

УСЛОВИЯ ДОСТИЖИМОСТИ, базы дуг и растущие деревья

Лекция № 10

СОДЕРЖАНИЕ

**Часть 1. Достижимость
вершин.**

Часть 2. Базы дуг.

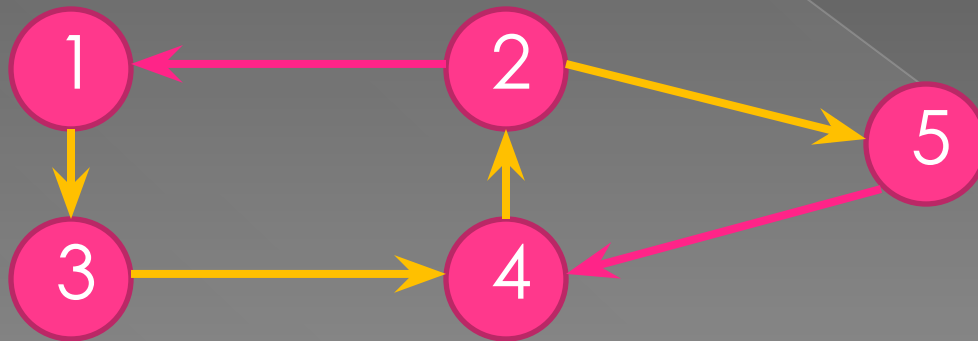
**Часть 3. Растущие
ориентированные
деревья.**

Часть 1

УСЛОВИЯ ДОСТИЖИМОСТИ

Достижимость вершин

- На ориентированном графе $G(X,U)$ t -я вершина считается достижимой из вершины s -ой, если существует хотя бы один путь, ведущий из s -ой вершины в t -ю. Так, 5-я вершина достижима из 1-й.

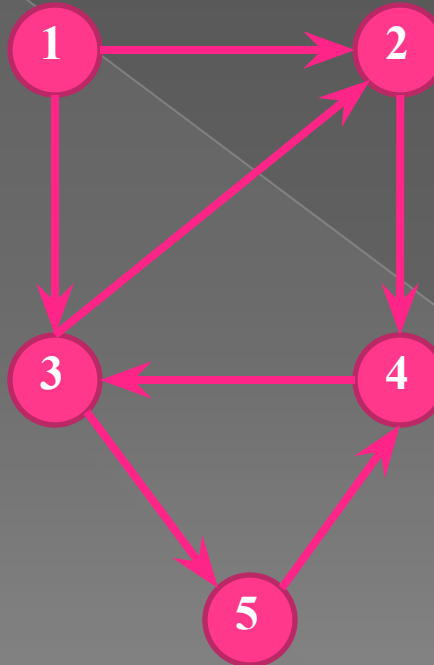


МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ ВЕРШИН

Матрица смежности вершин

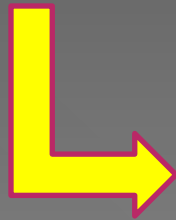
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

Граф



Матрица достижимости вершин

1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1



Часть 2

Базы дуг

БАЗА ДУГ - ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Базой дуг ориентированного графа $G(X, U)$ с матрицей достижимости вершин « M » называется такое подмножество дуг U' множества U , что:

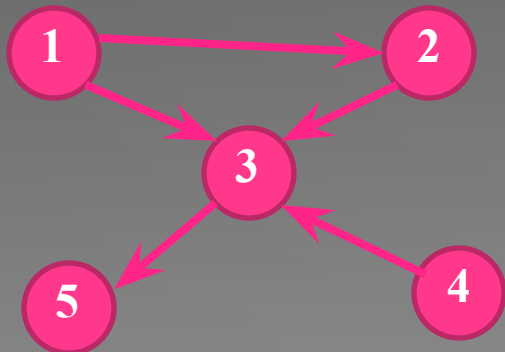
- граф $G(X, U')$ обладает такой же матрицей достижимости вершин M' , что и исходный граф $G(X, U)$.
- Удаление любой дуги, принадлежащей базе U' , изменяет условия достижимости вершин .

ПРИМЕР 1

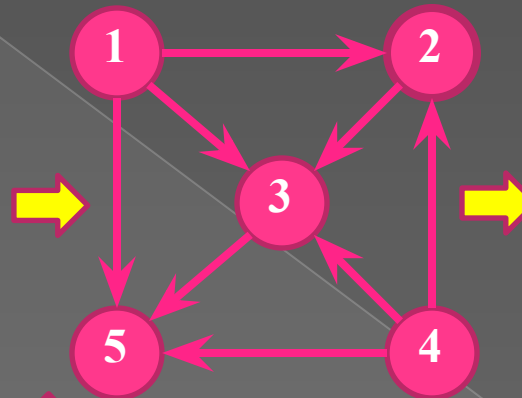
Матрица смежности вершин

0	1	1	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

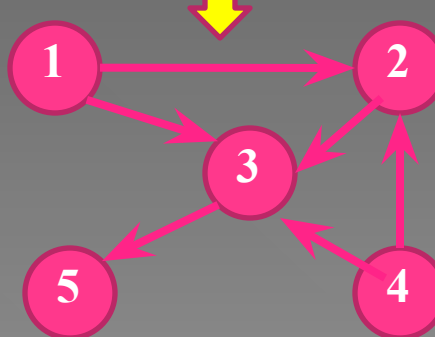
Суграф $G(X,U')$



Граф $G(X,U)$



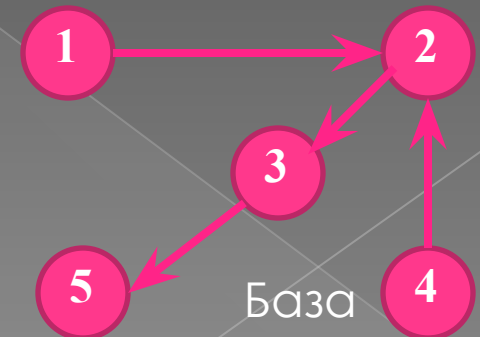
Суграф $G(X,U'')$



Матрица достижимости вершин

1	1	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

Суграф $G(X,U''')$



База
ДУГ

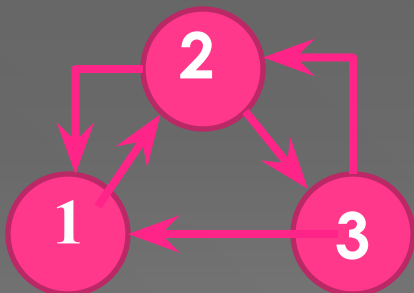
МИНИМАЛЬНАЯ БАЗА ДУГ - ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Минимальной базой дуг взвешенного ориентированного графа $G(X,U)$ с матрицей достижимости вершин «М» называется такое подмножество дуг U' множества U , что:

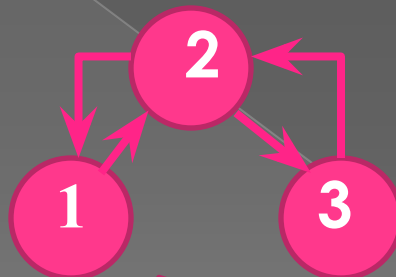
- граф $G(X,U')$ обладает такой же матрицей достижимости вершин M' , что и исходный граф $G(X,U)$;
- суммарный вес дуг подмножества U' минимален.

ПРИМЕР 2

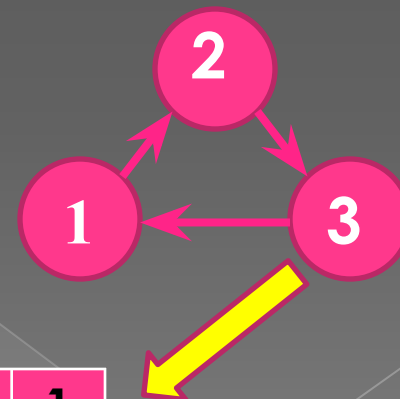
$G(X,U)$ и M

$$M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 9 & 0 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$


$G(X,U')$ и M'

$$M' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 9 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$


$G(X,U'')$ и M''

$$M'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$


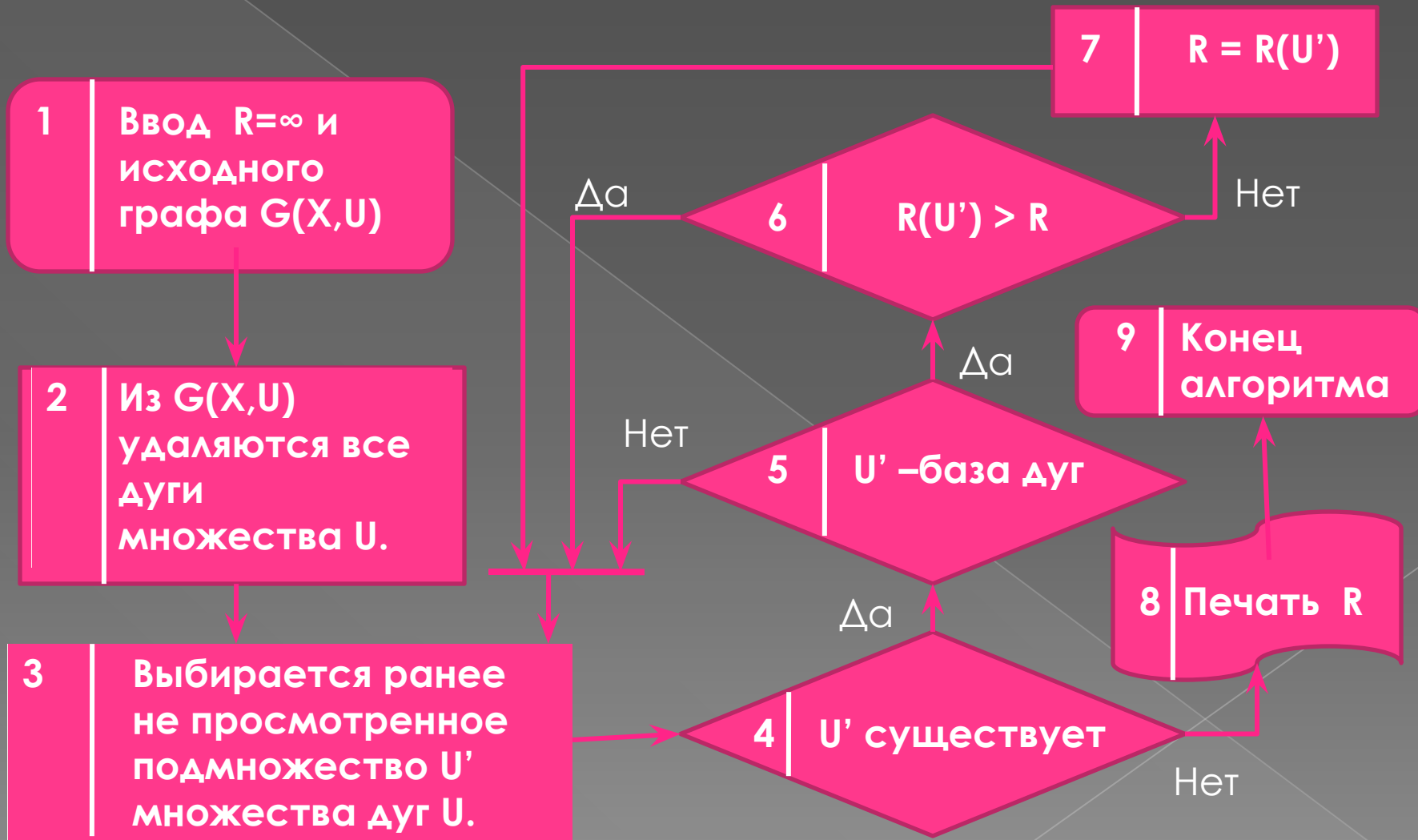
Матрица достижимости вершин

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

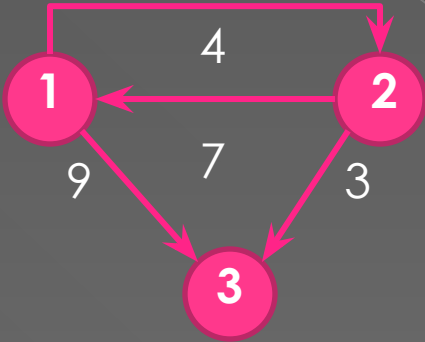
СВОЙСТВА БАЗ ДУГ

- **Теорема 1.** Каждый ориентированный граф обладает по крайней мере одной базой дуг.
- **Теорема 2 (Кёнига):** Ориентированный граф без контуров обладает единственной базой дуг.
- **Теорема 3 (Гольдберга) :** Число дуг любой базы дуг U' ориентированного графа $G(X,U)$, множество контуров которого не пусто, не превышает величины $Y = 2(|X| - 1)$, т.е. $|U'| \leq 2|X| - 2$.

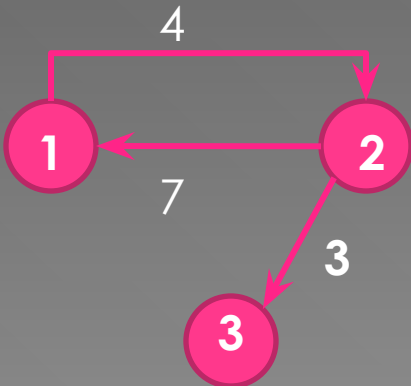
АЛГОРИТМ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОЙ БАЗЫ ДУГ



ПРИМЕР 3



Исходный граф $G(X,U)$

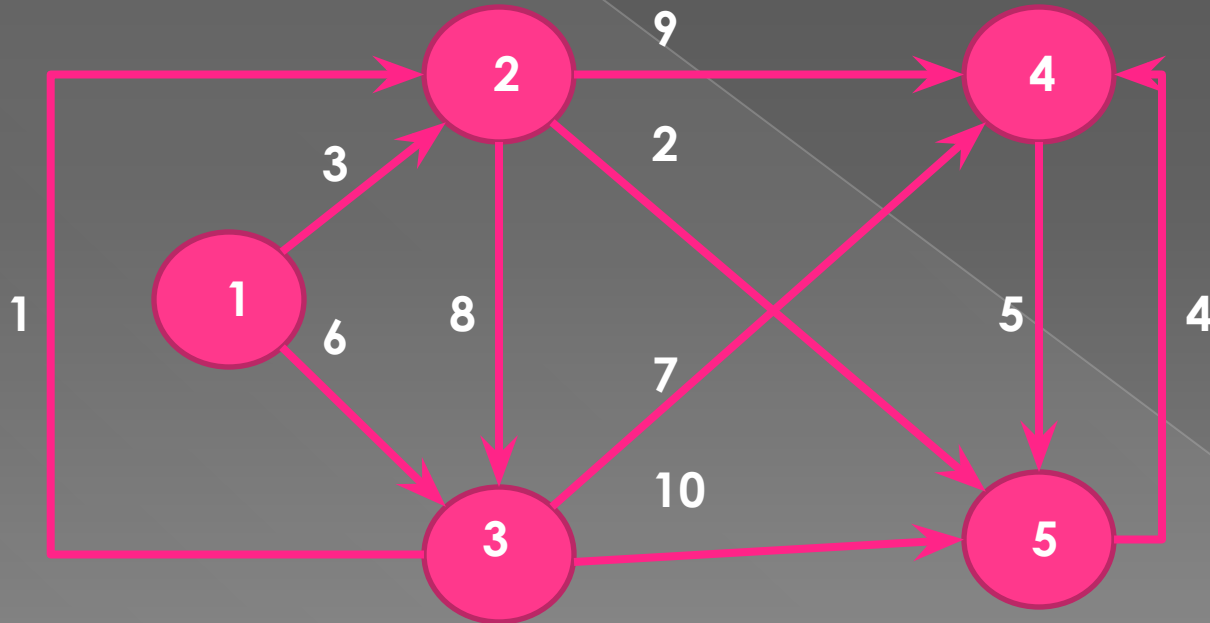


Суграф $G(X,U')$ с минимальной базой дуг

№	$Z(1,3)$	$Z(2,3)$	$Z(1,2)$	$Z(2,1)$	R
1	0	0	0	1	∞
2	0	0	1	0	∞
3	0	0	1	1	∞
4	0	1	0	0	∞
5	0	1	0	1	∞
6	0	1	1	0	∞
7	0	1	1	1	14

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

- Определить минимальную базу дуг на графе $G(X,U)$:



Часть 3

Растущие ориентированные деревья

МИНИМАЛЬНЫЕ РАСТУЩИЕ ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Содержательная постановка задачи: требуется на заданном взвешенном ориентированном графе $G(X, U)$ выделить подграф - дерево $G'(X', U')$ с корнем в заданной s -ой вершине такой, что:

- Все вершины, достижимые из s -й вершины на $G(X, U)$, также достижимы из той же вершины на $G'(X', U')$.
- Суммарный вес дуг множества U' минимален.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обозначения	Определения
(i,j) -	дуга, идущая из i -й вершины в j -ю на $G(X,U)$;
$Z(i,j)$ -	булева переменная, отвечающая дуге (i,j) ;
$r(i,j)$ -	вес дуги (i,j) ;
$L_d(s,t)$ -	d - й путь из s - й вершины в t - ю на $G(X,U)$
U'	искомое подмножество дуг множества U ;
$G'(X',U')$ -	искомое дерево с заданными условиями достижимости вершин из s - й вершины, причем справедливо: $X' \subseteq X; U' \subset U$;
$G(X,U)$ -	исходный граф;
$L'_d(s,t)$ -	d - й путь из s - й вершины в t - ю на $G'(X',U')$;
X' -	Все вершины, достижимые из s - й на $G(X,U)$.

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in U'} r(i,j)z(i,j) \rightarrow \min; \\ \forall x_t \in X : \text{signum} \left\{ \sum_d \prod_{L_d(s,t)} z(i,j) \right\} = \text{signum} \left\{ \sum_d \prod_{L_d(s,t)} z(i,j) \right\}; \\ \prod_{(i,j) \in U'} z(i,j) = 1; \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0. \end{array} \right.$$

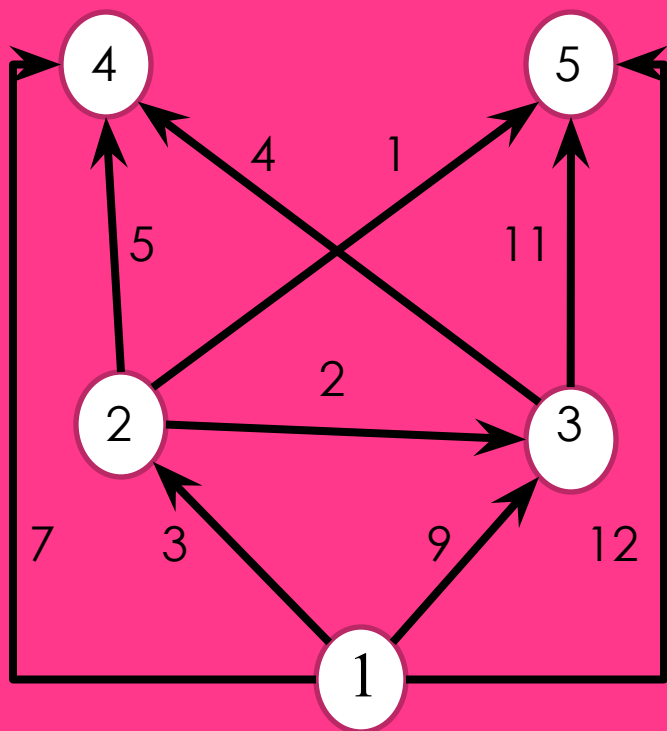
СВОЙСТВА МИНИМАЛЬНЫХ РАСТУЩИХ ДЕРЕВЬЕВ

- Величина $y = \sum_{i \in X'} \min_i r(i, j)$ является нижней границей суммарного веса дуг минимального дерева.

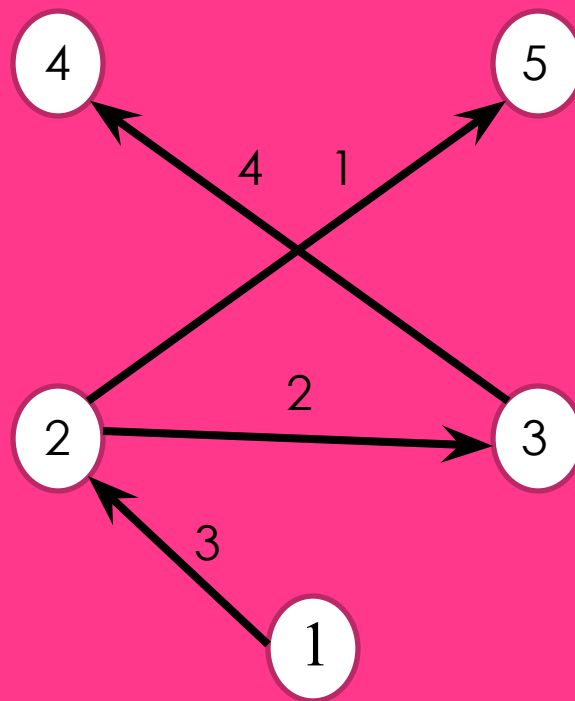
- Если граф $G(X, U)$ не содержит контуров, то

$y = \sum_{i \in X'} \min_i r(i, j)$ отвечает оптимальному значению целевой функции. (Сравнить с теоремой Кёнига).

ПРИМЕР 4



$G(X,U)$



$G'(X',U')$

АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ДЕРЕВА НА ГРАФЕ БЕЗ КОНТУРОВ

Шаг 1. На исходном графе $G(X,U)$ удаляются все вершины, в которые отсутствуют пути из s -й вершины, являющейся корнем дерева.

Полученный граф вновь обозначаем $G(X,U)$.

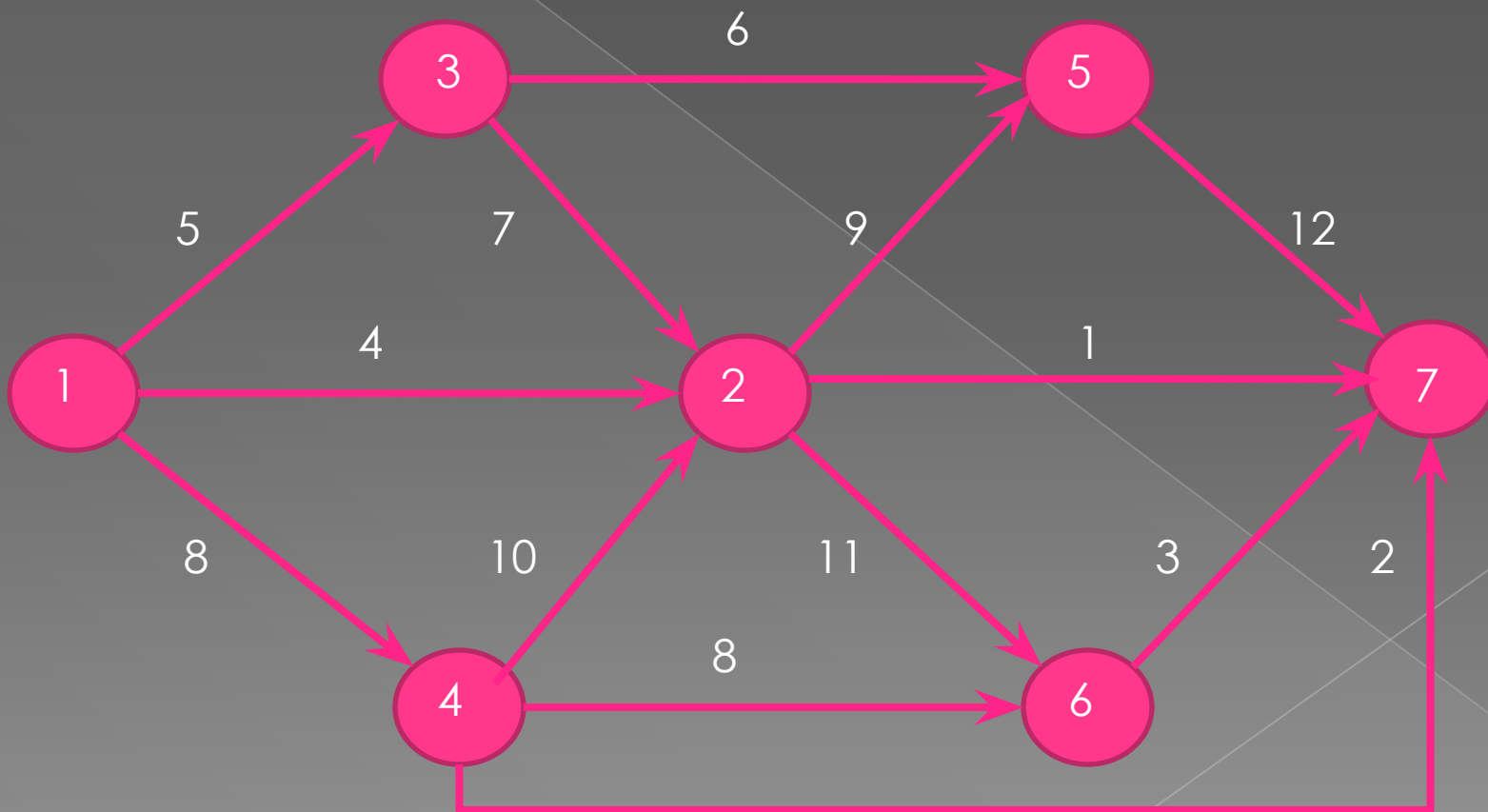
Шаг 2. $\forall j \neq s : r(p, j) = \min_i r(i, j)$.

Шаг 3. Дуги (p, j) , определенные на предыдущем шаге, принадлежат множеству U' .

Шаг 4. Конец алгоритма.

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Выделить минимальное дерево с корнем в 1-й вершине на графе $G(X,U)$:



ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

- На полученном орграфе:
- 1. Определить минимальный разрез.
- 2. Удалить дуги минимального разреза на исходном графе $G(X,U)$.
- 3. На полученном графе $G'(X',U')$ построить:
 - А) матрицу смежности вершин;
 - Б) минимальную базу дуг
 - В) минимальное растущее дерево с корнем в вершине – источнике.

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 1 - 9

0	1	5	9
0	0	3	9
4	7	0	2
6	8	2	0

№ 1

0	2	8	3
2	0	7	6
5	9	0	1
0	4	0	0

№ 2

0	8	9	1
3	0	4	7
4	5	0	2
1	6	0	0

№ 3

0	2	9	4
6	0	5	7
0	3	0	8
8	1	0	0

№ 4

0	0	9	4
7	0	3	8
0	2	0	1
4	6	5	0

№ 5

0	2	6	3
9	0	8	4
5	1	0	0
0	7	5	0

№ 6

0	3	7	9
0	0	5	4
3	1	0	8
2	6	9	0

№ 7

0	3	7	8
5	0	2	4
0	4	0	6
2	5	1	0

№ 8

0	7	9	1
2	0	5	1
6	3	0	8
2	0	4	0

№ 9

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 10 - 18

0	1	5	9
0	9	3	0
4	7	0	2
6	8	2	0

№ 10

0	2	8	3
2	0	7	6
5	9	0	1
0	4	0	0

№ 11

0	8	9	1
3	0	4	7
4	5	0	2
1	0	6	0

№ 12

0	2	9	4
6	0	5	7
3	0	0	8
8	1	0	0

№ 13

\

0	4	9	0
7	0	3	8
0	2	0	1
4	6	5	0

№ 14

0	2	6	13
9	0	8	4
5	1	0	0
0	7	5	0

№ 15

0	3	7	9
0	0	5	4
3	1	0	8
0	6	9	0

№ 16

0	3	7	8
5	0	2	4
0	4	0	16
2	5	1	0

№ 17

0	7	9	1
2	0	5	1
6	3	0	8
0	2	4	0

№ 18

ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 19 - 27

0	1	5	9
0	0	12	9
4	7	0	2
6	8	2	0

№ 19

0	2	8	3
2	0	7	6
5	9	0	1
0	4	5	0

№ 20

0	8	9	1
3	0	4	7
4	5	0	2
1	9	3	0

№ 21

0	2	9	4
6	0	5	5
3	3	0	8
2	1	0	0

№ 22

0	10	9	4
7	0	3	8
0	2	0	1
4	6	5	0

№ 23

0	2	6	3
9	0	8	4
5	1	0	9
0	7	5	0

№ 24

0	3	7	9
0	0	15	4
3	1	0	8
2	6	9	0

№ 25

0	3	7	8
5	0	2	4
9	4	0	6
2	5	1	0

26

0	7	9	10
2	0	5	1
6	3	0	8
2	12	4	0

№ 27

Алгоритм поиска минимального дерева на орграфе с бикомпонентами: шаги 1 - 3

Шаг 1. На исходном графе $G(X, U)$ удаляются все вершины, в которые отсутствуют пути из s -й вершины, являющейся корнем дерева.

Полученный граф вновь обозначаем $G(X, U)$.

Шаг 2. Выбирается дуга с минимальным весом, заходящая в каждую вершину подмножества

$$X \setminus x_s .$$

Шаг 3. Если на множестве выбранных дуг есть дуга (s, j) , исходящая из s -й вершины, то перейти к шагу 4, в противном случае – к шагу 6.

Алгоритм поиска минимального дерева на орграфе с бикомпонентами: шаги 4 - 6

Шаг 4. Вершина j -я «стягивается» в s -ю. Если при этом граф «стянулся» в одну вершину, то перейти к шагу 9, в противном случае – к шагу 5.

Шаг 5. Если образуются пары параллельных и согласно ориентированных дуг, то остаётся одна из них, вес которой меньше. Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Каждой j -й вершине ($j \neq s$) присваивается потенциал $p(j)$; $\forall j \neq s : p(j) = r(i, j)^* - \min_{q \neq i} r(q, j)$, где $r(i, j)^*$ - дуга, выбранная на шаге 2 последней итерации.

Алгоритм поиска минимального дерева на орграфе с бикомпонентами: шаги 7 - 9

Шаг 7. На множестве вершин $X \setminus x_s$ выбирается такая, потенциал которой минимален.

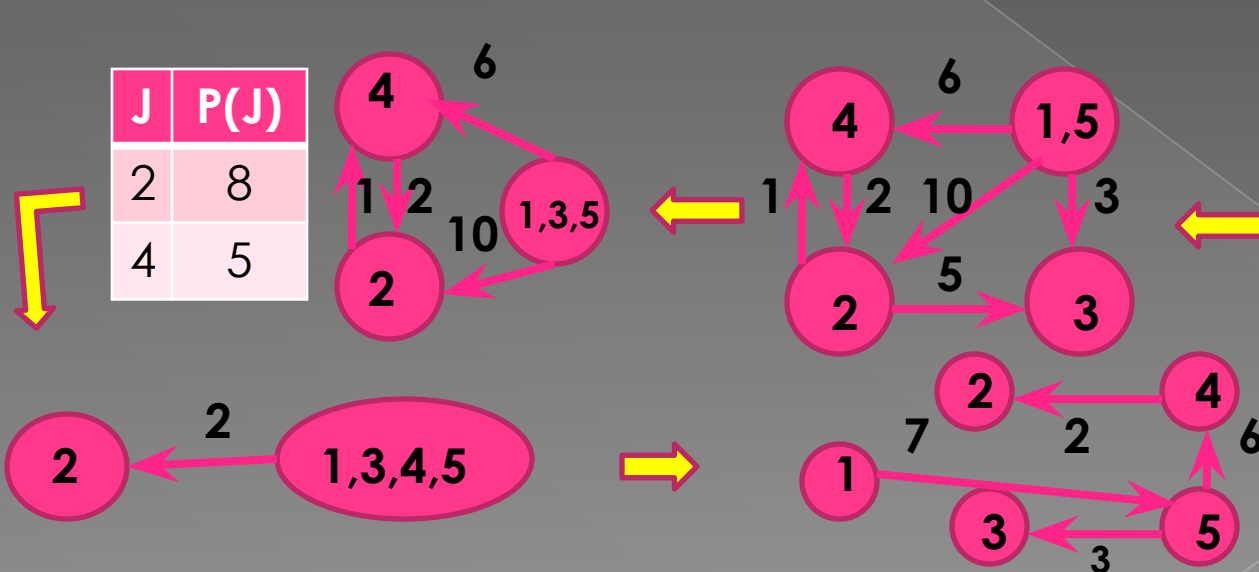
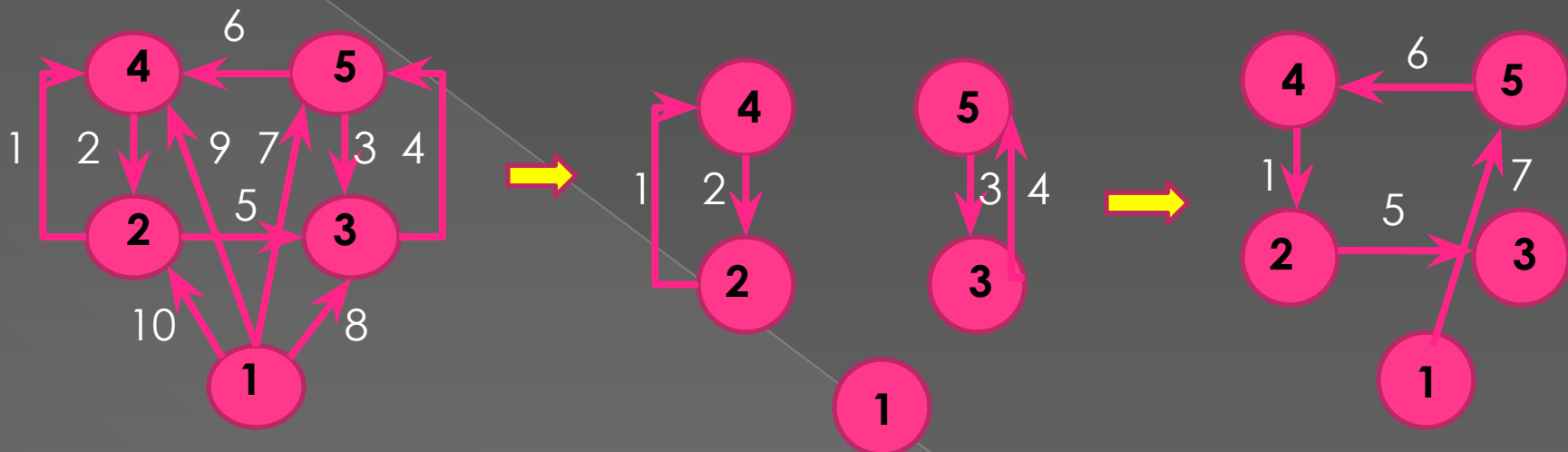
Шаг 8. Полагая, что выбранная на шаге 7 вершина является j -й, выполняются следующие две операции: дуга (i,j) , помеченная звездочкой «*», теряет эту пометку, а дуга (k,j) , такая, что:

$$r(k, j) = \min_{q \neq i} r(q, j)$$

её приобретает. Перейти к шагу 3.

Шаг 9. Конец алгоритма. «Стянутые» дуги образуют минимальное дерево.

ПРИМЕР 5



J	P(J)
2	8
4	5

J	P(J)
2	8
3	2
4	5
5	3

R = 18

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Построить минимальное дерево с корнем в 1-й, 2-й, ..., 7-й вершине на графе $G(X,U)$:

