Исчисление высказываний

- Исчисление высказываний – формальная теория T, в которой заданы:

1. Алфавит А:
   - переменные - x, y, z, x $\neg$ $\to$
   - логические связки - $\vee$ или $\wedge$ (дополнительно мож $A \wedge B \overset{def}{=} \overline{A \to \overline{B}}$, $A \vee B \overset{def}{=} \overline{A} \to B$.к.
   - ( ) – технические символы (, не является символом алфавита).

2. Язык состоит из слов. Словом (формулой исчисления) называют любую конечную последовательность алфавита.

3. Правильно построенные формулы (ППФ).

переменные есть формулы;

если A, B – формулы, то $(\overline{A})$ и $(A \to B)$ - формулы;

других ППФ нет.

4. Аксиомы.

A1: $(A \to (B \to A))$;

A2: $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

A3: $(\overline{A} \to \overline{B}) \to (B \to A)$

5. Правило вывода.

правило *modus ponens (mp)*: $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$ - правило заключения (от лат. *modus* – способ; *ponens* – отделение, заключение).

МР принимается без доказательства!

6. Вывод формулы - конечная последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, такая, что:

- ✔ последняя формула совпадает с выводимой;
- ✔ каждая формула вывода является либо аксиомой, либо получена из предыдущих по МР.

- Исчисление высказываний представляет собой множество выводимых формул в данном алфавите при данном наборе аксиом и правил вывода.

Первые теоремы ИВ

- Д-во первых теорем выглядит громоздко и непредсказуемо.
- В дальнейшем выводятся некоторые правила, которые будут предсказывать д-во теорем.
- $\vdash$ А – формула А выводима.
- Перед всеми аксиомами можно поставить знак $\vdash$, т.к. они постулировались.

Т1. $\vdash A \Rightarrow A$.

1. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ (А2).

   Применили схему аксиомы А2, взяв в качестве B формулу $(A \Rightarrow A)$, а вместо C формулу A.

2. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$ (А1).

   Применили схему аксиомы А1, взяв в качестве B формулу $(A \Rightarrow A)$.

3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ (МР к 2, 1).

4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ (А1).

   Применили схему аксиомы А1, взяв в качестве B формулу A.

5. $A \Rightarrow A$ (МР к 4, 3).

T2. Если $\vdash A$, то для любой формулы B имеет место: $\vdash B \Rightarrow A$.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n = A$ – вывод формулы A. Чтобы получить вывод формулы $B \Rightarrow A$ дополним вывод формулы A еще двумя формулами:

n+1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ (A1).

n+2) $B \Rightarrow A$ (MP к n, n+1). ■

Т3. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

1. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (А3).

   Применили схему аксиомы А3, взяв в качестве B формулу A и наоборот.

2. $\neg A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ (Т2 к 1).

3. $(\neg A \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B))) \Rightarrow$

   $\Rightarrow ((\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)))$ (А2).

   Применили схему аксиомы А2, взяв в качестве A формулу $\neg A$, в качестве B – формулу $\neg B \Rightarrow \neg A$, а в качестве C – формулу $A \Rightarrow B$.

4. $(\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ (МР к 2, 3).

5. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (А1).

6. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (МР к 5, 4). ■

T4. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$.

1. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ (A3).

   Применили схему аксиомы A3, взяв в качестве B формулу $\neg\neg A$.

2. $\neg\neg A \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A))$ (T2 к 1).

3. $(\neg\neg A \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A))) \Rightarrow$

   $\Rightarrow ((\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)))$ (A2).

   Применили схему аксиомы A2, взяв в качестве A формулу $\neg\neg A$, в качестве B – формулу $\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$, а в качестве C – формулу $\neg\neg A \Rightarrow A$.

4. $(\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A))$ (MP к 2, 3).

5. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$ (T3, в качестве B формула $\neg\neg\neg A$).

6. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ (MP к 5, 4). ■

T5. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

1. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ (T4).

2. $(\neg\neg A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)) \Rightarrow ((\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A))$ (A2

3. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ (MP к 1, 2).

4. $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A$ (T1).

5. $\neg\neg A \Rightarrow A$ (MP к 4, 3). ■

T6. $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$.

1. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$ (A3).

2. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ (T5).

3. $A \Rightarrow \neg\neg A$ (MP к 2, 1). ■

Выводимость из гипотез

- Пусть даны формулы – гипотезы $A_1, A_2, \ldots, A_n$
- Нужно доказать $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash F$
- Совокупность этих гипотез обозначим Γ

- **Выводом (доказательством) формулы** F из гипотез Г называется последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, в которых последняя формула совпадает с F и каждая F_i – аксиома или получена из предыдущих по MP.

Свойства выводимости из гипотез

1. Если Г, А$\vdash$А (самовыводимость).
2. Если Г$\vdash$А, то Г, В$\vdash$А (расширение списка гипотез).
3. Если Г, А$\vdash$В, Г$\vdash$А, то Г$\vdash$В (удаление).
4. Если Г$\vdash$А, А$\vdash$В, то Г$\vdash$В (транзитивность).
5. Если Г, А,В$\vdash$С, то Г, В,А$\vdash$С (коммутативность).
6. Если Г, А, А$\vdash$В, то Г, А$\vdash$В (сокращение).

Теорема дедукции (ТД)

- выявляет некоторую общую закономерность при таких построениях и тем самым облегчает процесс построения доказательства.

- Если **$\Gamma, B \vdash A$, то $\Gamma \vdash B \to A$**,
  где Г - это набор некоторых формул
  $\Gamma=\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$.

Связь $\vdash$ и $\rightarrow$

- Наличие МР и ТД позволяет взаимно заменять знаки.

  $\Gamma, A \vdash B \ \sim \ \Gamma \vdash A \rightarrow B$

- МР: $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B} \ \sim \ A, A \rightarrow B \vdash B$

- Если ТД применять в качестве аксиомы, то A_1, A_2 можно доказать как теоремы.
- Докажем $A_1 \colon \vdash A \to (B \to A)$ $\color{red}{T_1}$

<u>Анализ:</u>

ТД

$$A \vdash B \to A$$

ТД

$$A, B \vdash A$$

- Д-во:

1) $A, B \vdash A$ 1^0
2) $A \vdash B \rightarrow A$ 1), ТД
3) $A_1: \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 2), ТД

Докажем A_2: $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)$

T_2

<u>Анализ:</u>

ТД

$(A \to (B \to C)) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

ТД

$A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$

ТД

$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$

- <u>Д-во:</u>

1) $A \to (B \to C), \underline{A \to B, A} \vdash B$ MP
2) $\underline{A \to (B \to C)}, A \to B, \underline{A} \vdash B \to C$ MP
3) $A \to (B \to C), (A \to B), A \vdash C$ 1),2), MP
4) $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$ 3), ТД
5) $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ 4), ТД
6) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)$ 5), ТД

- Докажем $A \to B, B \to C \vdash A \to C$

T_3

<u>Анализ:</u> ТД

$$A \to B, B \to C, A \vdash C$$

<u>Д-во:</u>

1) $\underline{A \to B}, B \to C, \underline{A} \vdash B$ МР
2) $A \to B, \underline{B \to C}, A, \underline{B} \vdash C$ 1), МР
3) $A \to B, B \to C, A \vdash C$ 1), 2), 3^0
4) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ 4), ТД

- Докажем $A \to B \vdash \bar{B} \to \bar{A}$

T_4

<u>Д-во:</u>

1) $\bar{\bar{A}} \to A,\ A \to B \vdash \bar{\bar{A}} \to B$ $\qquad T_3$

2) $\bar{\bar{A}} \to B,\ B \to \bar{\bar{B}} \vdash \bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}$ $\qquad T_3$

3) $A \to B \vdash \bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}$ $\qquad 1,\ 2,\ 4^0$

4) $\overline{\overline{A}} \rightarrow \overline{\overline{B}} \vdash \overline{B} \rightarrow \overline{A}$ $\quad A_3$

5) $A \rightarrow B \vdash \overline{B} \rightarrow \overline{A}$ $\quad 3, 4, 4^0$

Закон контрапозиции

T_5

- Если $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{A}$
- Д-во:

1) $\Gamma, A \vdash B$ – дано
2) $\Gamma \vdash A \to B$ 1), ТД
3) $A \to B \vdash \overline{B} \to \overline{A}$ T_4
4) $\Gamma \vdash \overline{B} \to \overline{A}$ 2),3), 4^0
5) $\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{B} \to \overline{A}$ 4), 2^0
6) $\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{B}$ 1^0
7) $\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{A}$ 5),6), МР

Производные правила вывода

- Лемма – доказанное утверждение, полезное для доказательства других утверждений.

$$A \wedge B \overset{def}{=} \overline{A \to \overline{B}}, \qquad A \vee B \overset{def}{=} \overline{A} \to B$$

Lemma 1 (удаление &)

Из & двух высказываний выводится каждый член

$AB \vdash A$

<u>Анализ:</u> $\overline{A \to \overline{B}} \vdash A$

закон контрапозиции

$\overline{A} \vdash A \to \overline{B}$

ТД

$\overline{A}, A \to \overline{B}$

закон контрапозиции

$\overline{A}, B \to \overline{A}$

<u>Д-во</u>:

1) $\overline{A}, B \to \overline{A}$ 1^0
2) $\overline{A}, A \to \overline{B}$ 1), конт.
3) $\overline{A} \vdash A \to \overline{B}$ 2), ТД
4) $\overline{A \to \overline{B}} \vdash A$ 3), конт.
5) **$AB \vdash A$**

Lemma 2 (удаление &)

AB ⊢ B

Анализ: $A \to B \vdash \bar{B}$

закон контрапозиции

$B \vdash A \to \bar{B}$

ТД

$B, A \to \bar{B}$

Д-во:

1) $B, A \vdash \bar{B}$ 1^0

2) $B \vdash A \to \bar{B}$ 1), ТД

3) $A \to B \vdash \bar{B}$ 2), конт.

4) **AB ⊢ B**

Lemma 3 (введение &)

$A,B \vdash AB$

<u>Анализ:</u> $A, B \vdash \overline{A \to \overline{B}}$ <u>Д-во</u>:

закон контрапозиции

$A, A \to B \vdash \overline{B}$

1) $A, A \to B \vdash \overline{B}$ (MP)

2) $A, B \vdash A \to B$ 1), контр.

3) **$A,B \vdash AB$**

Lemma 4 (введение V)

$A \vdash A \vee B$

Анализ: $A \vdash A \to \bar{B}$

ТД

$A, A \vdash B$

контр.

$A, B \vdash A$

Д-во:

1) $A, B \to A$ 1^0
2) $A, A \to B$ 1),конт.
3) $A \vdash A \to B$ 2), ТД
4) **$A \vdash A \vee B$**

Lemma 5 (введение V) **$B \vdash A \vee B$ ($B \vee A$)**

Lemma 6 (удаление v)

Если $A \vdash C$, $B \vdash C$, то $A \vee B \vdash C$

Д-во:

1) $A \vdash C$ – дано
2) $\bar{C} \vdash \bar{A}$ 1), контр.
3) $B \vdash C$ – дано
4) $\bar{C} \vdash \bar{B}$ 3), контр.
5) $\bar{A}, \bar{B} \vdash \bar{A} \cdot \bar{B}$ $(\overline{\bar{A} \to B})$ введ. &
6) $\bar{C} \vdash \overline{\bar{A} \to B}$ 2),4),5),4^0
7) $\bar{A} \to B \vdash C$ 6), контр.
8) $A \vee B \vdash C$

Операции	Введение	Удаление
$\rightarrow$		
&		
$\vee$		
$\neg$	=	=

Доказать: $A \vee BC \vdash (A \vee B) \cdot (A \vee C)$

Анализ:

вв. &

$A \vee BC \vdash A \vee B$, $\quad$ $A \vee BC \vdash A \vee C$

уд. V $\quad$ *уд. V*

$A \vdash A \vee B$, $\quad$ $BC \vdash A \vee B$ $\quad$ $A \vdash A \vee C$, $\quad$ $BC \vdash A \vee C$

уд. & $\quad$ *уд. &*

$B, C \vdash A \vee B$ $\quad$ $B, C \vdash A \vee C$

Д-во:

1) $A \vdash A \vee B$ (вв. v)
2) $B, C \vdash A \vee B$ (вв. v)
3) $BC \vdash B$ (уд. &)
4) $BC \vdash C$ (уд. &)

Обоснование замены B,C на BC

5) $BC \vdash A \vee B$ (2), 3),4^{0})
6) $A \vee BC \vdash A \vee B$ (5), уд.&)
7) $A \vdash A \vee C$ (вв. v)
8) $B, C \vdash A \vee C$ (вв. v)
9) $BC \vdash A \vee C$ (8), уд.&)
10) $A \vee BC \vdash A \vee C$ (7), 9), уд. v)
11) $A \vee B, A \vee C \vdash (A \vee B) \cdot (A \vee C)$ (10), вв. &)
12) $A \vee BC \vdash (A \vee B) \cdot (A \vee C)$ (6), 10),11),4^{0})

Теорема о полноте

- Если формула F является тавтологией, то тогда F — выводима.