

Проблемы энерго- и ресурсосбережения

- Приближенные методы решения задач теплопроводности

Приближенные методы решения задач теплопроводности

Точное аналитическое решение позволяет рассчитать температуру в любой точке тела, однако, не любую задачу теплопроводности можно решить аналитически. В том случае, когда тело имеет сложную форму и коэффициент теплоотдачи является величиной переменной, задачу по теплообмену аналитически решить невозможно. В этом случае используют приближенные методы решения задач (численные методы).

Приближенные методы решения задач теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности заменяется системой алгебраических уравнений. Температура рассчитывается в отдельных фиксированных точках тела, точность расчета зависит от выбранного шага разбиения тела на отдельные участки.

Приближенные методы решения задач теплопроводности

Наибольшее распространение получили два метода расчета:

- Метод элементарных тепловых балансов.
- Метод конечных разностей.

Метод элементарных тепловых балансов

Тело разбивается на отдельные объемы.

Центральным точкам каждого объема присваивается отдельный номер.

Эти точки обладают определенной массой и теплоемкостью.

К каждой точке теплота подводится или отводится через стержни, с помощью которых точки условно соединены друг с другом.

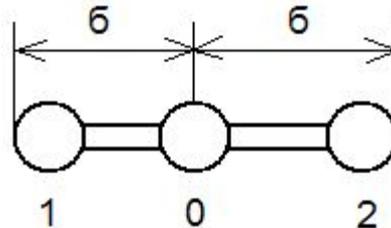
При этом внутренняя энергия точки может увеличиваться или уменьшаться.

Метод элементарных тепловых балансов

Пусть температурное поле описывается уравнением:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

Разбиваем стенку на элементарные объемы:



$$V = \delta \times \delta \times 1 = \delta^2$$

Метод элементарных тепловых балансов

Изменение внутренней энергии в рассматриваемой узловой точке:

$$U = c\rho V (t_0' - t_0), \quad (1)$$

$c, \text{ Дж / кг} \cdot \text{К}$) - удельная массовая теплоемкость;

$\rho, \text{ кг / м}^3$ - плотность;

t_0 - начальная температура точки 0;

t_0' - температура этой точки через время $\Delta\tau$

Метод элементарных тепловых балансов

Теплота к точке 0 подводится от точки 1 и точки 2 за счет теплопроводности:

$$\Delta Q_{1-0} = \frac{\lambda(t_1 - t_0)}{\delta} f \cdot \Delta \tau \quad (2)$$

$$\Delta Q_{2-0} = \frac{\lambda(t_2 - t_0)}{\delta} f \cdot \Delta \tau \quad (3)$$

Уравнение теплового баланса:

$$U = \Delta Q_{1-0} + \Delta Q_{2-0} \quad (4)$$

Метод элементарных тепловых балансов

С учетом (1), (2), (3) уравнение (4) примет вид

$$c\rho\delta^2(t_0' - t_0) = \lambda(t_1 - t_0)\Delta\tau + \lambda(t_2 - t_0)\Delta\tau \Rightarrow$$
$$t_0' = t_0 + \frac{\lambda\Delta\tau}{c\rho\delta^2}(t_1 - t_0 + t_2 - t_0). \quad (5)$$

Метод элементарных тепловых балансов

$\frac{\lambda}{c\rho} = \alpha, \text{ м}^2/\text{с}$ - коэффициент температуропроводности.

$\frac{a\Delta\tau}{\delta^2} = Fo$ - критерий Фурье.

При фиксированном значении шага разбиения по пространству и по времени критерий Фурье является величиной постоянной .

Метод элементарных тепловых балансов

Уравнение (5) принимает вид:

$$t_0' = t_0 + Fo(t_1 + t_2 - 2t_0) \quad (6)$$

$$t_0' = Fo \left(t_1 + t_2 - 2t_0 + \frac{t_0}{Fo} \right)$$

$$t_0' = Fo \left(t_1 + t_2 + t_0 \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right) \quad (7)$$

Метод элементарных тепловых балансов

Из рассмотрения (7) следует, что будущая температура в рассматриваемой точке является функцией настоящей температуры в этой точке и настоящих температур в соседних точках.

Метод элементарных тепловых балансов

Частные случаи:

Пусть $Fo = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$t_0' = Fo(t_1 + t_2) \Rightarrow t_0' = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Будущая температура в рассматриваемой точке не зависит от настоящей температуры в этой точке.

Метод элементарных тепловых балансов

Пусть $FO = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$t_0' = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_0).$$

Пусть $FO = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$t_0' = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + 2t_0).$$

Метод элементарных тепловых балансов

Установлено, что устойчивость решения достигается лишь при

$$Fo \leq \frac{1}{2}$$

$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}$$

Метод элементарных тепловых балансов

Аналогично можно получить решение для двухмерной задачи:

$$t_0' = Fo \left(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_0 \left(\frac{1}{Fo} - 4 \right) \right)$$

Метод элементарных тепловых балансов

Установлено, что устойчивость решения достигается лишь при

$$Fo \leq \frac{1}{4}$$

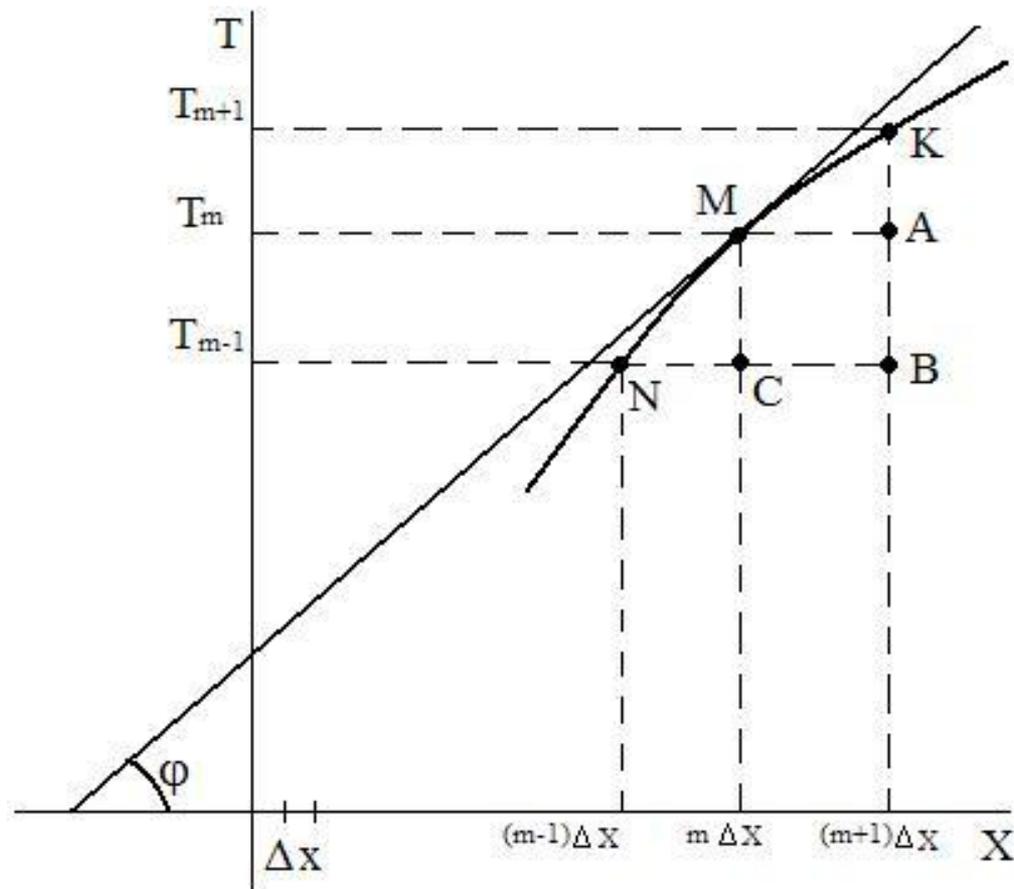
$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{\delta^2} \leq \frac{1}{4}$$

Метод конечных разностей

В этом методе производные, входящие в дифференциальное уравнение теплопроводности, замещаются разностными соотношениями:

$$t' (m\Delta x) = tg\varphi$$

Метод конечных разностей



Метод конечных разностей

Приближенные значения производных

Предыдущие значения производных:

$$t' (m\Delta x) \approx \frac{MC}{NC} = \frac{t_m - t_{m-1}}{\Delta x}$$

Последующие значения производных:

$$t' (m\Delta x) \approx \frac{KA}{MA} = \frac{t_{m+1} - t_m}{\Delta x}$$

Метод конечных разностей

Симметричные значения производных:

$$t' (m\Delta x) \approx \frac{KB}{NB} = \frac{t_{m+1} - t_{m-1}}{2\Delta x}$$

Метод конечных разностей

Вторая производная:

$$t''(m\Delta x) = \left(\frac{t_{m+1} - t_m}{\Delta x} - \frac{t_m - t_{m-1}}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$t''(m\Delta x) = \frac{1}{\Delta x^2} (t_{m+1} + t_{m-1} - 2t_m)$$

Метод конечных разностей

Пусть температурное поле описывается дифференциальным уравнением:

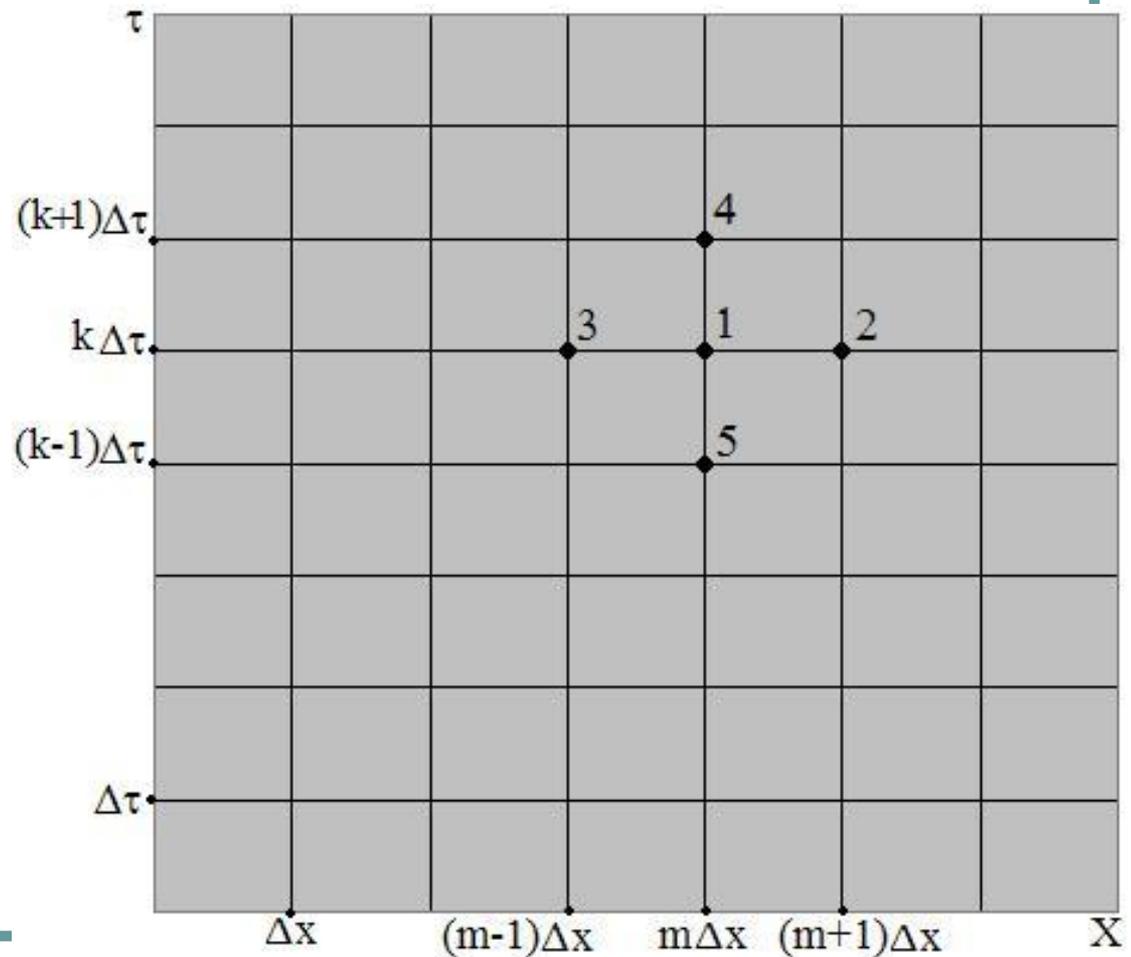
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (1)$$

Метод конечных разностей

Поскольку температура является функцией двух переменных, удобно выбрать прямоугольную сетку. Интервал изменения x разделим на одинаковые интервалы Δx , а отрезок времени τ разделим на равномерные интервалы $\Delta \tau$. Восстановленные перпендикуляры к координатным осям в точках деления при пересечении образуют расчетные узловые точки.

Метод конечных разностей

Расчетная сетка:



Метод конечных разностей

Координаты точек:

1: $(m\Delta x, k\Delta\tau)$;

2: $((m+1)\Delta x, k\Delta\tau)$;

3: $((m-1)\Delta x, k\Delta\tau)$;

4: $(m\Delta x, (k+1)\Delta\tau)$;

5: $(m\Delta x, (k-1)\Delta\tau)$;

Метод конечных разностей

Заменяем производные разностными соотношениями:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \left(t_{(k+1),m} - t_{k,m} \right) \frac{1}{\Delta \tau} + \varepsilon_1;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),k} - t_{(m-1),k} - 2t_{m,k} \right) + \varepsilon_2;$$

Метод конечных разностей

Формула (1) примет вид:

$$\begin{aligned} & \left(t_{m,(k+1)} - t_{m,k} \right) \frac{1}{\Delta\tau} + \varepsilon_1 = \\ & = \frac{a}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} - 2t_{m,k} \right) + \varepsilon_2 a; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{m,(k+1)} &= \varepsilon_1 \Delta\tau + \varepsilon_2 a \Delta\tau + \\ &+ \frac{a \Delta\tau}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} - 2t_{m,k} \right) + t_{m,k}; \end{aligned}$$

Метод конечных разностей

Или:

$$t_{m,(k+1)} = Fo \left[t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} - 2t_{m,k} + \frac{1}{Fo} t_{m,k} \right] + \Delta\tau (\varepsilon_2 a - \varepsilon_1)$$

$$t_{m,(k+1)} = Fo \left[t_{(m+1),k} + t_{(m-1),k} + t_{m,k} \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right] + \Delta\tau (\varepsilon_2 a - \varepsilon_1) \quad (2)$$

Метод конечных разностей

Уравнение (2) составляется для каждой узловой точки включая пограничные точки.

Погрешность расчета уменьшается при $\Delta\tau \rightarrow 0$.

Устойчивость решения обеспечивается лишь при условии:

$$\frac{1}{Fo} - 2 \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2a}$$

Метод конечных разностей

Пусть температурное поле описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Метод конечных разностей

Заменяем производные разностными соотношениями:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),n}^k + t_{(m-1),n}^k - 2t_{m,n}^k \right) + \varepsilon_1;$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} \left(t_{m,(n+1)}^k + t_{m,(n-1)}^k - 2t_{m,n}^k \right) + \varepsilon_2;$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} \left(t_{m,n}^{k+1} - t_{m,n}^k \right) + \varepsilon_3;$$

Метод конечных разностей

Уравнение (3) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta\tau} \left(t_{m,n}^{k+1} - t_{m,n}^k \right) + \varepsilon_3 = \\ & = \frac{a}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),n}^k + t_{(m-1),n}^k - 2t_{m,n}^k \right) + \varepsilon_1 a + \\ & + \frac{a}{\Delta y^2} \left(t_{m,(n+1)}^k + t_{m,(n-1)}^k - 2t_{m,n}^k \right) + \varepsilon_2 a \end{aligned}$$

Метод конечных разностей

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$t_{m,n}^{k+1} = t_{m,n}^k + \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \left(t_{(m+1),n}^k + t_{(m-1),n}^k - 2t_{m,n}^k \right) +$$
$$+ \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2} \left(t_{m,(n+1)}^k + t_{m,(n-1)}^k - 2t_{m,n}^k \right)$$

Метод конечных разностей

Обозначают числа Фурье:

$$Fo_x = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}; Fo_y = \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2}$$

Часто принимают

$$\Delta x = \Delta y \Rightarrow Fo_x = Fo_y = Fo$$

Метод конечных разностей

Тогда формула примет вид:

$$t_{m,n}^{k+1} = t_{m,n}^k + Fo \left(t_{(m+1),n}^k + t_{(m-1),n}^k - 4t_{m,n}^k + t_{m,(n+1)}^k + t_{m,(n-1)}^k \right)$$

$$t_{m,n}^{k+1} = Fo \left[t_{(m+1),n}^k + t_{(m-1),n}^k + t_{m,(n+1)}^k + t_{m,(n-1)}^k + t_{m,n}^k \left(\frac{1}{Fo} - 4 \right) \right]$$

Метод конечных разностей

Устойчивость решения обеспечивается при условии:

$$\frac{1}{Fo} - 4 \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{4}$$

Вопросы к экзамену

1. **Метод элементарных тепловых балансов.**
2. **Метод конечных разностей.**