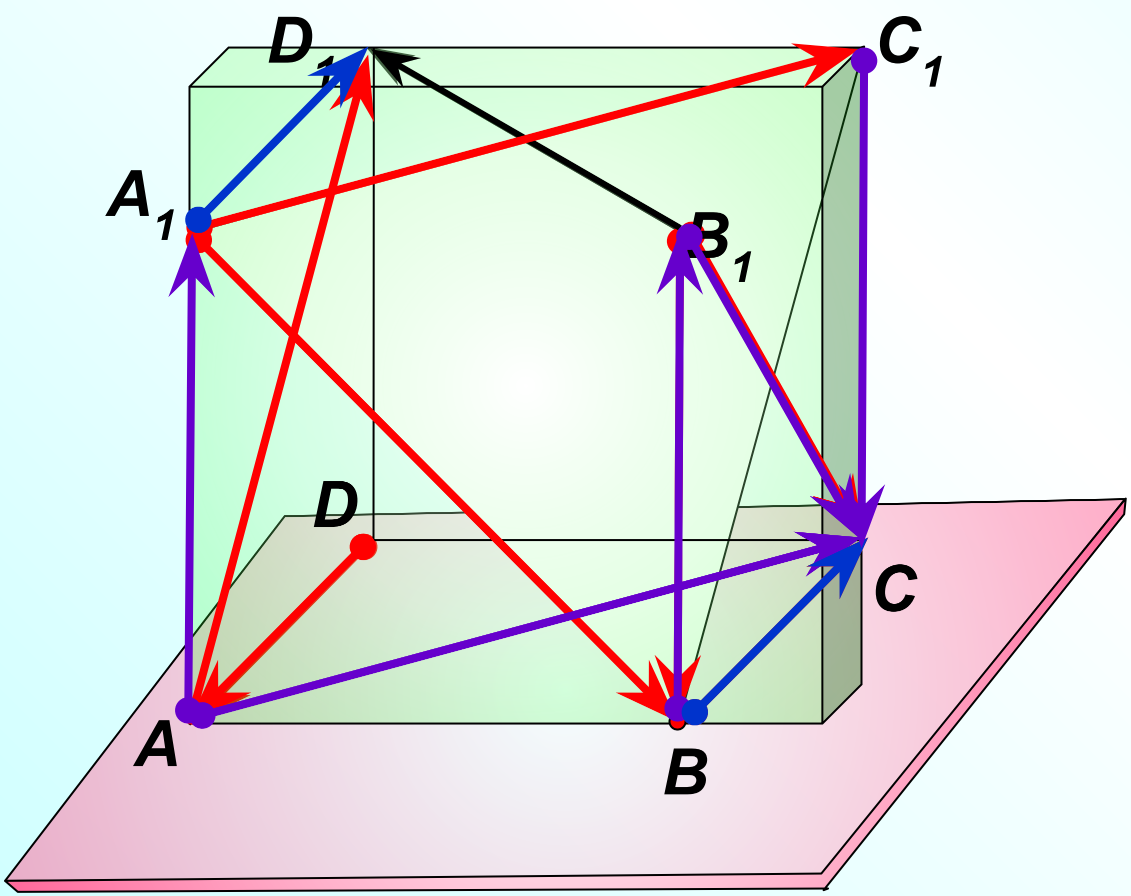
$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90^0.

$\vec{b} \perp \vec{c}$ $\vec{b} \perp \vec{d}$ $\vec{b} \perp \vec{f}$

№ 441 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
Найдите угол между векторами.



$\widehat{\overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{B_1C}} = 45^0$

$\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{B_1D_1}} = 135^0$

$\widehat{\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B}} = 60^0$

$\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}} = 45^0$

$\widehat{\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AD_1}} = 90^0$

$\widehat{\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}} = 90^0$

$\widehat{\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{BC}} = 0^0$

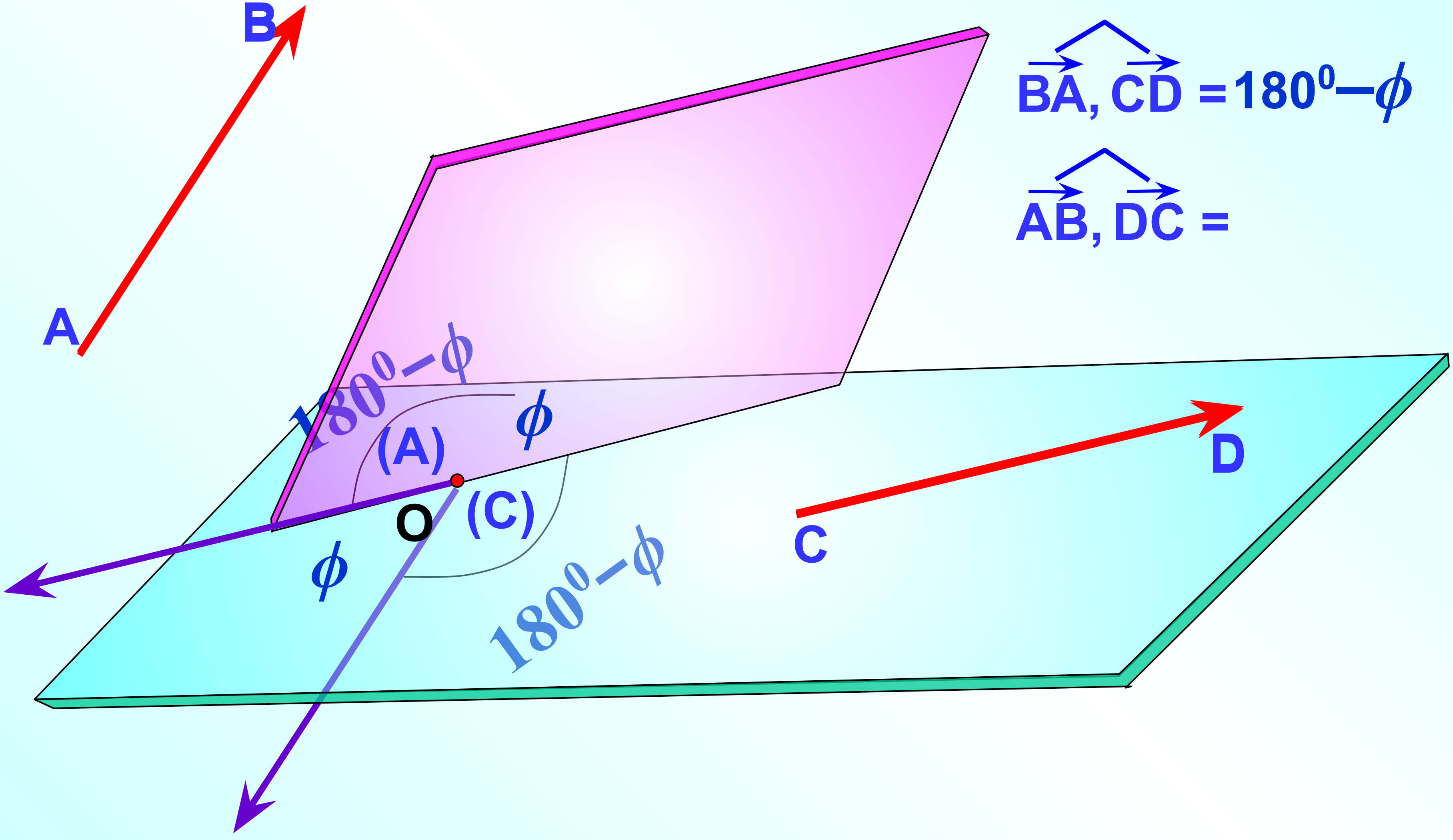
$\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1C}} = 180^0$

№ 442 Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен ϕ. Найдите углы между векторами

$\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}} = \phi$

$\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}} = 180^0 - \phi$

$\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}} =$



Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

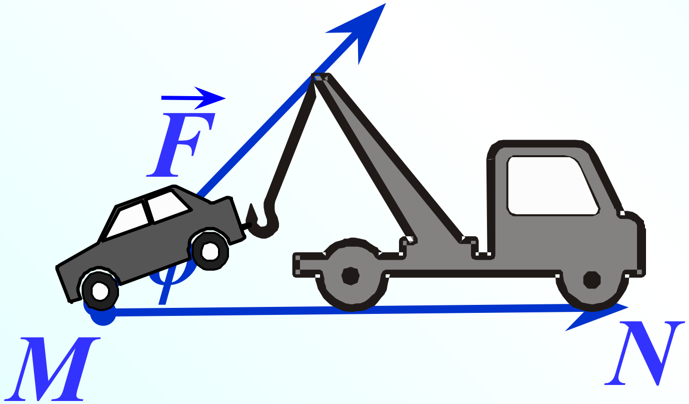
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.

Ввел в 1845г. У. Гамильтон, английский математик.

Скалярное произведение в физике



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа $\mathbf{A}$ постоянной силы $\vec{\mathbf{F}}$ при перемещении тела из точки $\mathbf{M}$ в точку $\mathbf{N}$ равна произведению силы $\vec{\mathbf{F}}$ и перемещения $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ на косинус угла между ними.

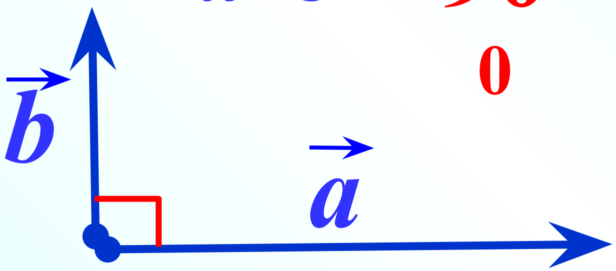
$$\mathbf{A} = |\vec{\mathbf{F}}| \cdot |\overrightarrow{\mathbf{MN}}| \cos\phi$$

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{MN}}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ = 90 0

0

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^0 = 0$



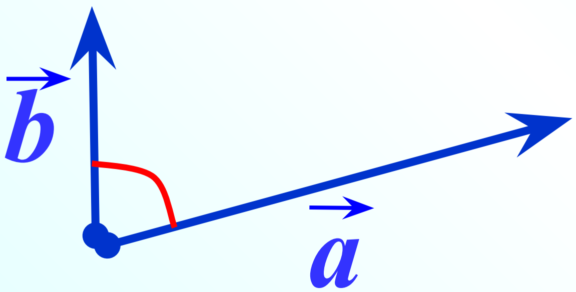
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$



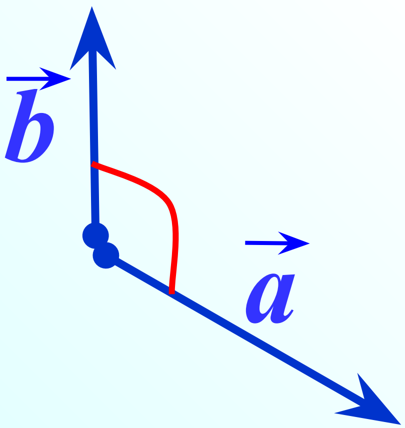
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$

> 0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

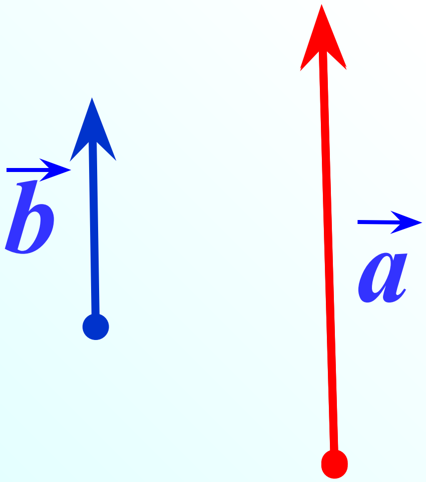
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^{0}$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^{0}$$

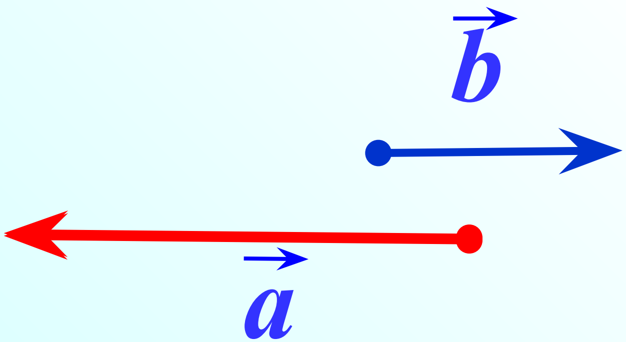


Если $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$

$\widehat{\vec a\,\vec b} = 0^0$

1

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b| \cos 0^0 = |\vec a|\cdot|\vec b|$$



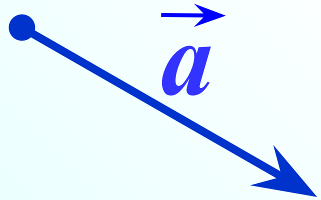
Если $\vec a \downarrow\uparrow \vec b$

$\widehat{\vec a\,\vec b} = 180^0$

-1

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b| \cos 180^0 = -|\vec a|\cdot|\vec b|$$

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\underbrace{\cos 0^0}_{1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

№ 443 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите скалярное произведение векторов

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$

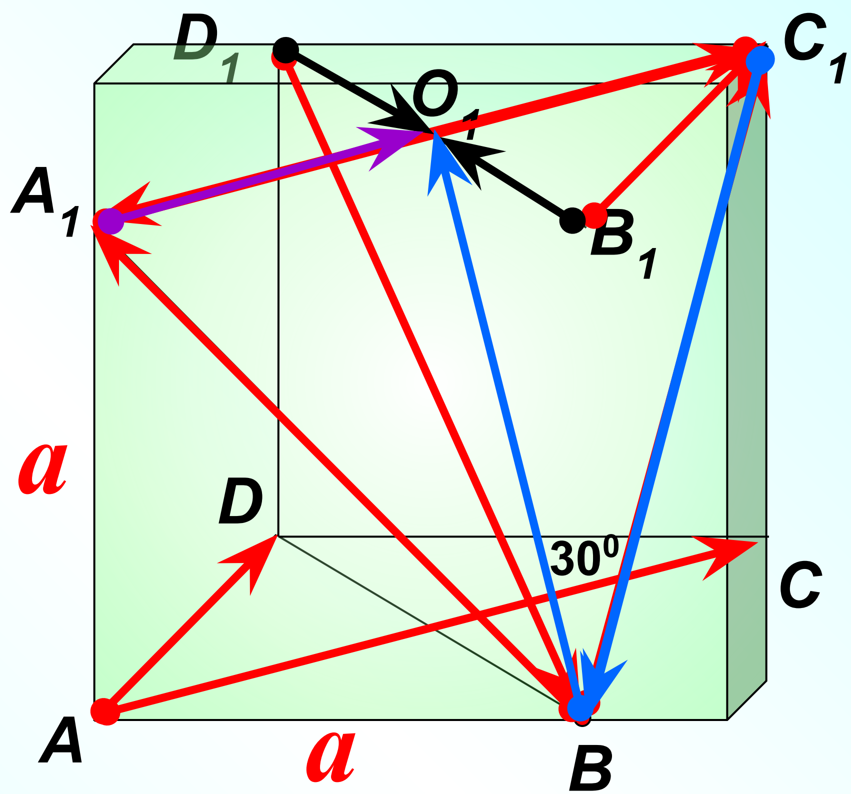
$\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

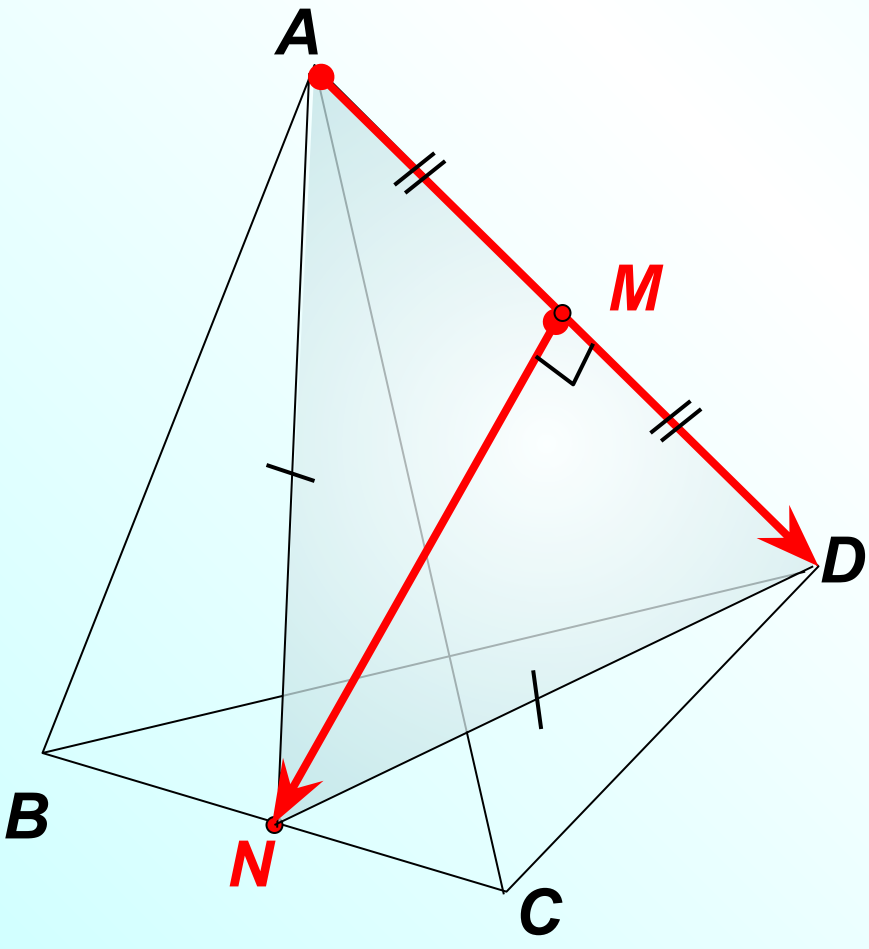
$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$

$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

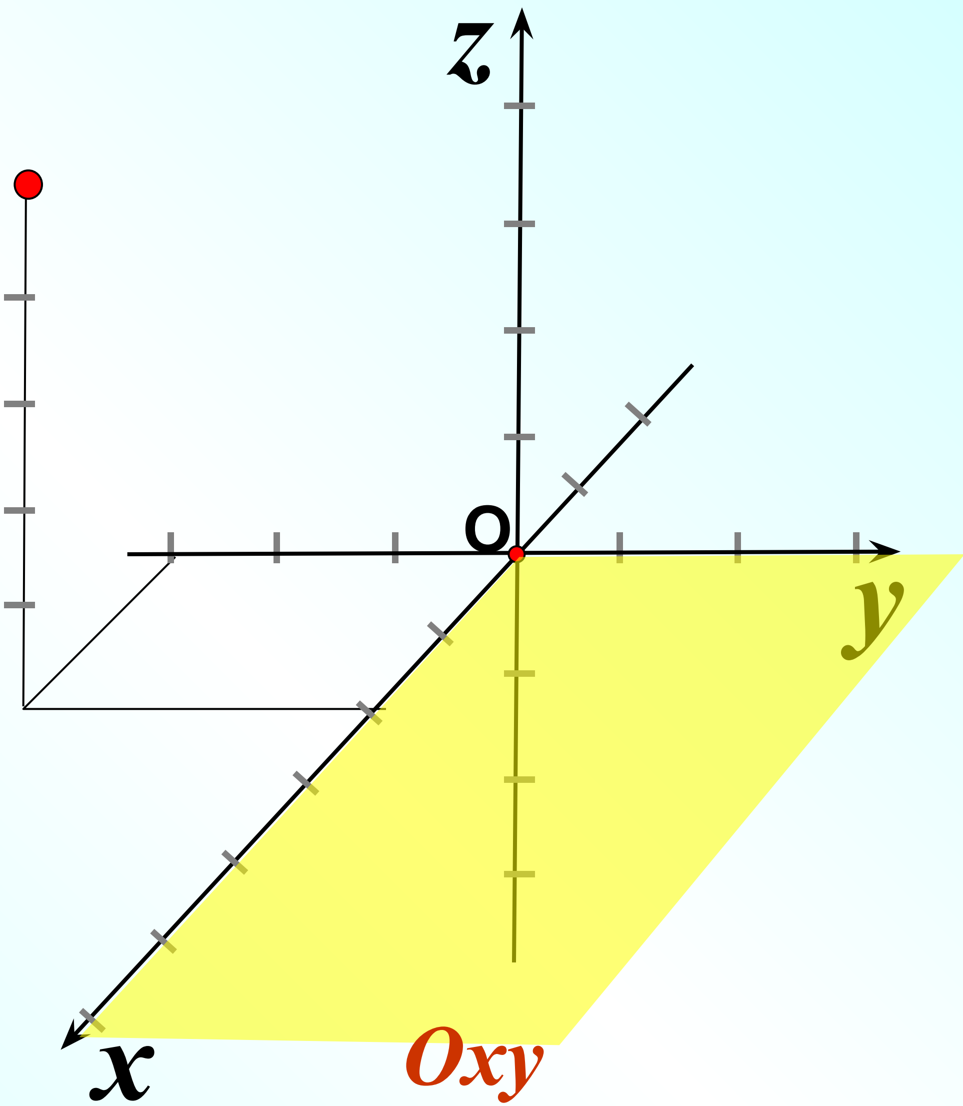


Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



Маленький тест

На каком расстоянии от плоскости xOy находится точка А(2; -3; 5)



1 2 ПОДУМАЙ!

2 5 ВЕРНО!

3 3 ПОДУМАЙ!

Проверка

На каком расстоянии от начала координат находится точка А(-3; 4; 0)

ВЕРНО!

1 5;

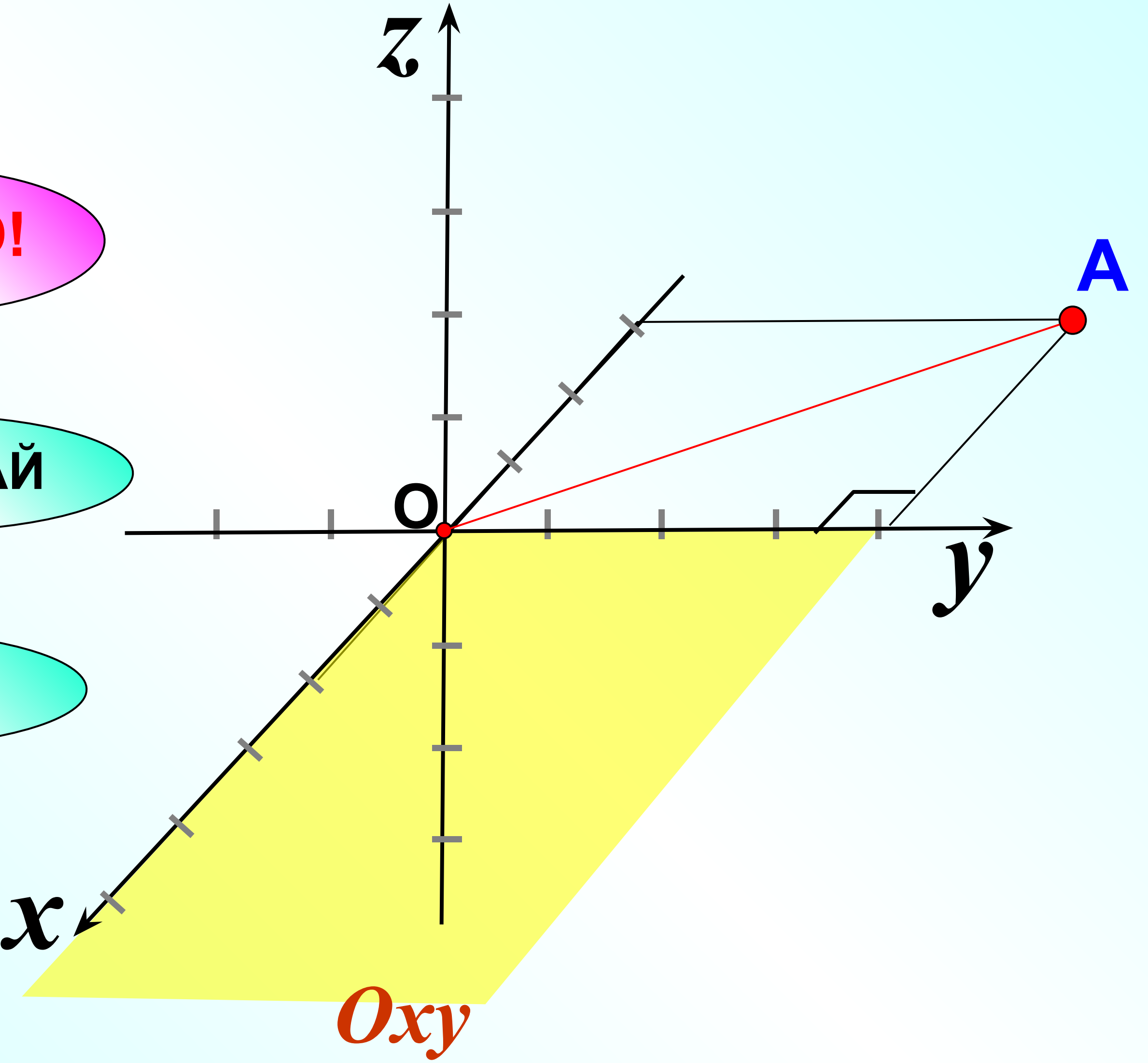
ПОДУМАЙ!

2 4;

ПОДУМАЙ!

3 3.

Проверка



Найти координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты $A(-3;\ 2;-4)$ и $B(1;-4;\ 2)$

$$C\left(\frac{-3+1}{2};\ \frac{2+(-4)}{2};\ \frac{-4+2}{2}\right)$$

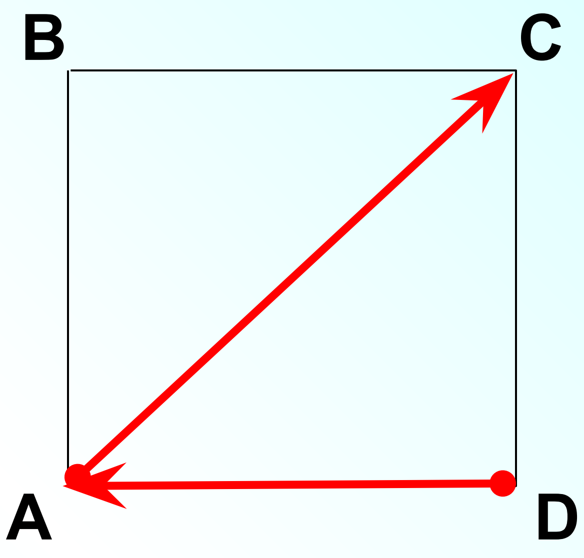
1 C(-2; 1;-1) ПОДУМАЙ!

2 C(-1;-1;-1) ВЕРНО!

3 C(-2;-2;-2) ПОДУМАЙ!

Проверка

Дан квадрат ABCD.
Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DA}$.



1 135^0;

ВЕРНО!

2 45^0;

ПОДУМАЙ!

3 90^0.

ПОДУМАЙ!

Проверка

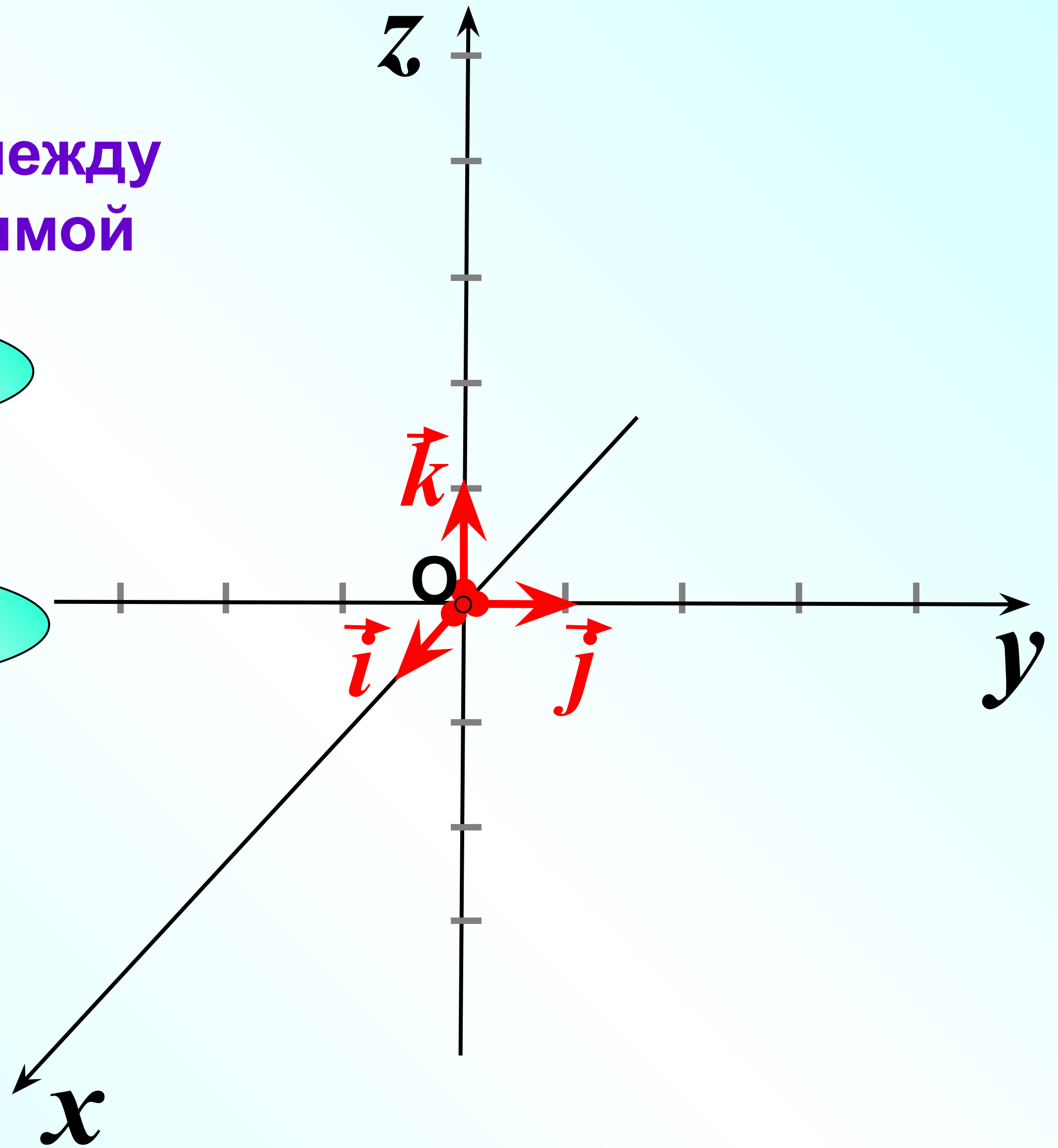
Скалярное произведение координатных векторов

$\vec{k}$ и $\vec{j}$:

равно нулю, т.к. угол между векторами прямой

1	1	ПОДУМАЙ!
2	– 1	ПОДУМАЙ!
3	0	ВЕРНО!

Проверка



Скалярный квадрат вектора $7\vec{i}$ равен:

ВЕРНО!

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

1 **49**

$$(7\vec{i})^2 = |7\vec{i}|^2 = 7^2 = 49$$

2 **7** ПОДУМАЙ!

3 **1** ПОДУМАЙ!

Проверка

Записать координаты вектора $\vec{n} = -8\vec{j} + \vec{i}$

1 $\vec{n}\ \{-8; 1; 0\}$

ПОДУМАЙ!

2 $\vec{n}\ \{1; -8; 0\}$

ВЕРНО!

3 $\vec{n}\ \{1; 0; -8\}$

ПОДУМАЙ!

Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = -15, \quad |\vec{m}| = 5, \quad |\vec{n}| = 6.$$

ПОДУМАЙ!

1 50^0

ПОДУМАЙ!

2 60^0

ВЕРНО!

3 120^0

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами тупой

Проверка

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро которого равно 1.

Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$.

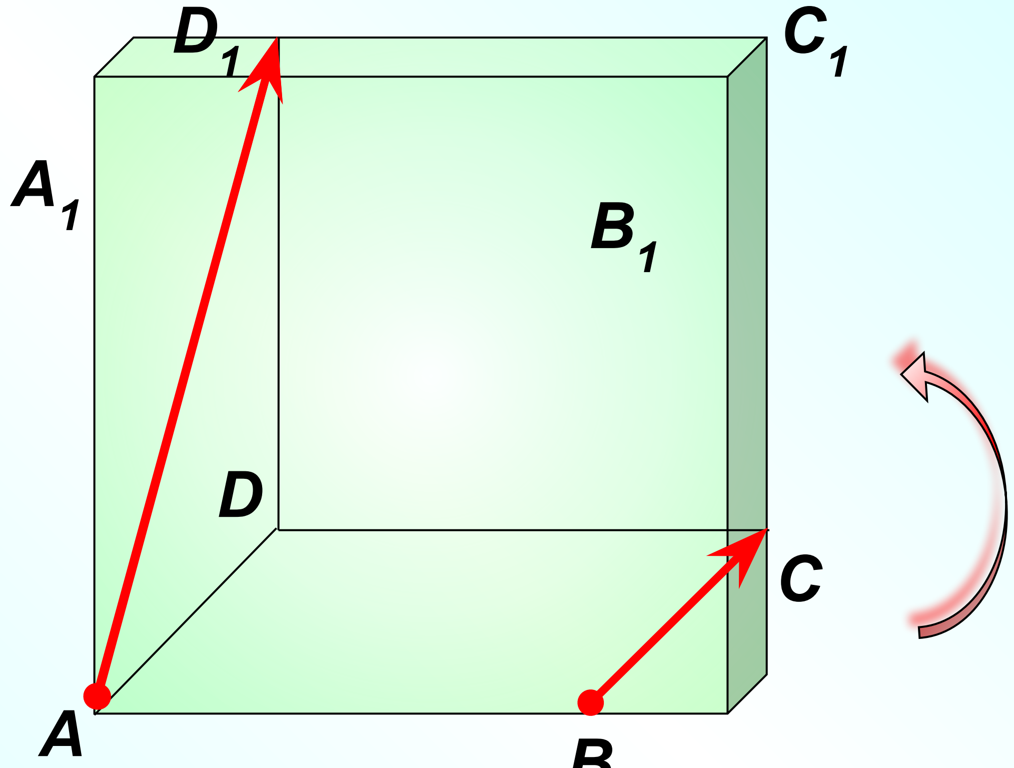
$$\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BC_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cos 45^0 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

1 4; **ПОДУМАЙ!**

2 2; **ПОДУМАЙ!**

3 1. **ВЕРНО!**

Проверка (3)



Скалярное произведение векторов

$\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

выражается формулой

Пример Найдите скалярное произведение векторов

$$\vec{b}\,\{-2;\ 1;-7\} \qquad \vec{d}\,\{\ 5;\ 4;-3\}$$

$$\cdot \quad + \quad \cdot \quad + (\quad)\cdot(\quad) = 15$$

№ 444 Даны векторы

$\vec{a}\{1; -1; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$, $\vec{c}\{5; 6; 2\}$

Вычислить

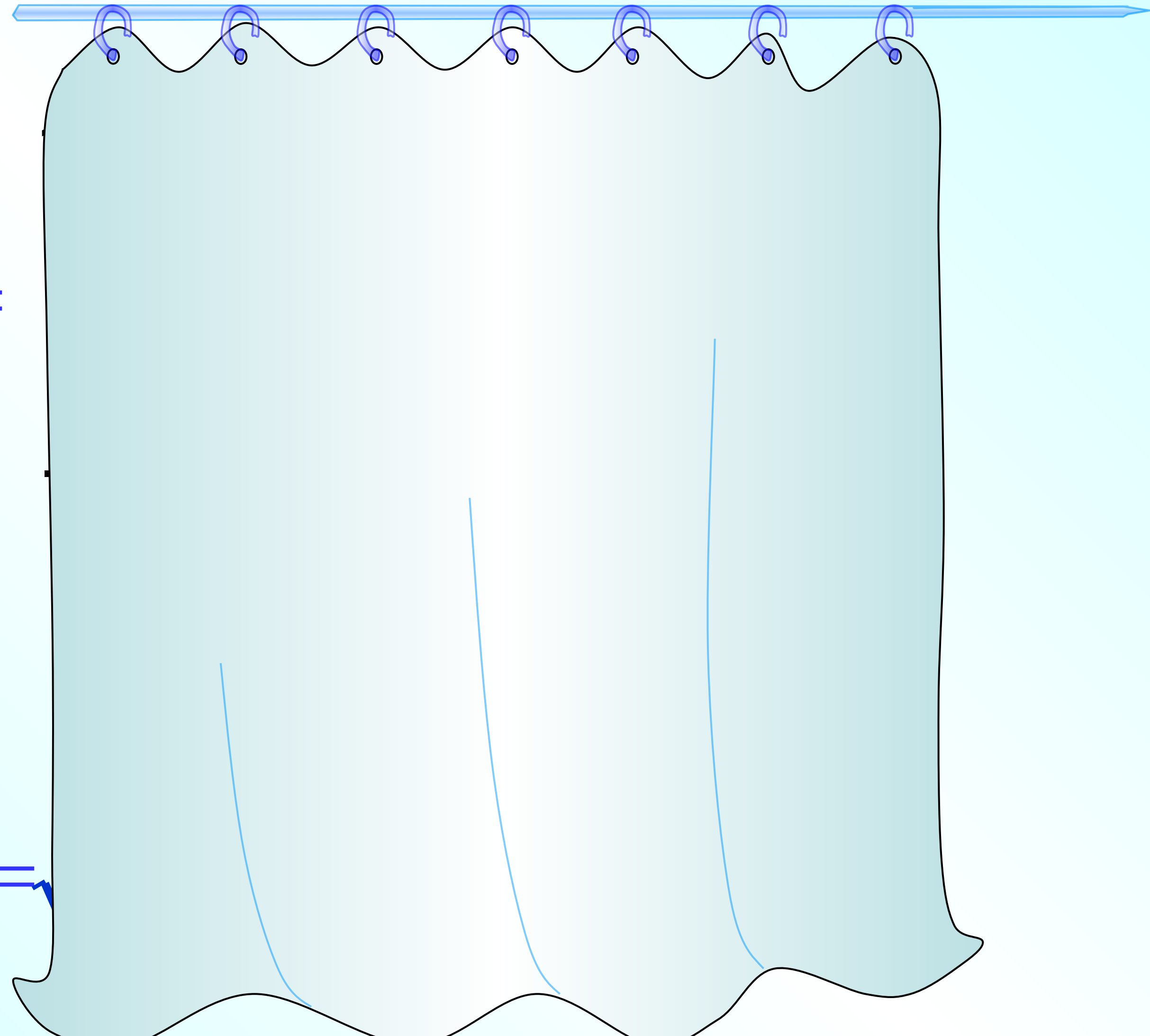
$\vec{a}\cdot\vec{c}=$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=$

$\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=$



Скалярное произведение векторов

Через длины векторов и угол между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

в координатах

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$\vec{a}\ \{3;\ -4;\ 2\},\ \vec{b}\ \{-2;\ 1;\ 3\},\ \vec{c}\ \{-2; -1{,}5;\ 0\}$

Найдите

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -4$ *тупой*

$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1{,}5) + 3 \cdot 0 = 2{,}5$ *острый*

$\vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1{,}5) + 2 \cdot 0 = 0$ *прямой*

Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Доказательство:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\qquad}{\quad\cdot\quad}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

1 $\vec{a}^2 \geq 0$ причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *Переместительный закон*

3 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ *Распределительный закон*

4 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *Сочетательный закон*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Распределительный закон

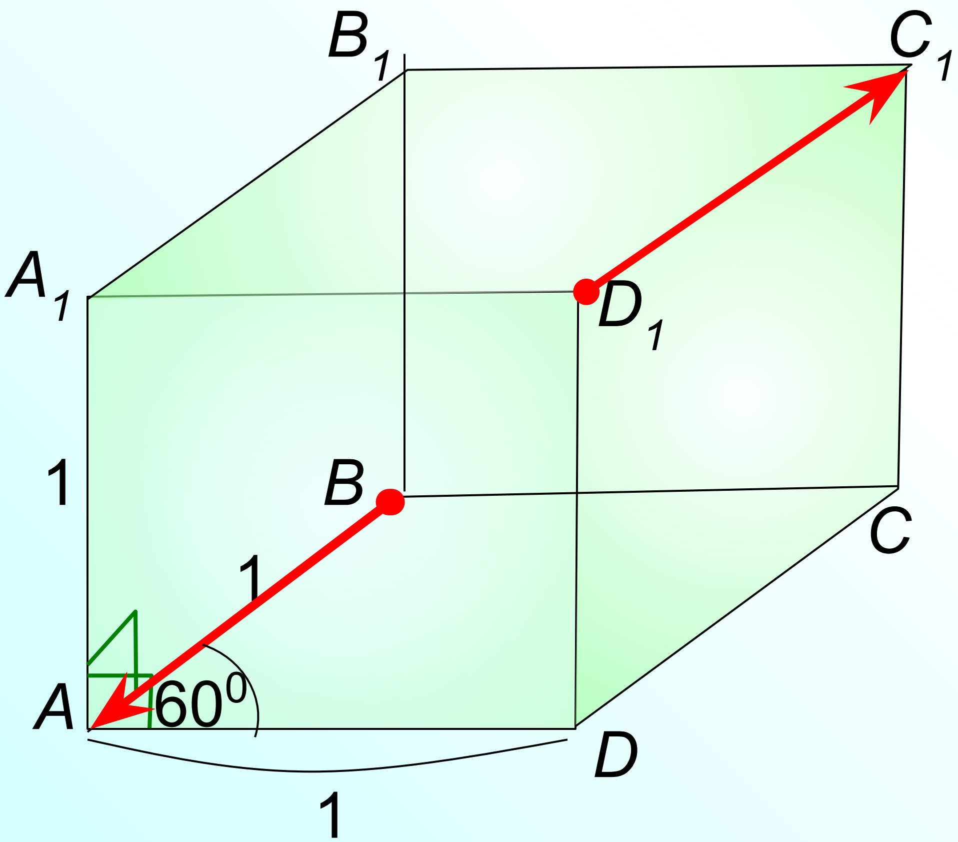
имеет место для любого числа слагаемых.

Например,

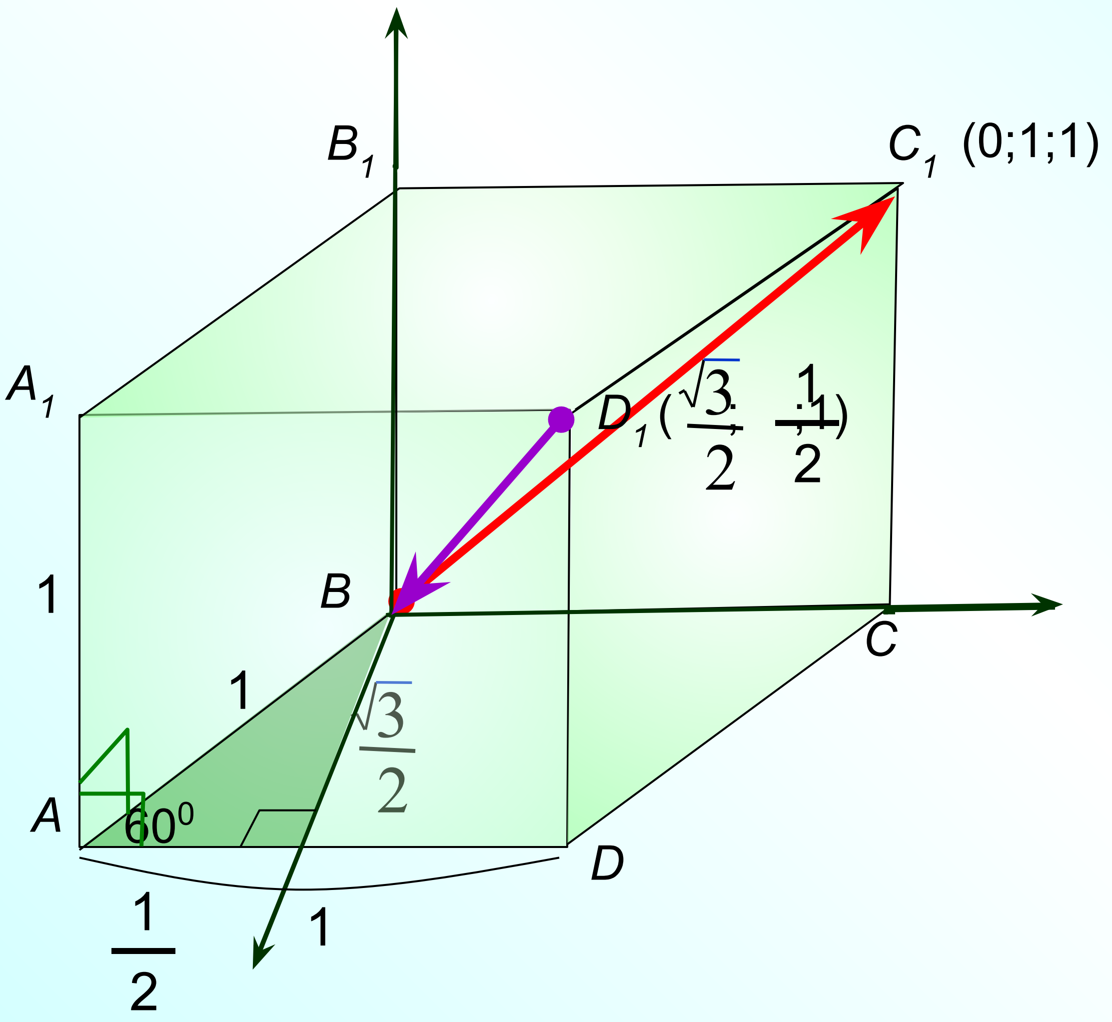
$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d}$$

№ 462. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AA_1=AB=AD=1$, $\angle DAB = 60^0$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 90^0$

а) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{D_1C_1} = 1 \cdot 1 \cos 180^0$



№ 462. б) $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{D_1B}$



$\overrightarrow{BC_1}\{0;1;1\}$

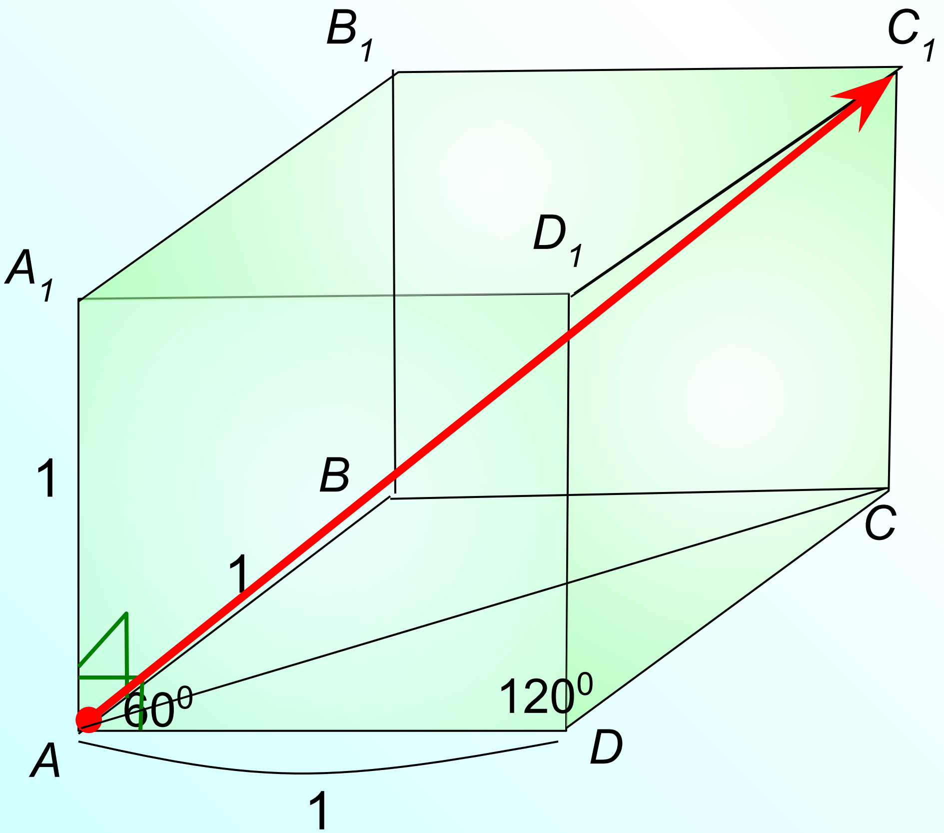
$\overrightarrow{D_1B}\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -1\}$

№ 462. в) $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 2 \cdot 2\cos 0^0$

1 способ

$$\text{из } \Delta ACD: \ AC = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1\cos 120^0}$$

$$AC = \sqrt{3}$$



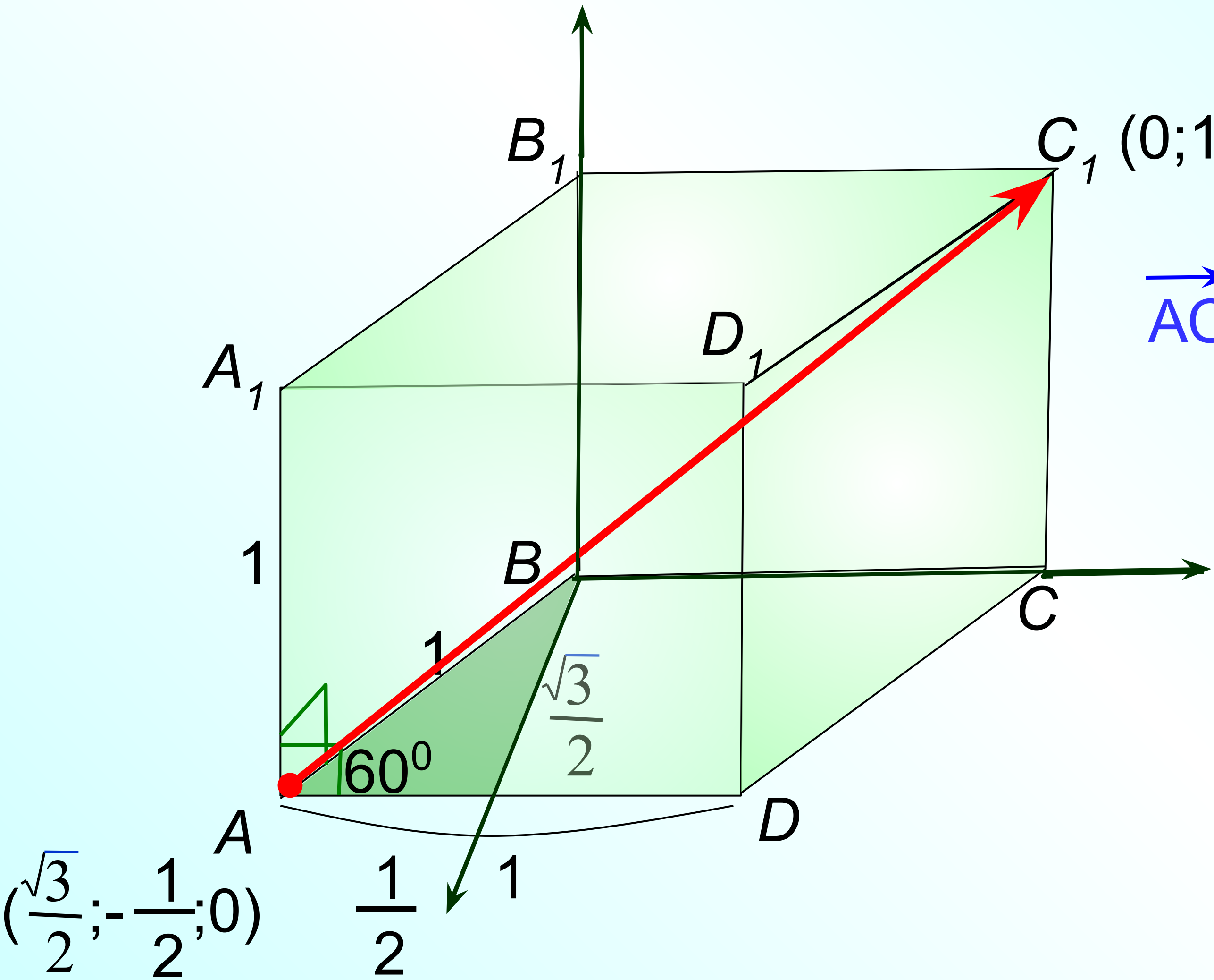
$$\text{из } \Delta ACC_1:$$

$$AC_1 = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$AC_1 = 2$$

№ 462. в) $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}$

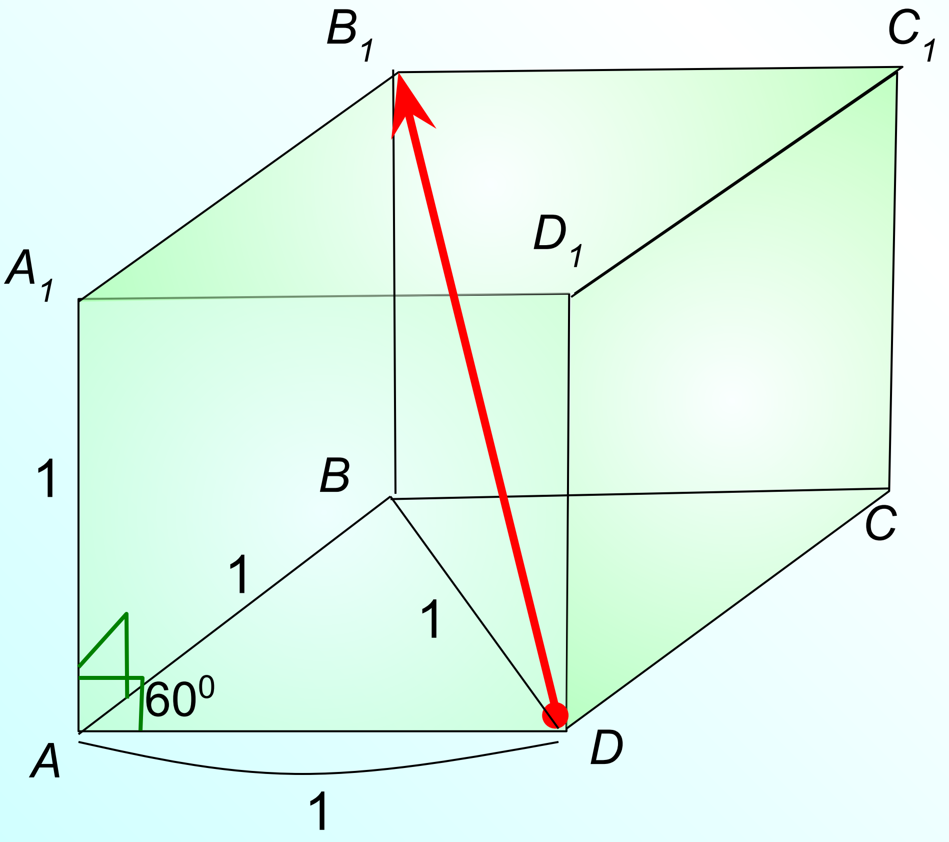
2 способ



$\overrightarrow{AC_1}\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1\}$

№ 462.   г) $|\overrightarrow{DB_1}|$

$$из\ \Delta ABD:\ BD = 1$$

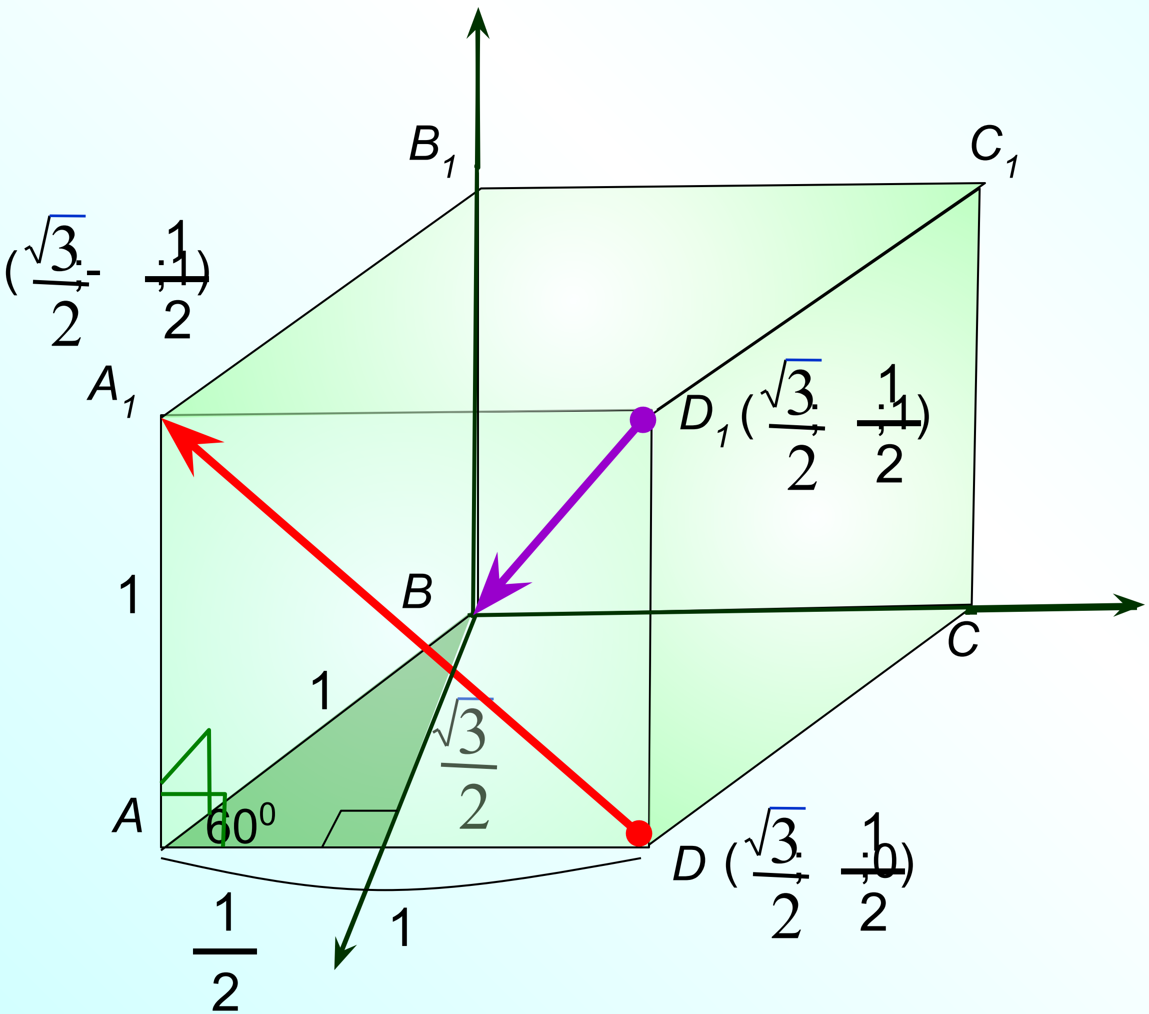


$$из\ \Delta DBB_1:$$

$$DB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$DB_1 = \sqrt{2}$$

№ 462. е) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{D_1B}})$

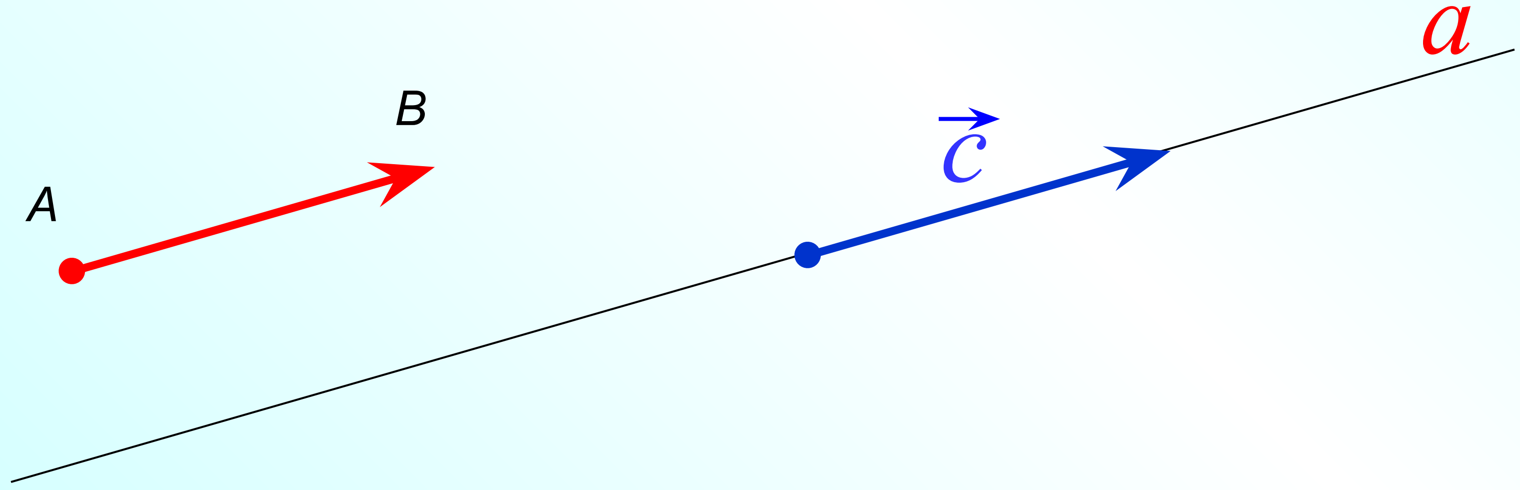


$\overrightarrow{D_1B}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right\}$

$\overrightarrow{DA_1}\{0; -1; 1\}$

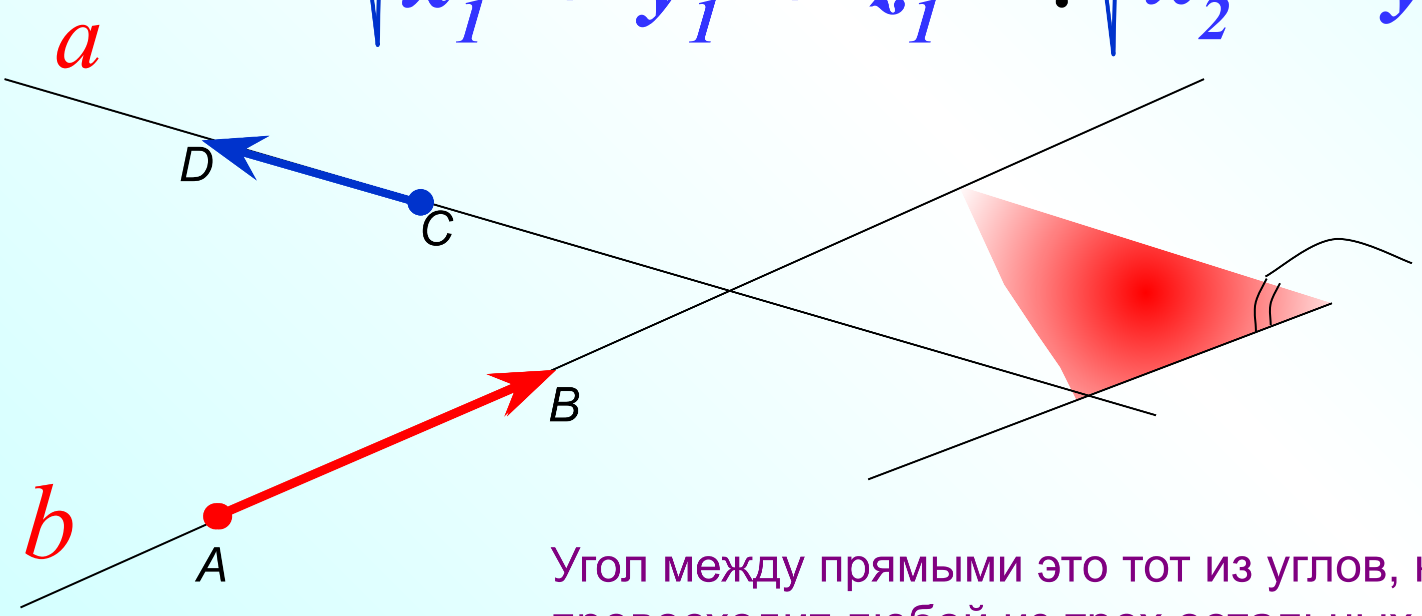
Применение скалярного произведения для вычисления угла между прямыми/

Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой a, если он лежит либо на прямой a, либо на прямой, параллельной a.



1. Направляющий вектор для прямой a .
2. Направляющий вектор для прямой b.
3. Вычислить cos ϕ
4. ϕ

$$\cos\alpha = \frac{\left| x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Угол между прямыми это тот из углов, который не превосходит любой из трех остальных углов!

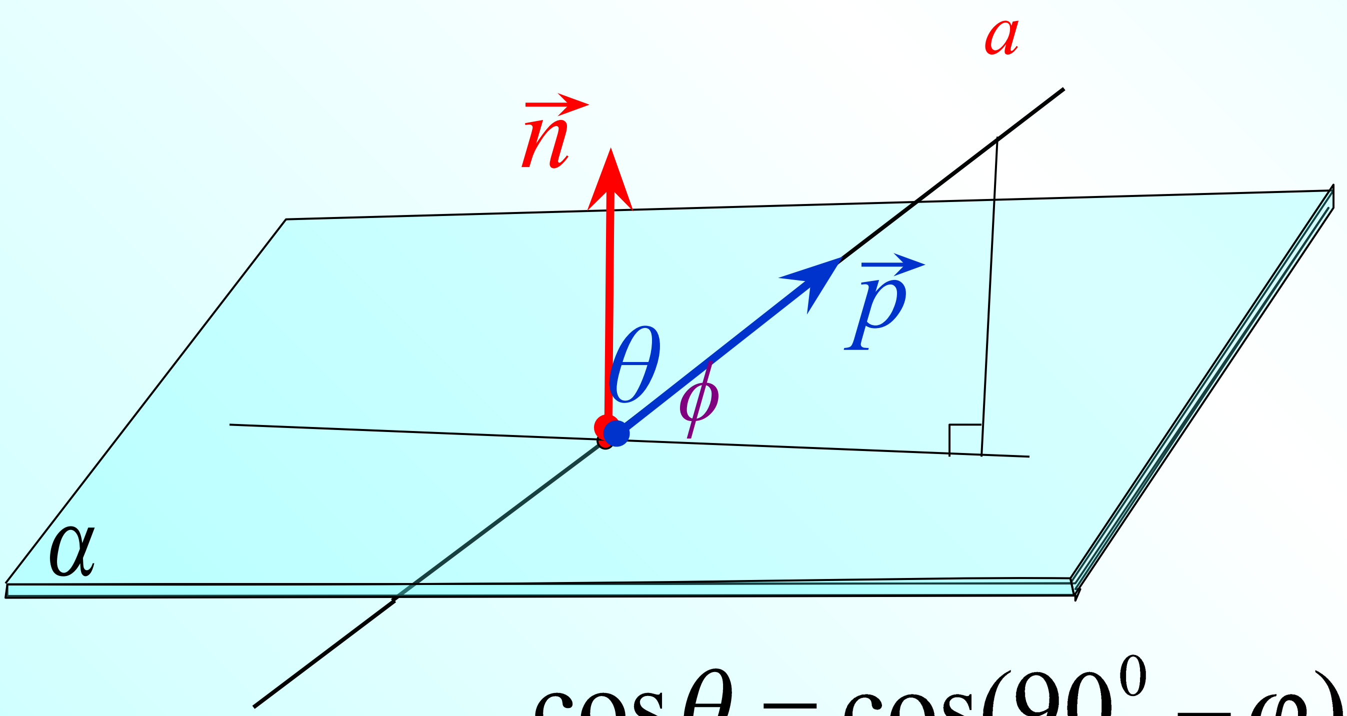
Применение скалярного произведения для вычисления угла между прямой и плоскостью.

Направляющий вектор для прямой a .

Вектор, перпендикулярный к плоскости α .

ϕ - искомый угол между прямой и плоскостью

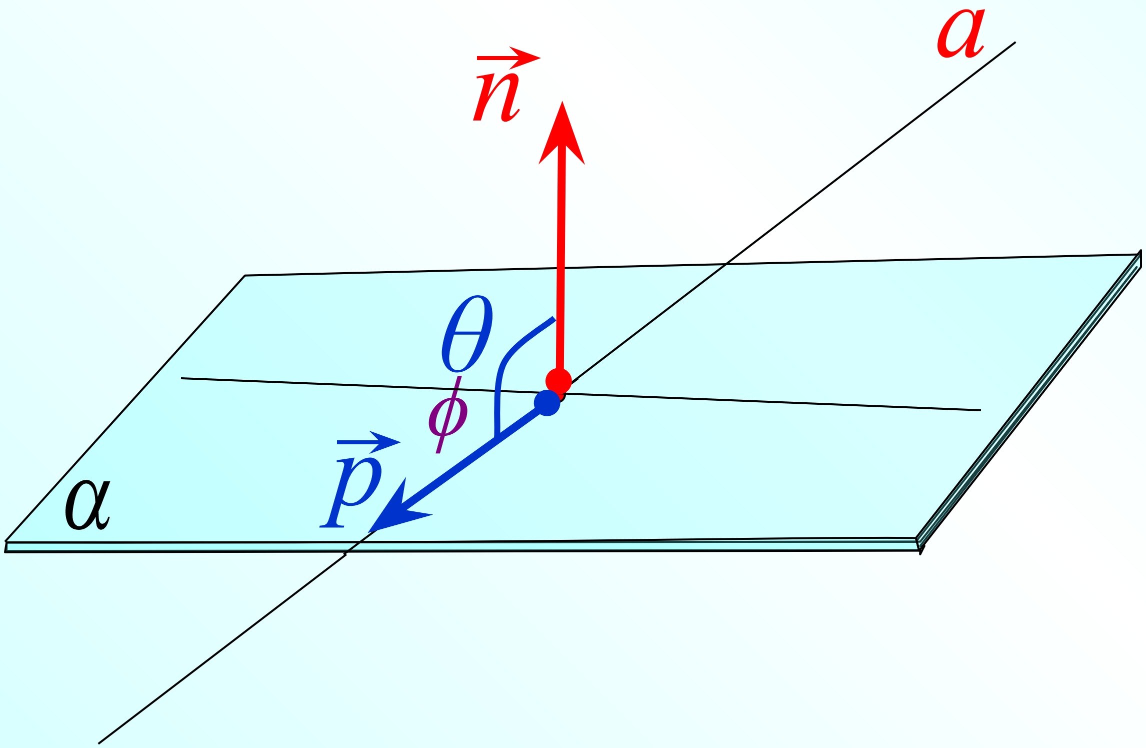
θ - угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{n}$



$$\cos\theta = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi$$

$$\underset{\text{тупой}}{\cos\theta} = \cos(90^0 + \varphi) = -\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = -\cos\varphi$$



$$\sin\varphi = \left|\cos\varphi\right|$$

$$\sin\alpha = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Применение скалярного произведения для вычисления угла между прямой и плоскостью.

1. Направляющий вектор для прямой a .
2. Вектор, перпендикулярный к плоскости α .
3. Вычислить sin ϕ
4. ϕ

$$sin\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$