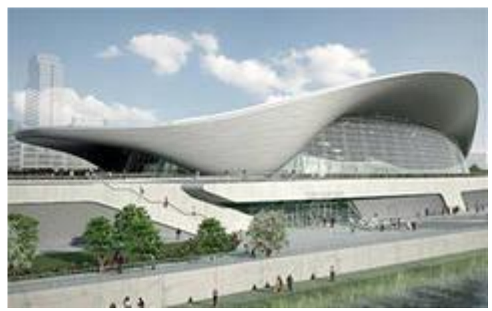
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лекция 4

Направление обучения – «Строительство»

Поверхности

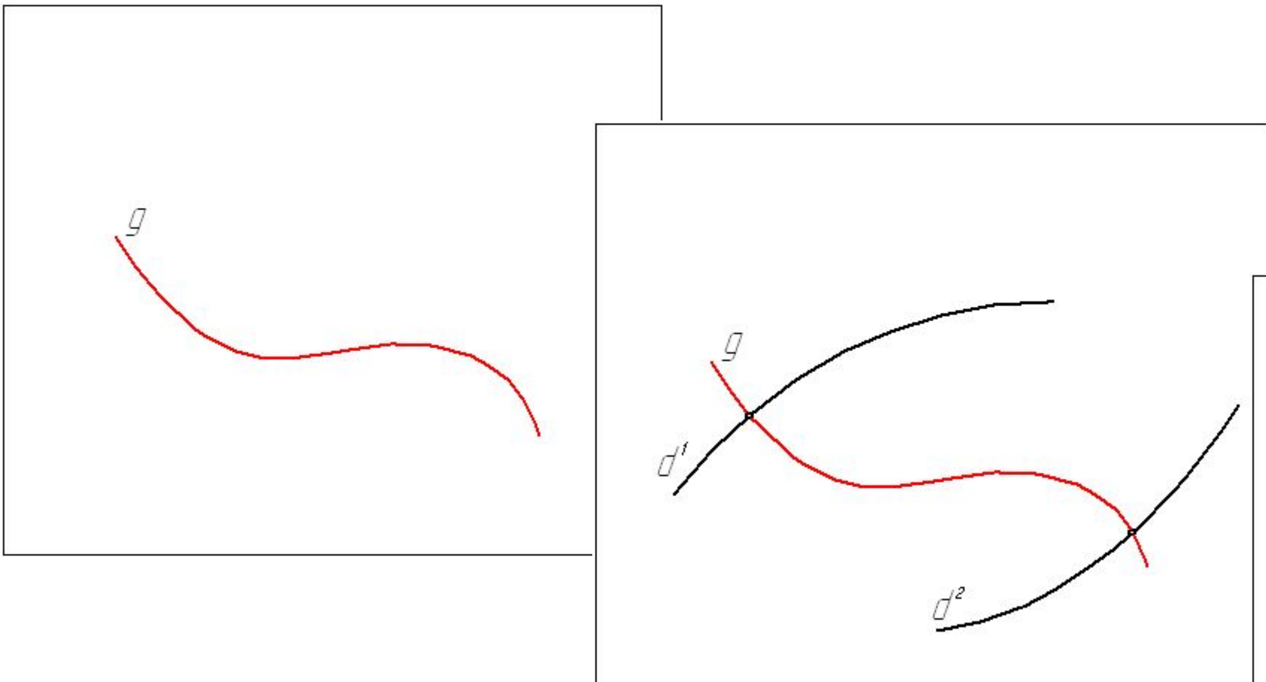
Примеры современных архитектурных форм

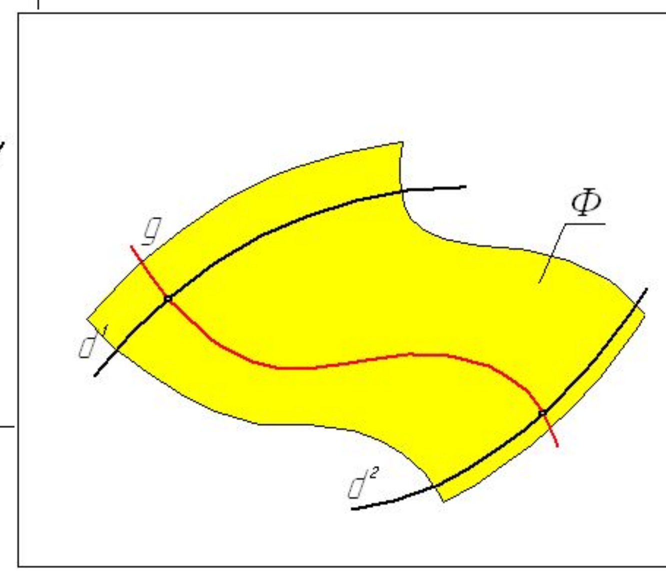


Поверхность – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь.
Толщины и объема нет.

Кинематический способ формирования поверхности

Поверхность рассматривается как непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону





- g – образующая поверхности;
- d – направляющая поверхности.

Способы задания поверхности

Определитель поверхности

Это совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

Определитель состоит из двух частей:

Ф{(Г)(А)}

- Геометрическая **(Г)** - геометрические фигуры - образующая и другие точки, линии, поверхности, участвующие в образовании поверхности.
- Алгоритмическая **(А)** – закон перемещения и изменения формы образующей.

Если образующая является прямой линией, которую можно однозначно задать двумя точками или точкой и направлением и графически не изображать, в отличие от кривой линии, то ее обозначение выносят за пределы геометрической части определителя

Ф{*g*(Г)(А)}

Пример

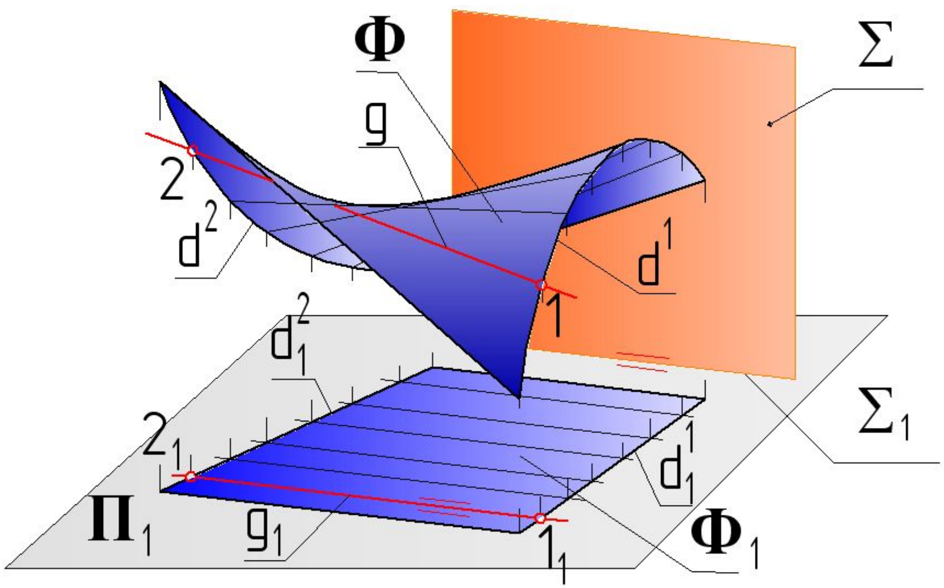
$\Phi \{ g(d^1, d^2, \Sigma)(g \cap d^1, g \cap d^2, g \parallel \Sigma) \}$

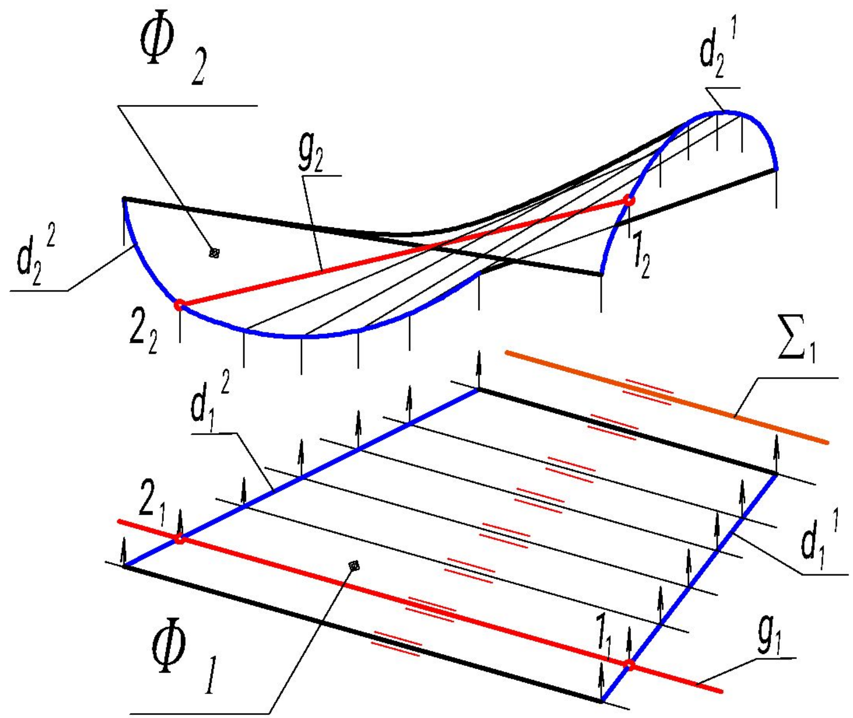
Φ - прямой цилиндроид (группа поверхностей Каталана),

g – образующая (прямая линия),

d^1, d^2 – направляющие,

Σ – направляющая плоскость (плоскость параллелизма)





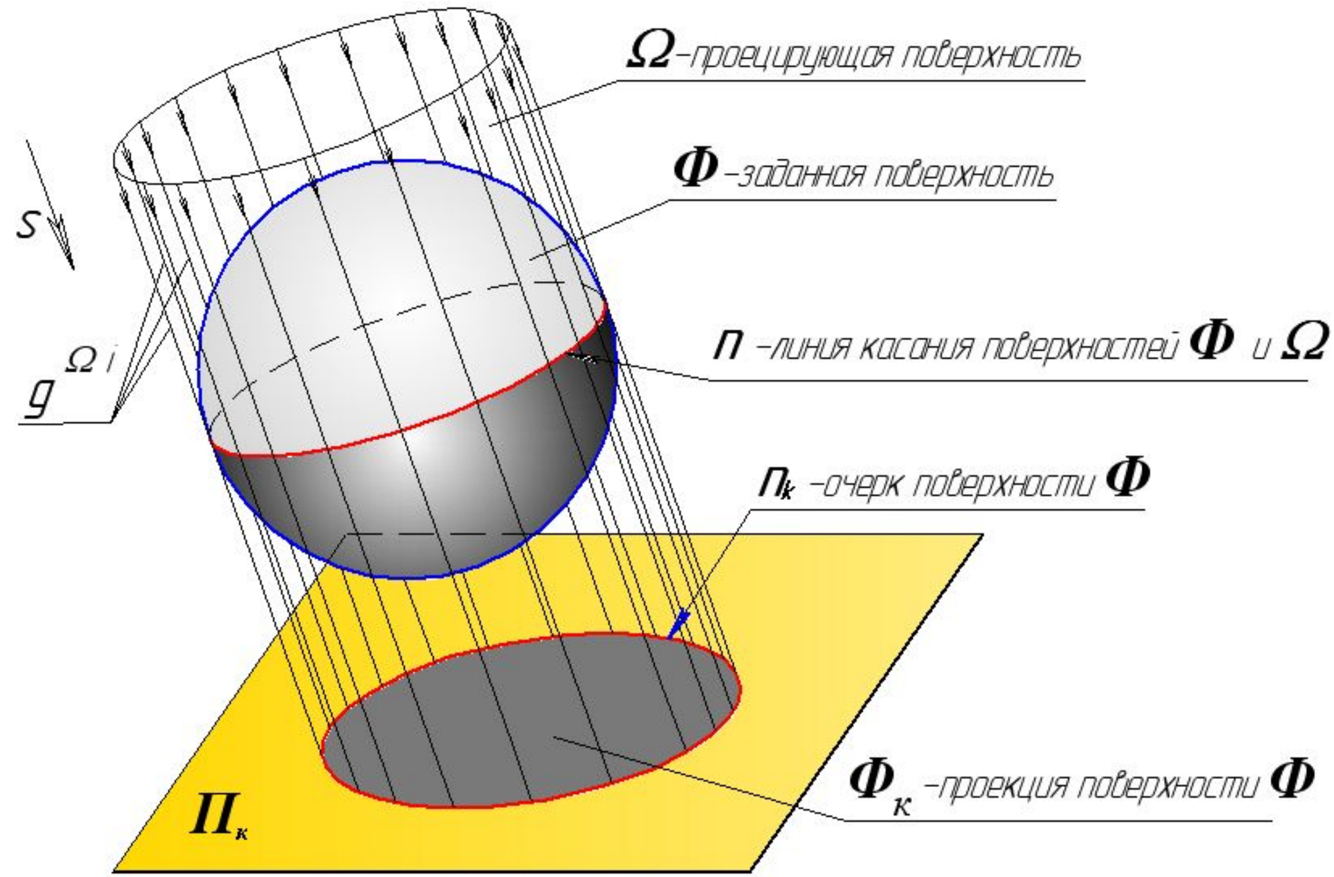
$g^i_1 \parallel \Sigma_1 \quad i=1,2,3,\ldots$

Очерк поверхности

$g^{\Omega i} \parallel s$

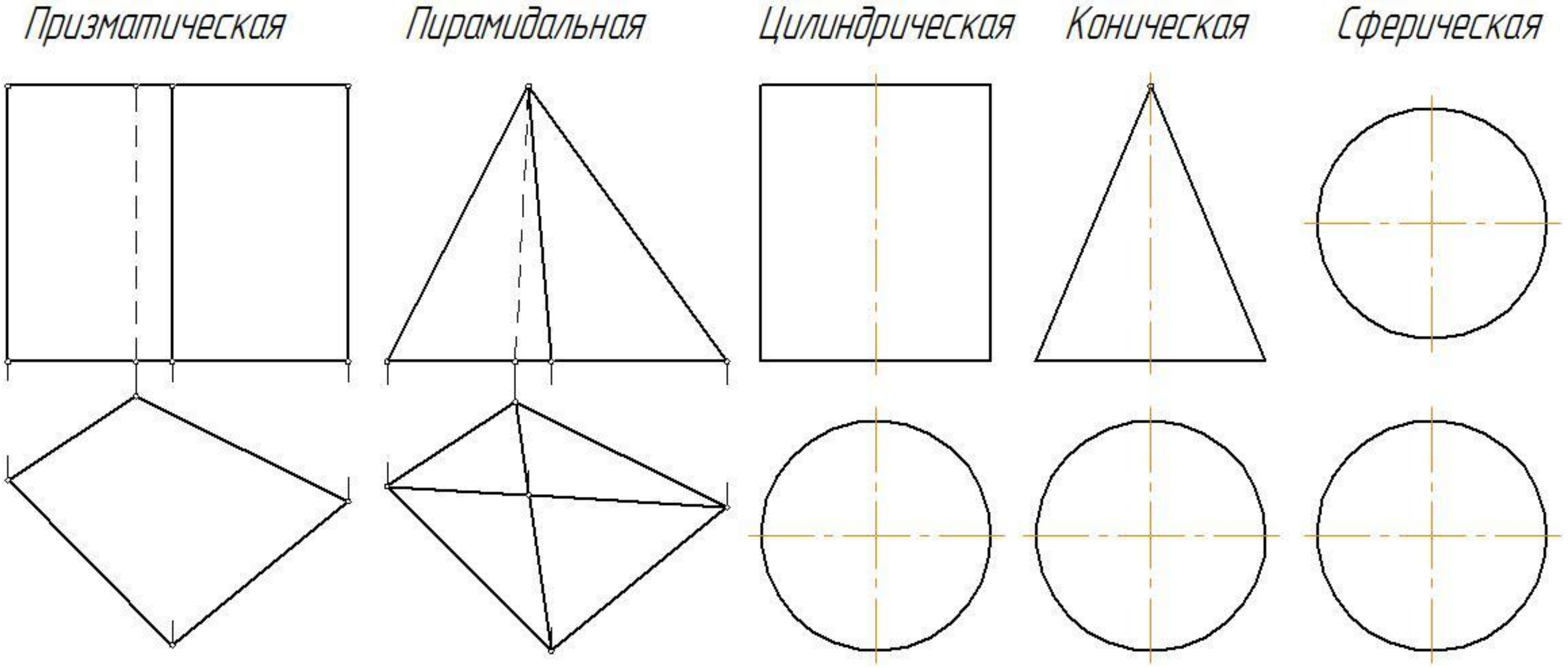
$\Omega \pitchfork \Phi = \mathbf{n}$,

$\Omega \cap \Pi_к = \mathbf{n}_k$’



Очерк поверхности – это <u>линия</u> пересечения плоскости проекций с проецирующей поверхностью, касательной к заданной поверхности и ее охватывающей.

Примеры поверхностей, заданных очерком



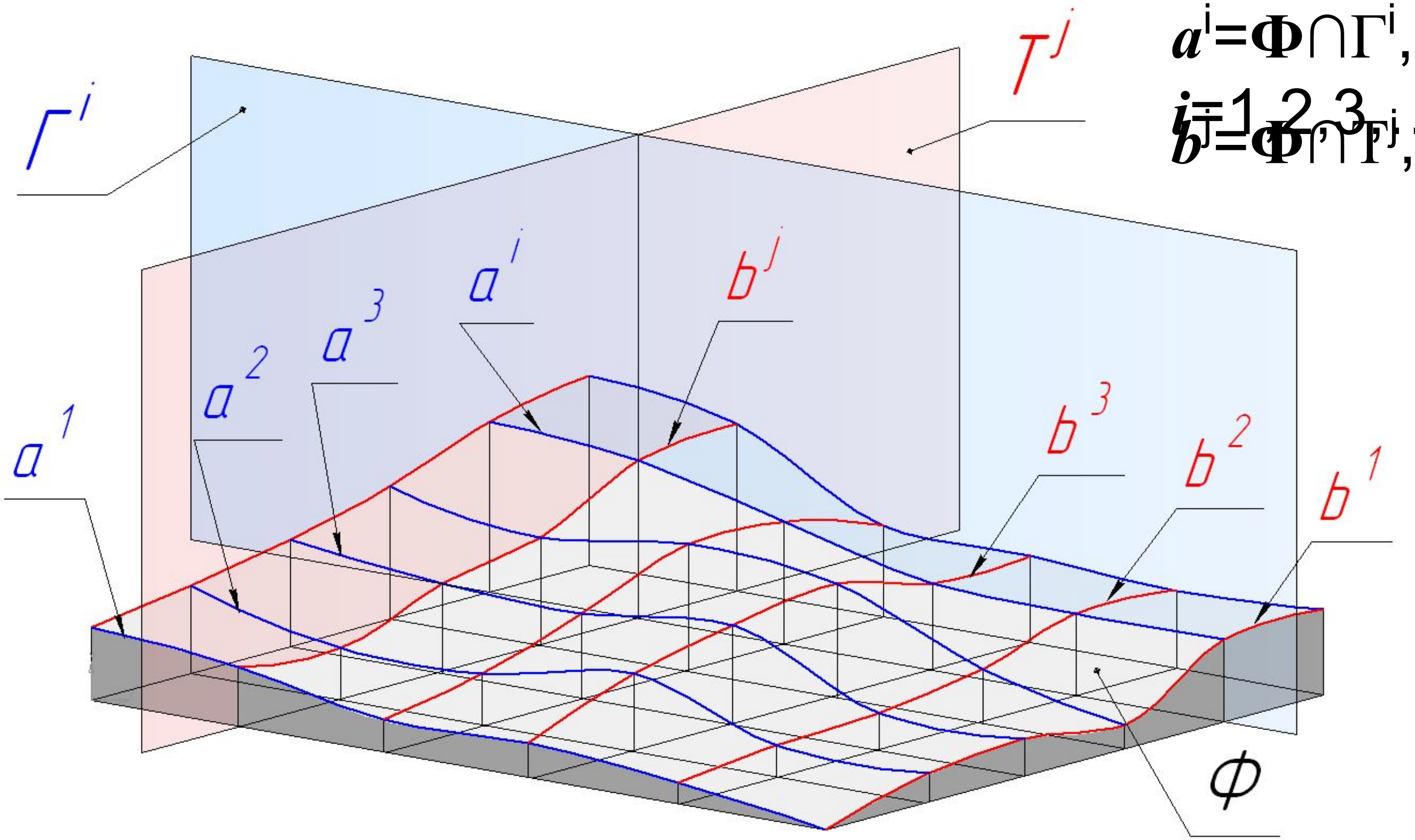
Каркас поверхности

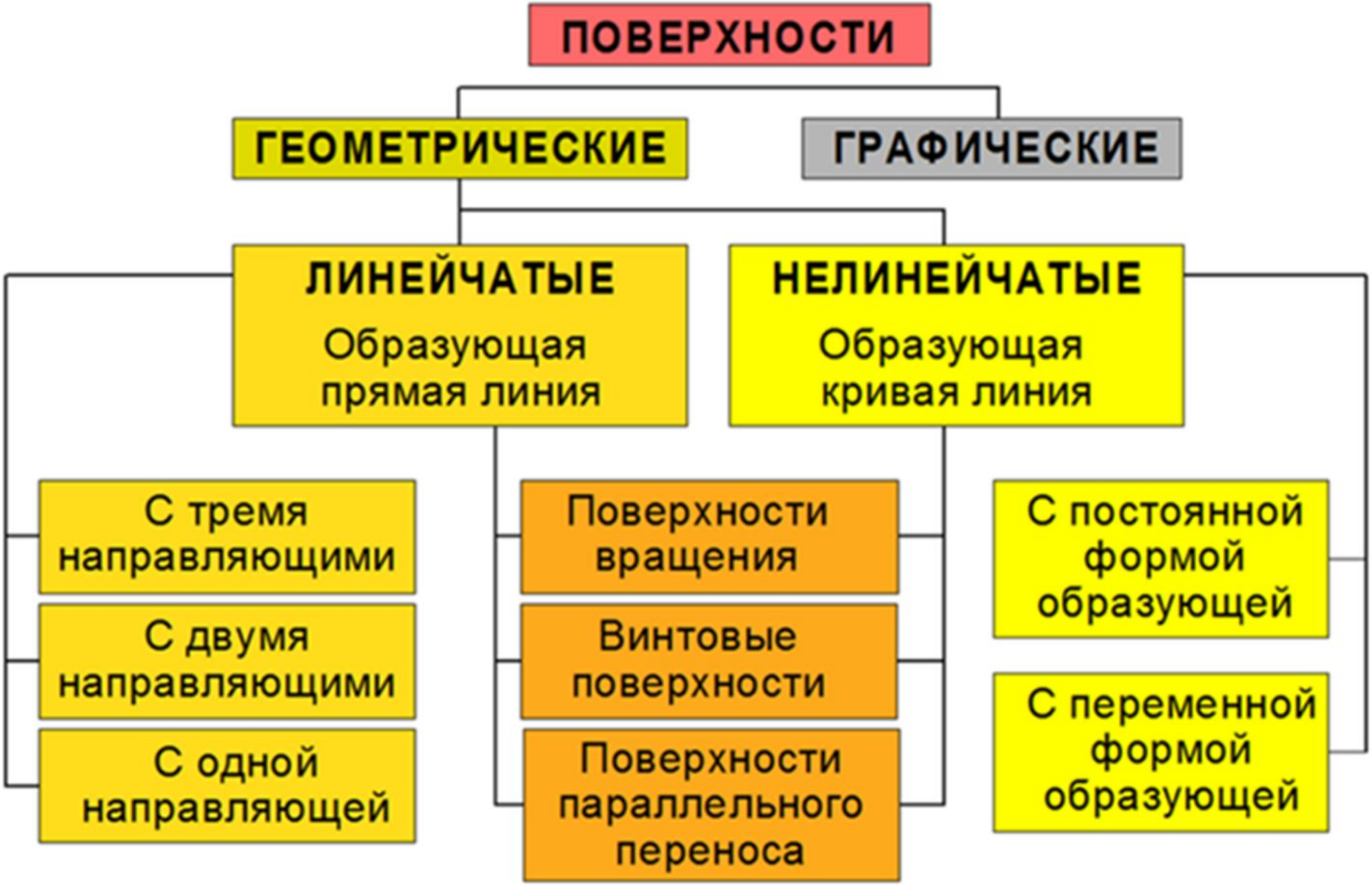
Каркас поверхности – это множество точек и линий, определяющих поверхность

$\Phi\ \{ a^i, b^j \}$

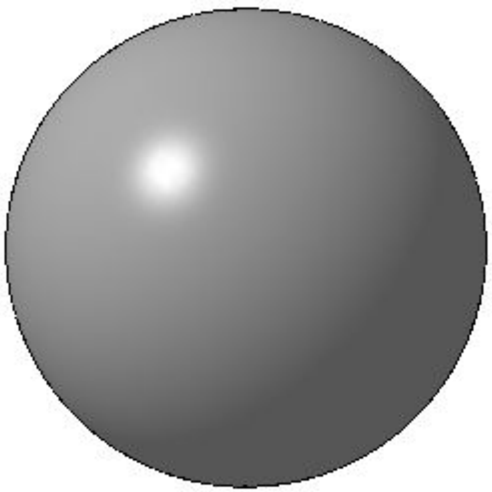
$a^i = \Phi \cap \Gamma^i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

$b^j = \Phi \cap \mathrm{T}^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

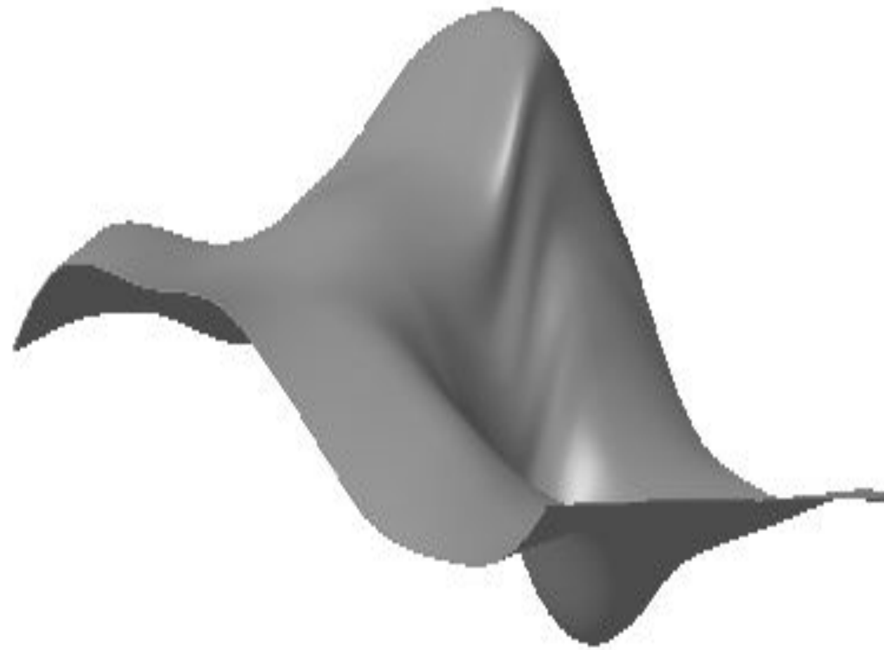



ПОВЕРХНОСТИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ГРАФИЧЕСКИЕ
ЛИНЕЙЧАТЫЕ
Образующая прямая линия
НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ
Образующая кривая линия
С тремя направляющими
С двумя направляющими
С одной направляющей
Поверхности вращения
Винтовые поверхности
Поверхности параллельного переноса
С постоянной формой образующей
С переменной формой образующей

Геометрическая поверхность



Графическая поверхность

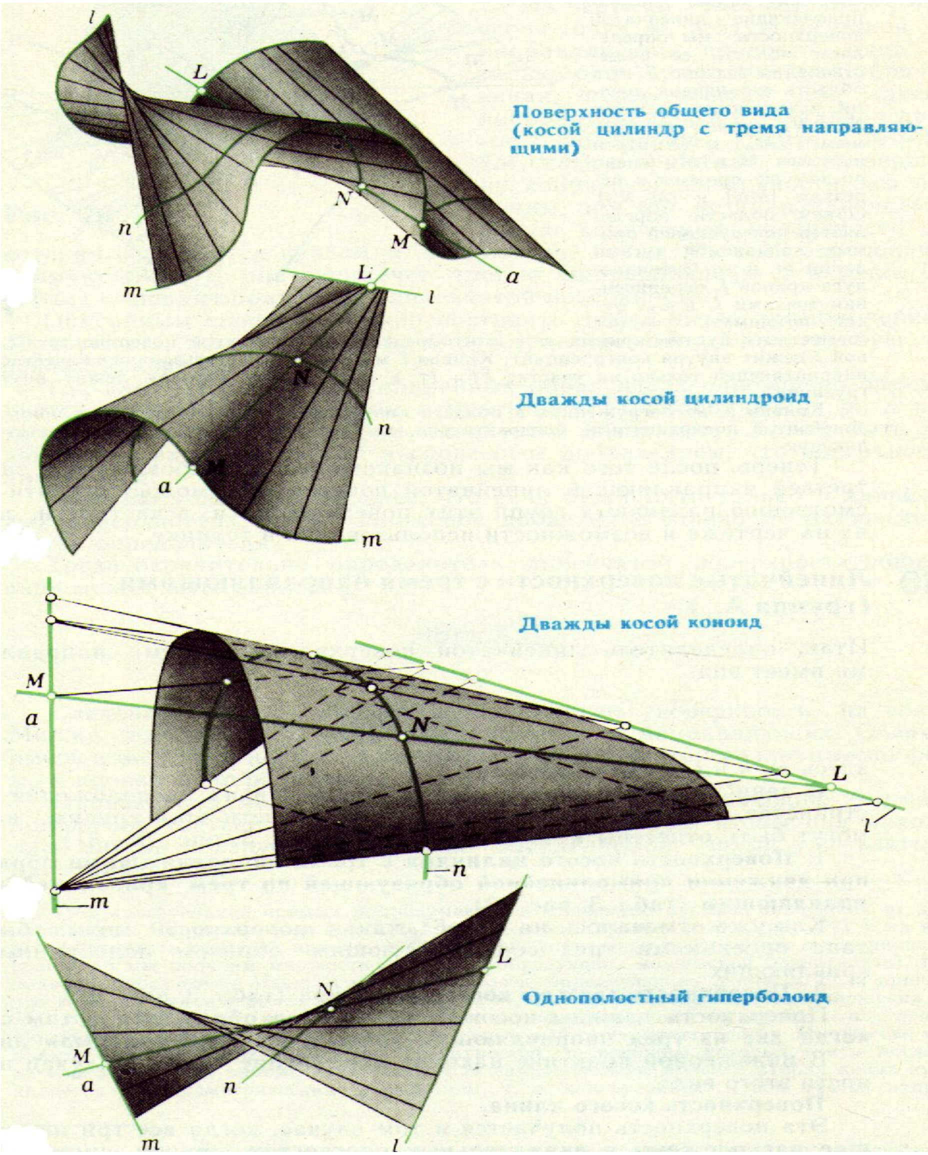


Геометрические поверхности

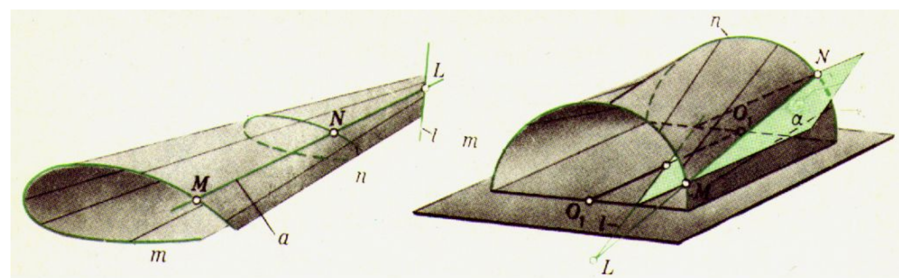
Линейчатые поверхности

Образующая поверхности – прямая линия

С тремя направляющими



$$\Phi\{g(d^1,d^2,d^3)(g\cap d^1,\ g\cap d^2,\ g\cap d^3)\}$$



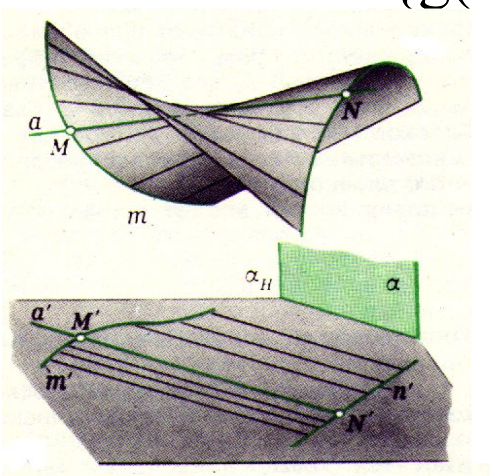
Поверхность косого клина

Поверхность косого перехода

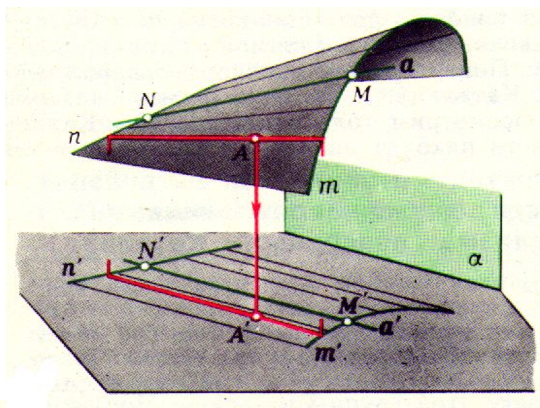
Линейчатые поверхности с двумя направляющими и направляющей плоскостью или плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)

$$\Phi\{g(d^1,d^2,\alpha)(g\cap d^1,\ g\cap d^2, g\parallel\alpha)\}$$

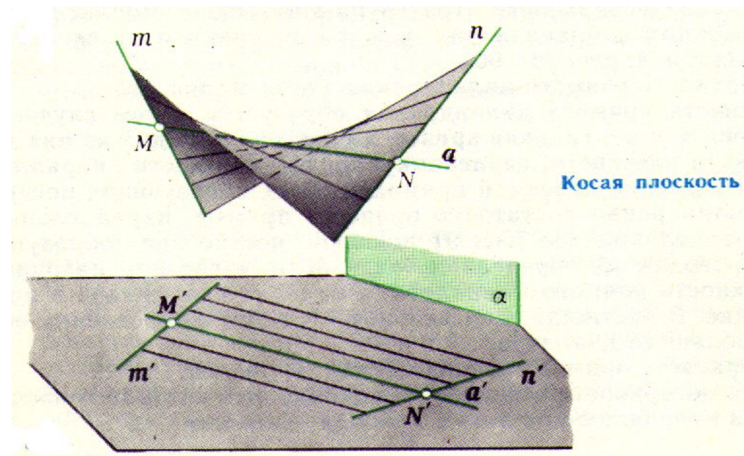
$$\Phi\{g(d_1,d_2,\alpha)(g\cap d_1,\ g\cap d_2, <\phi=(g\wedge\alpha)=const)\}$$



Поверхность прямого цилиндроида



Поверхность прямого коноида



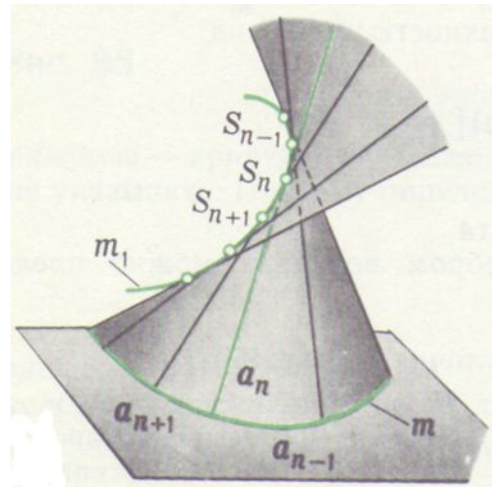
Косая плоскость

Гиперболический параболоид

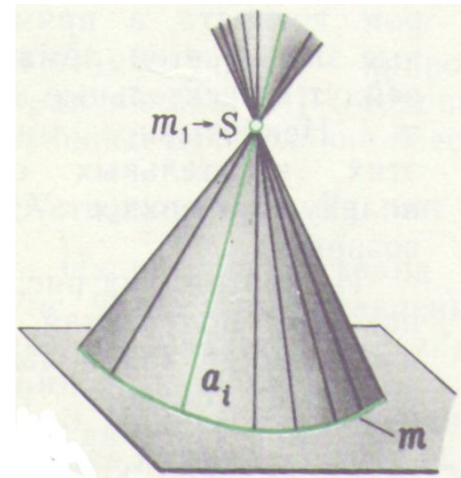
Линейчатые поверхности с одной направляющей
Торсы

$\Phi\{g(d,S)(g\cap d, S\in g)\}$

S - реальная точка



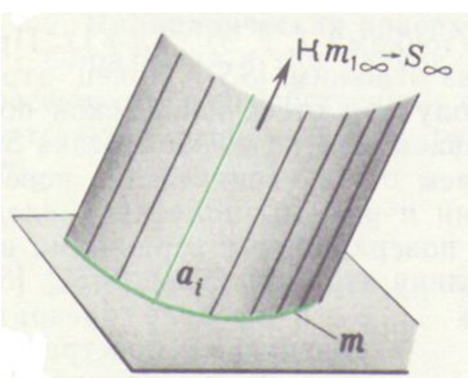
Поверхность с ребром возврата



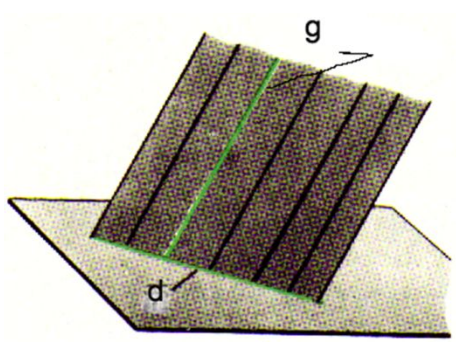
Коническая поверхность

$\Phi\{g(d,s)(g\cap d, g \parallel s)\}$

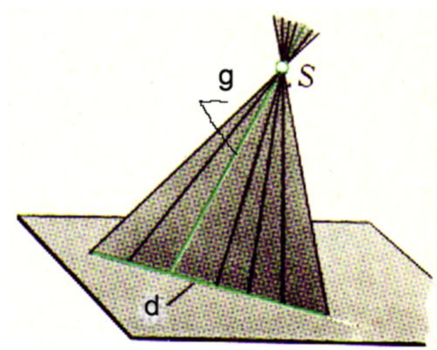
S^{∞} - несобственная точка пространства



Цилиндрическая поверхность



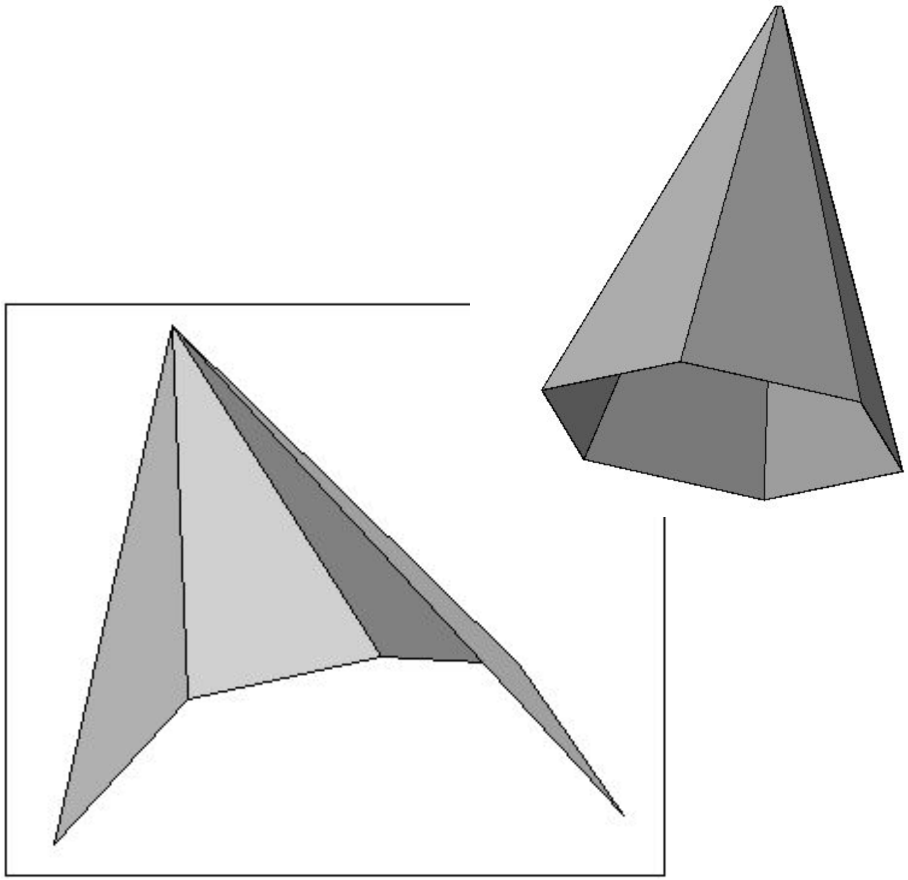
Плоскость



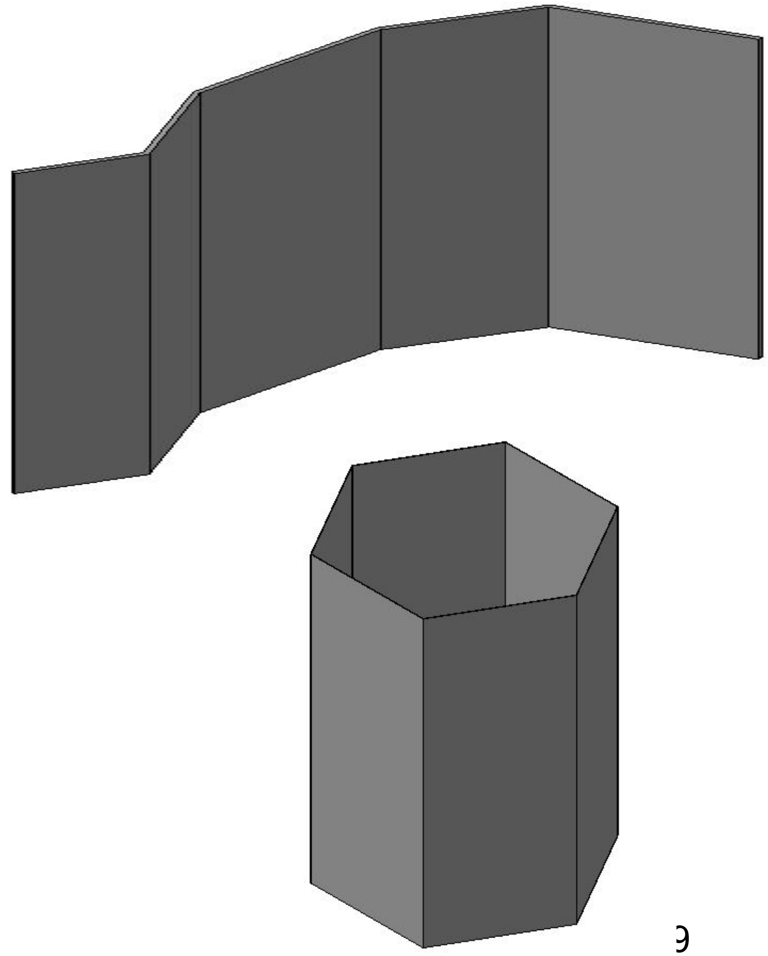
Плоскость

Гранные поверхности

Пирамидальная

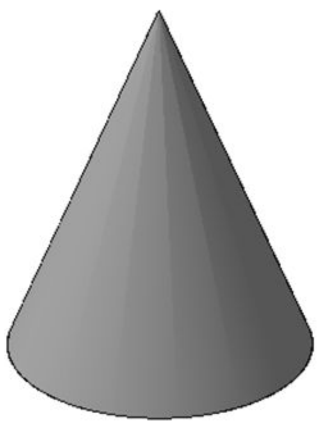


Призматическая

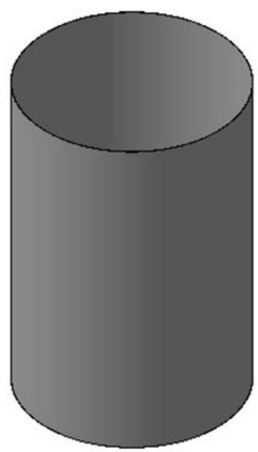


•Поверхность вращения
•линейчатая

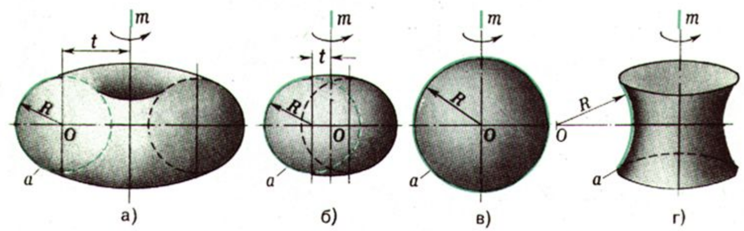
•нелинейчатая



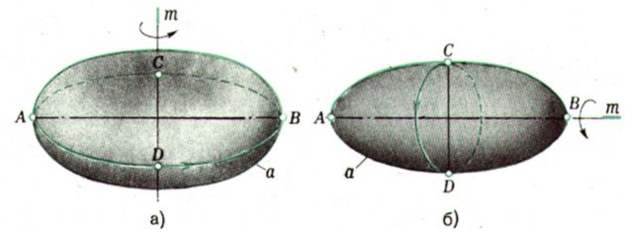
Коническая



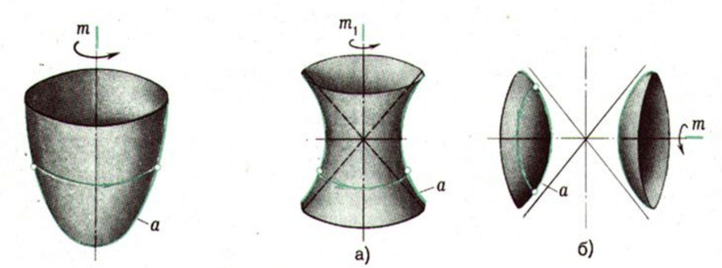
Цилиндрическая



Тор (а — открытый, б — закрытый), в — сфера, г — глобоид



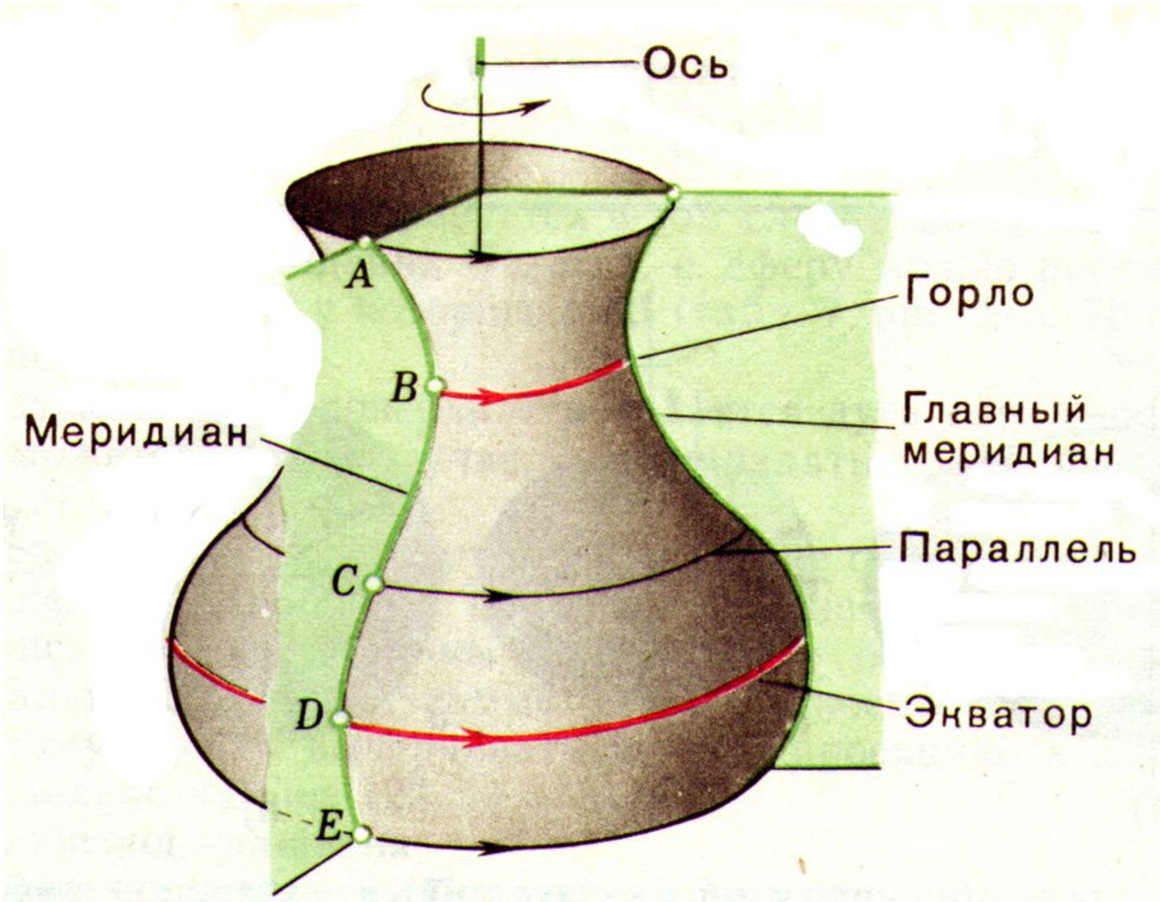
Эллипсоид (а — сжатый, б — вытянутый)

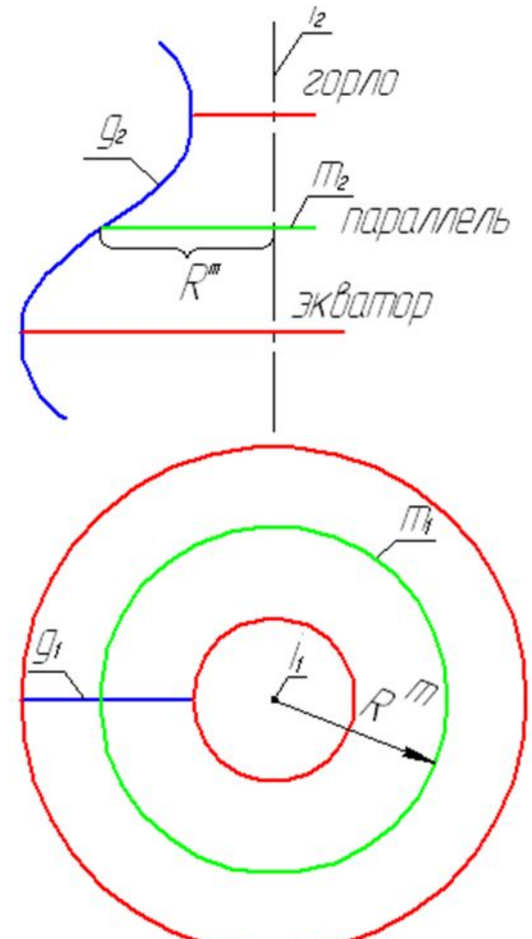


Параболоид вращения

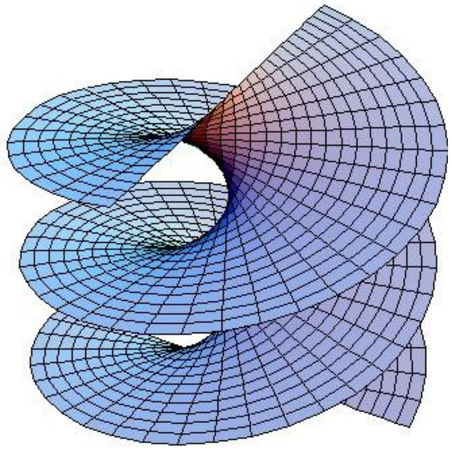
Гиперболоид вращения

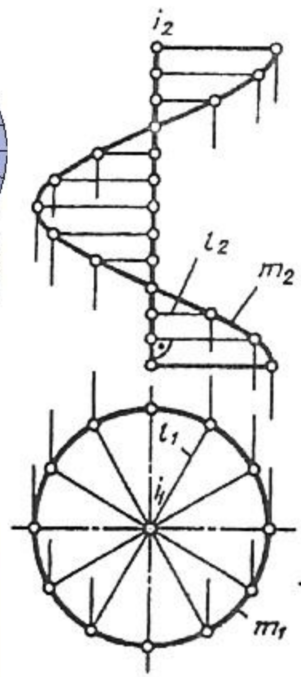
Основные элементы поверхности вращения



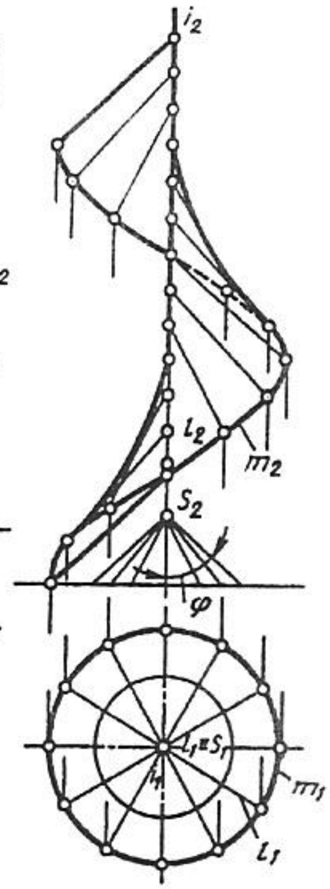


Винтовые поверхности





а

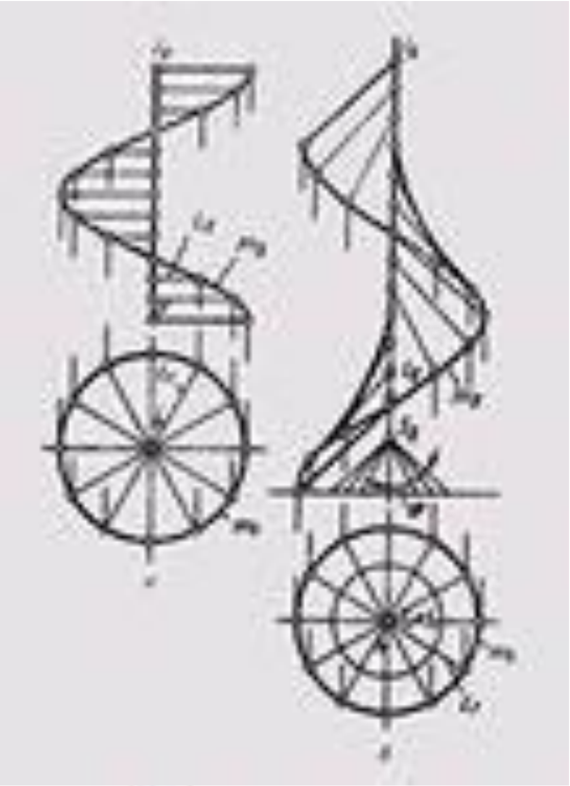


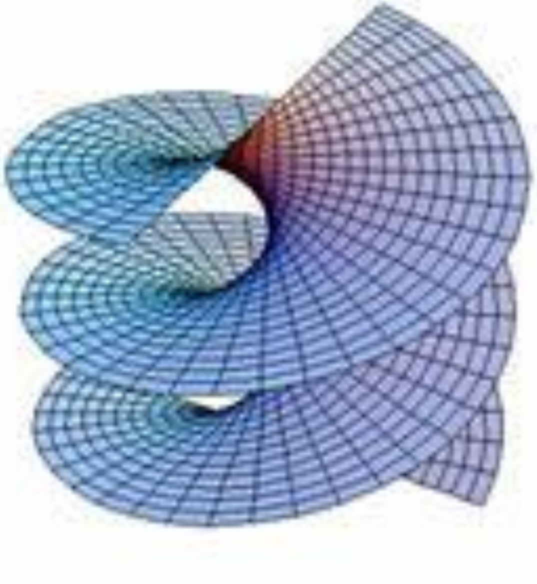
б

Прямой геликоид,
Винтовой коноид

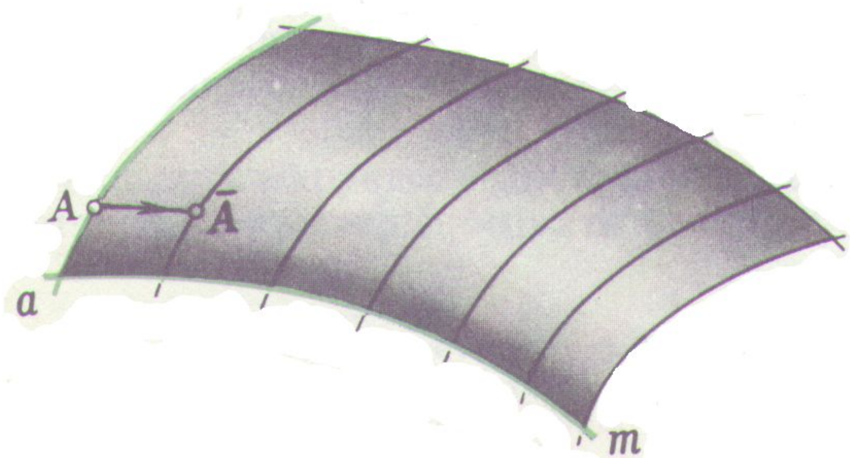
Винтовые поверхности

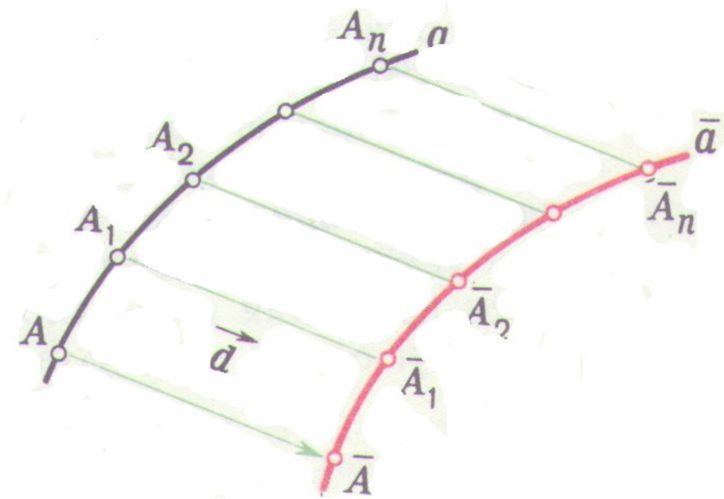
$$\Phi\{g(d^1,d^2)(g\cap d^1,g\cap d^2,(g\hat{\ }d^2)=\mathrm{const})\}$$





Поверхности параллельного переноса


A
$\bar{A}$
a
m


A_n
a
A_2
A_1
A
$\vec{d}$
$\bar{a}$
$\bar{A}_n$
$\bar{A}_2$
$\bar{A}_1$
$\bar{A}$

Обобщенные позиционные задачи

Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей этой поверхности

$$\mathbf{A} \in \mathbf{Ф} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in l,\ l \subset \mathbf{Ф}$$

Линия l должна на <u>проекциях</u> иметь наиболее простую геометрическую форму: прямая или окружность (по возможности)

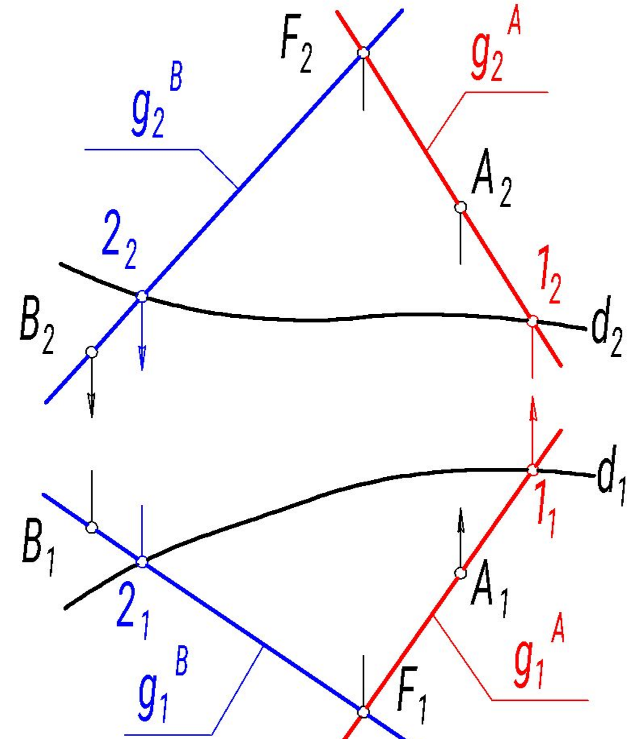
Точка на линейчатой поверхности

Так как образующей линейчатой поверхности является прямая линия, то условие принадлежности точки поверхности можно сформулировать как принадлежность точки образующей этой поверхности.

Для любой точки E ($\forall$ **E**), если **E**$\in$Ф и Ф{g( )( )}, то **E**$\in$g

Пример

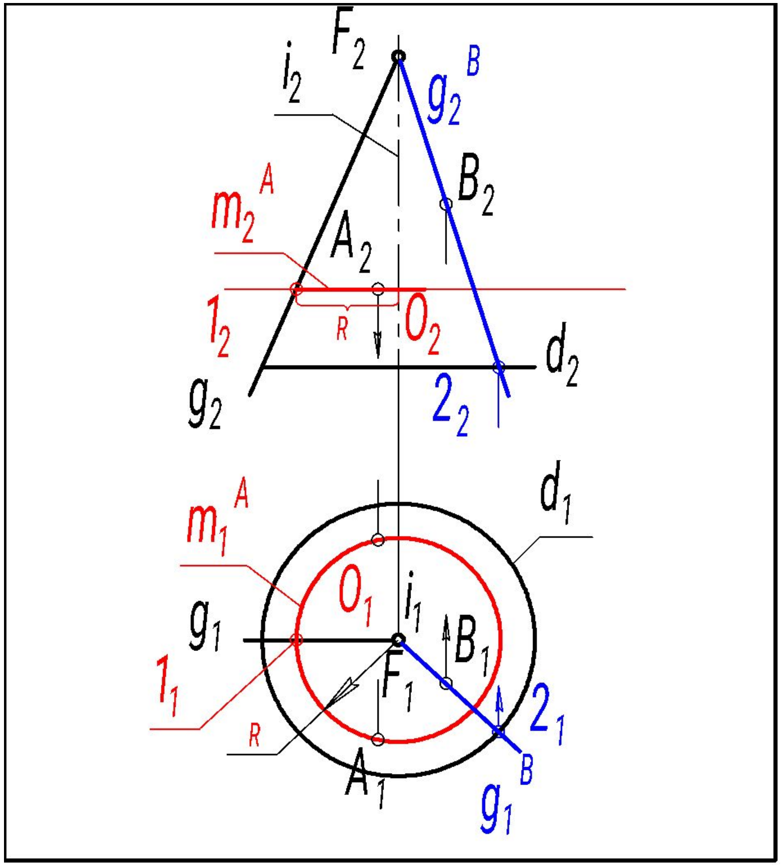
Ф{g(F,d)(F$\in$g, g$\cap$d)}



Точка на поверхности вращения

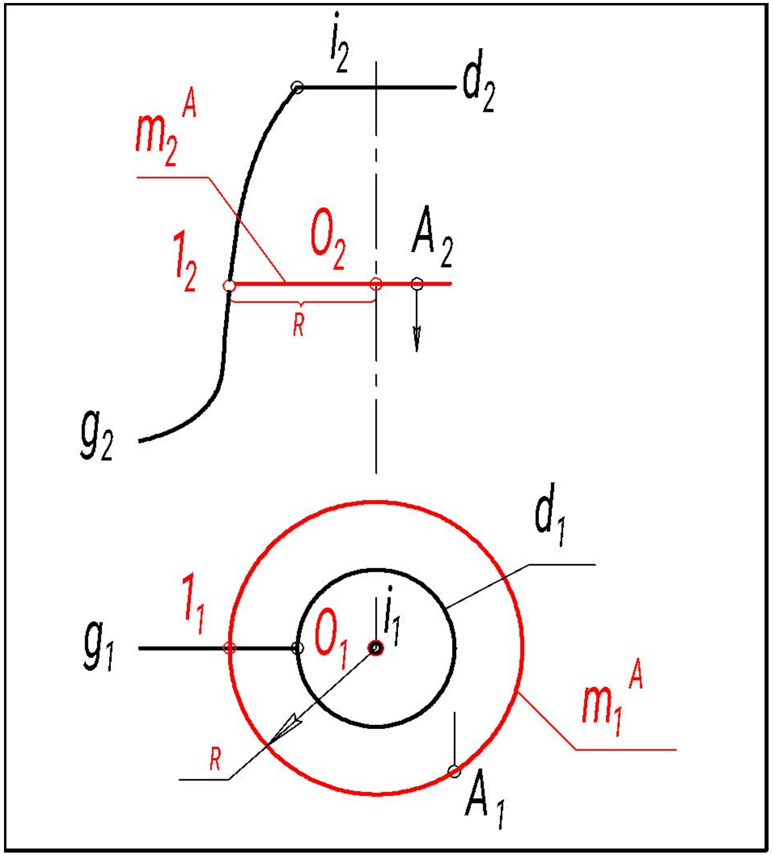
Линейчатая поверхность

Линия *l*, которой должна принадлежать точка, может иметь форму, как прямой линии (образующая), так и окружности (параллель).



Нелинейчатая поверхность

Линия *l*, которой должна принадлежать точка, может иметь только форму окружности (параллель).



Линия на поверхности

- Линия принадлежит поверхности, если все множество ее точек принадлежит этой поверхности.
- Следовательно, чтобы построить линию на поверхности, необходимо представить эту линию, как множество точек, и построить каждую из точек этого множества, используя условие принадлежности точки поверхности.

Построение произвольной линии на поверхности

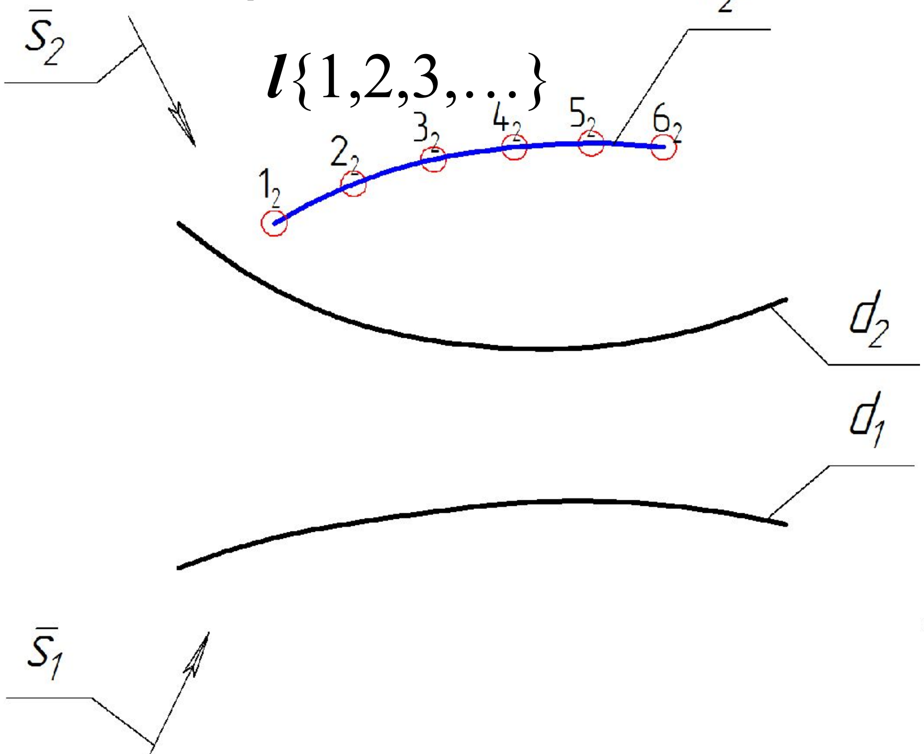
В качестве примера взята цилиндрическая поверхность общего вида

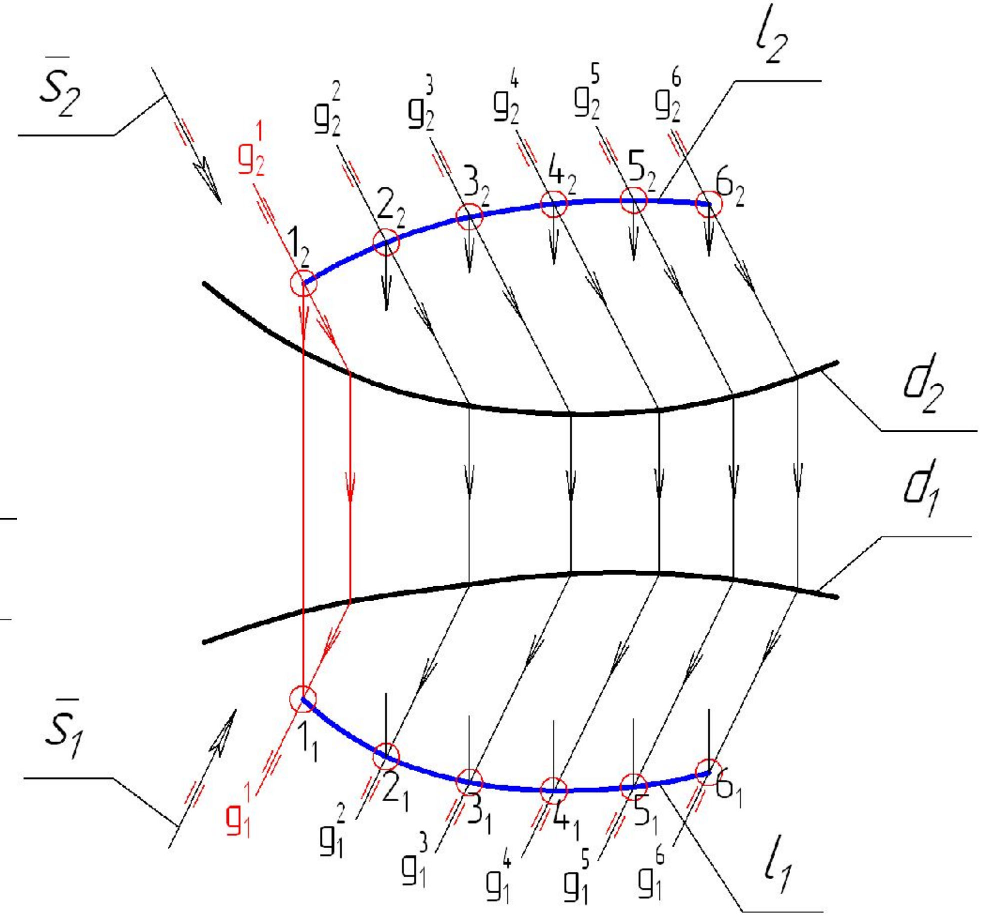
$\Phi\{g(d,\bar{s})(g\cap d,\ g \parallel \bar{s})\}$ Ф - линейчатая поверхность

Следовательно, для $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$, точка $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g} \in \Phi$

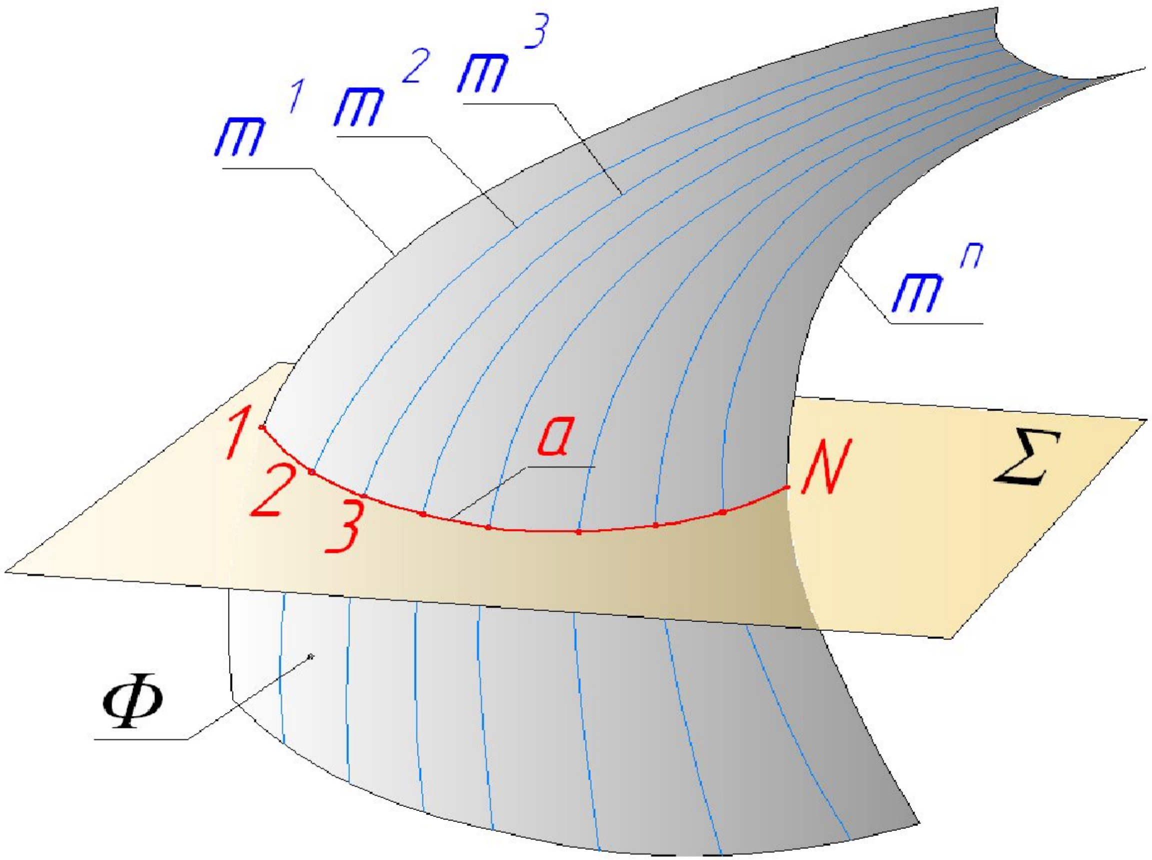
$\boldsymbol{l} \subset \Phi \Rightarrow \boldsymbol{l}\{1,2,3,\ldots\} \subset \Phi$

$\boldsymbol{l}\{1,2,3,\ldots\}$





Пересечение поверхности плоскостью



$\Sigma \cap \Phi = a$

$\Phi\{m^1, m^2, \ldots, m^n\}$

$a\{1, 2, \ldots, N\}$

$1 = m^1 \cap \Sigma$

$2 = m^2 \cap \Sigma$

....

$N = m^n \cap \Sigma$

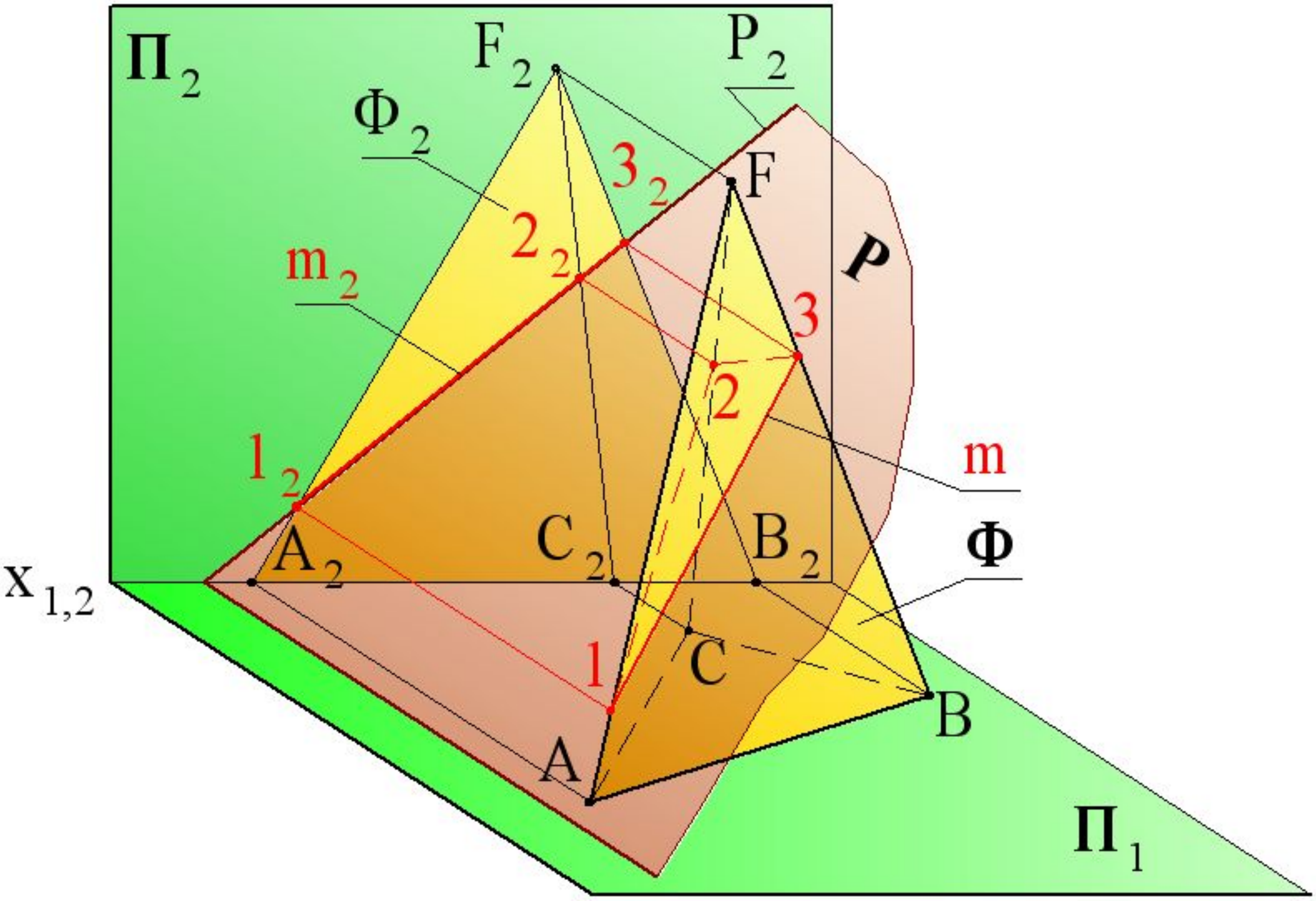
- Линию пересечения поверхности плоскостью следует рассматривать как множество точек пересечения секущей плоскости с линиями, принадлежащими поверхности.
- Форма линии пересечения поверхности плоскостью определяется формой заданной поверхности и положением плоскости относительно этой поверхности.
- Для кривой поверхности, *в общем случае*, линия пересечения - это плоская кривая линия.

Из всего множества точек линии пересечения должны быть обязательно построены следующие точки:

- точки, определяющие габариты формы фигуру сечения;
- точки, определяющие габариты фигуры сечения по высоте, глубине и длине;
- точки, определяющие видимость фигуры сечения на проекциях.

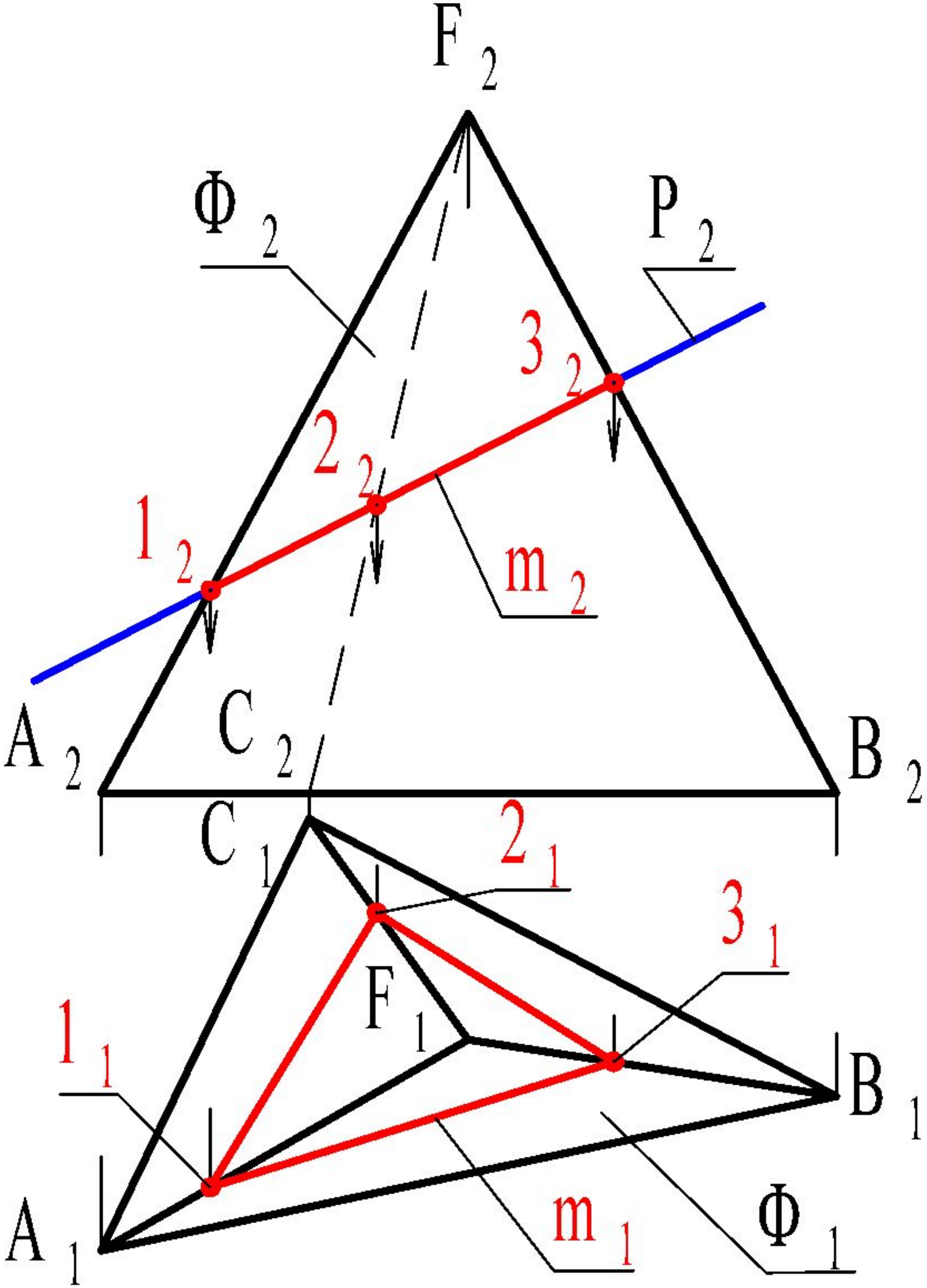
Пересечение гранной поверхности плоскостью

- При пересечении гранной поверхности плоскостью линия пересечения – это ломаная линия, каждый участок которой – отрезок прямой, представляющий собой линию пересечения грани поверхности (отсека плоскости) с секущей плоскостью, а точки излома – точки пересечения ребер гранной поверхности (отрезков прямых) с той же секущей плоскостью.
- Следовательно, решение задачи на построение линии пересечения сводится к определению точек пересечения ребер гранной поверхности с принятой секущей плоскостью.



Ф – трехгранная пирамида. **Р** – секущая плоскость. **Р** $\perp$ Π_2.
Простроить линию пересечения поверхности **Ф** пирамиды плоскостью **Р**.

$m=\Phi \cap P$; $m\{1,2,3\}$; $1=AF \cap P$; $2=BF \cap P$; $3=CF \cap P$.



$m = \Phi \cap P$;

$m \subset P$ и $m \subset \Phi$

$P \perp \Pi_2 \Rightarrow P_2 \equiv m_2$

$m\{1,2,3\}$;

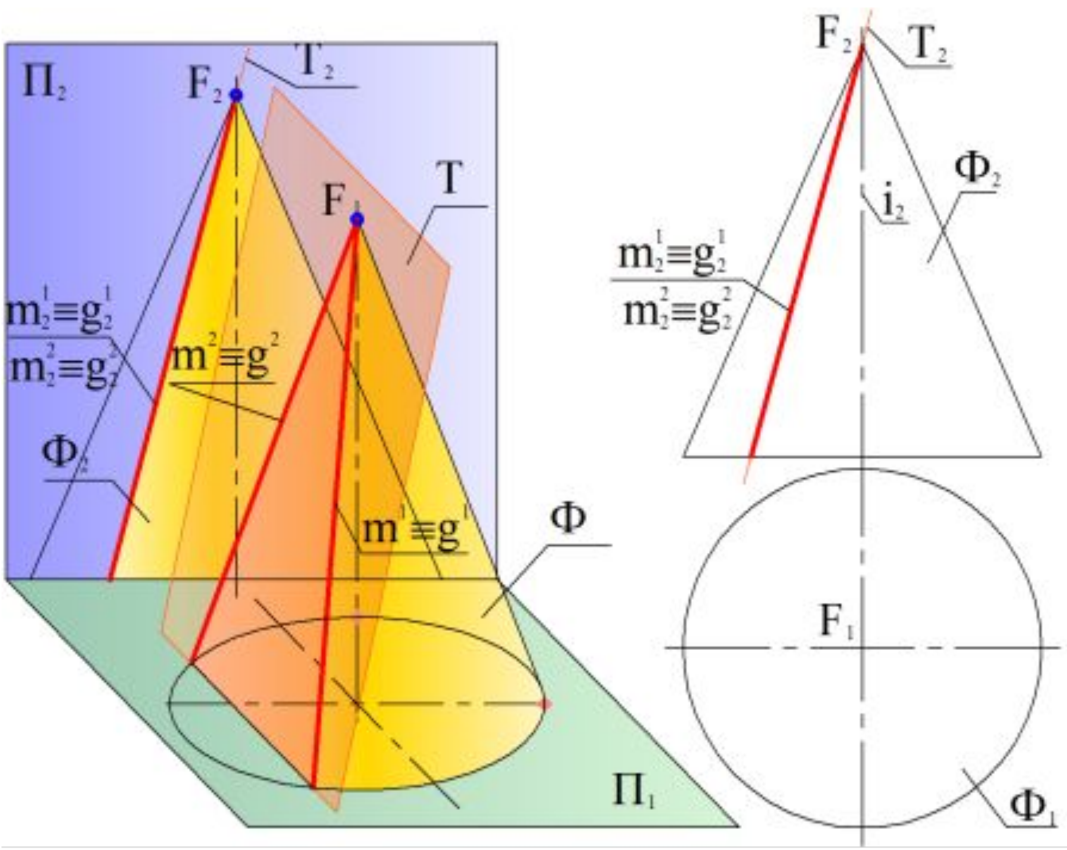
$1 = AF \cap P$;

$2 = CF \cap P$;

$3 = BF \cap P$

Пересечение конической поверхности плоскостью

При пересечении прямой круговой конической поверхности плоскостью форма линии пересечения определяется положением секущей плоскости относительно отдельных элементов поверхности.



Ф – прямая круговая коническая поверхность.

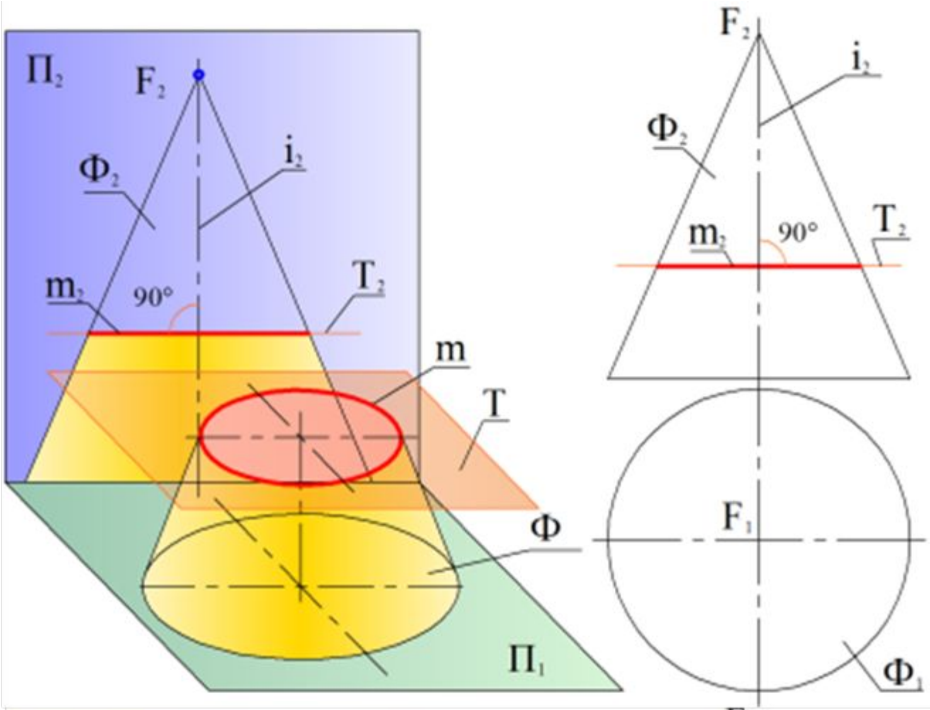
Т – секущая плоскость.

$$\mathbf{Ф} \cap \mathbf{T} = \boldsymbol{m},$$

m – линия пересечения,

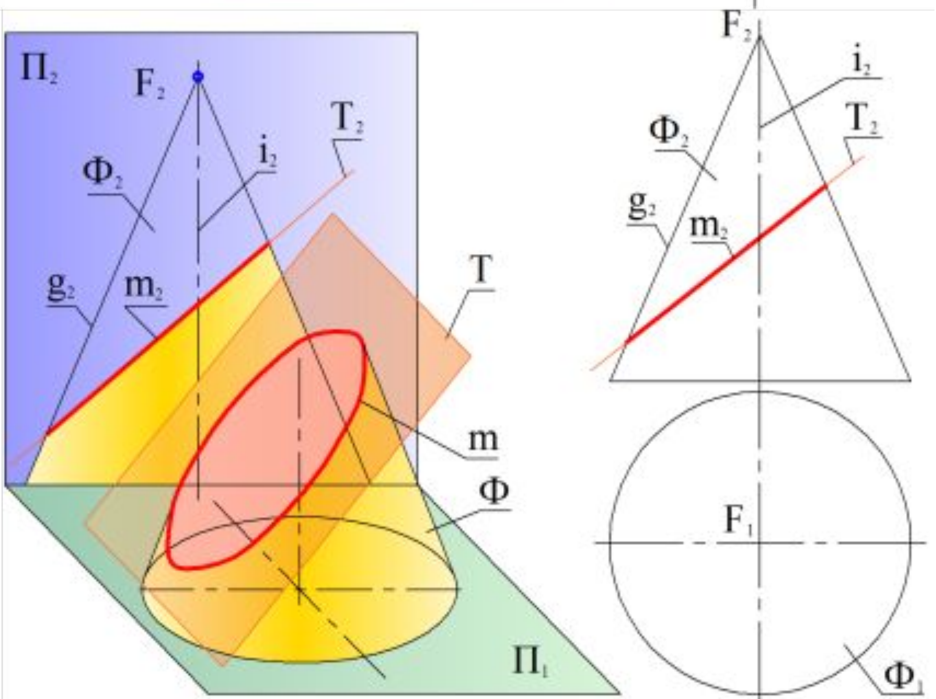
F∈**Т** ⇒ ***m*** – две прямые - образующие

$\boldsymbol{m}^1 \equiv \boldsymbol{g}^1$ и $\boldsymbol{m}^2 \equiv \boldsymbol{g}^2$



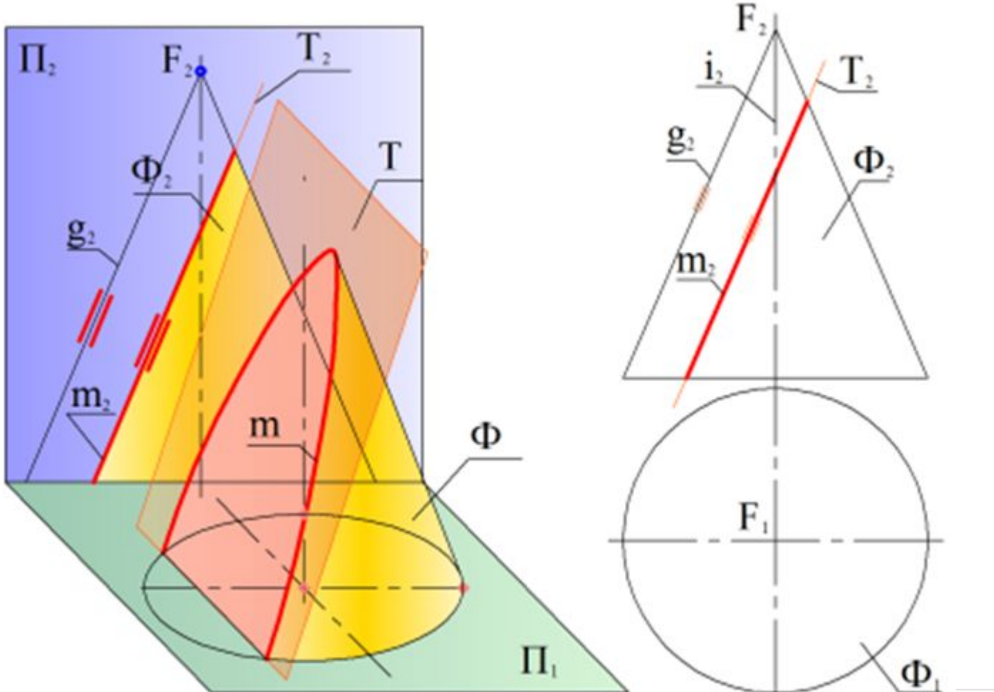
$\mathbf{T} \perp \boldsymbol{i}$, $\mathbf{m} \cap \boldsymbol{g}^n$, $n=1,2,3,\ldots,\infty$

$\Rightarrow$ ***m*** – окружность

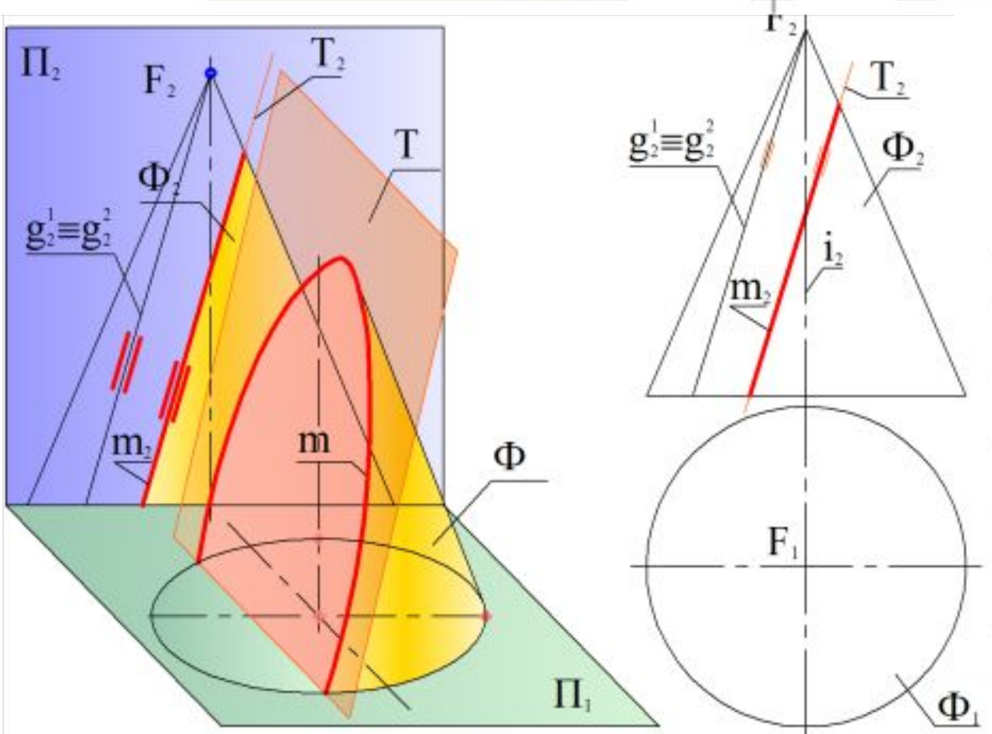


$\mathbf{T} \not\perp \boldsymbol{i}$, $\mathbf{m} \cap \boldsymbol{g}^n$, $n=1,2,3,\ldots,\infty$

m – эллипс



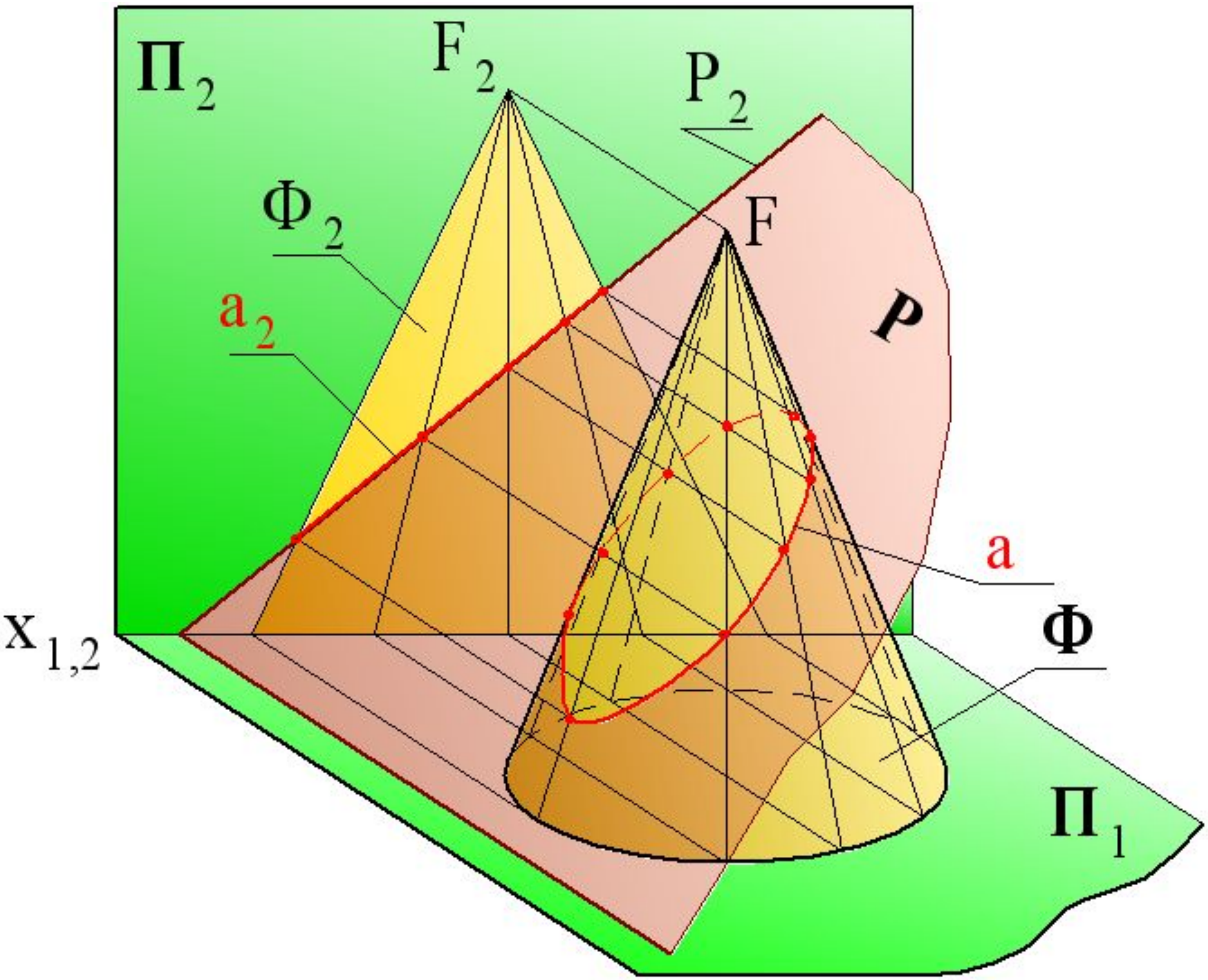
T || *g* ⇒ *m* – парабола

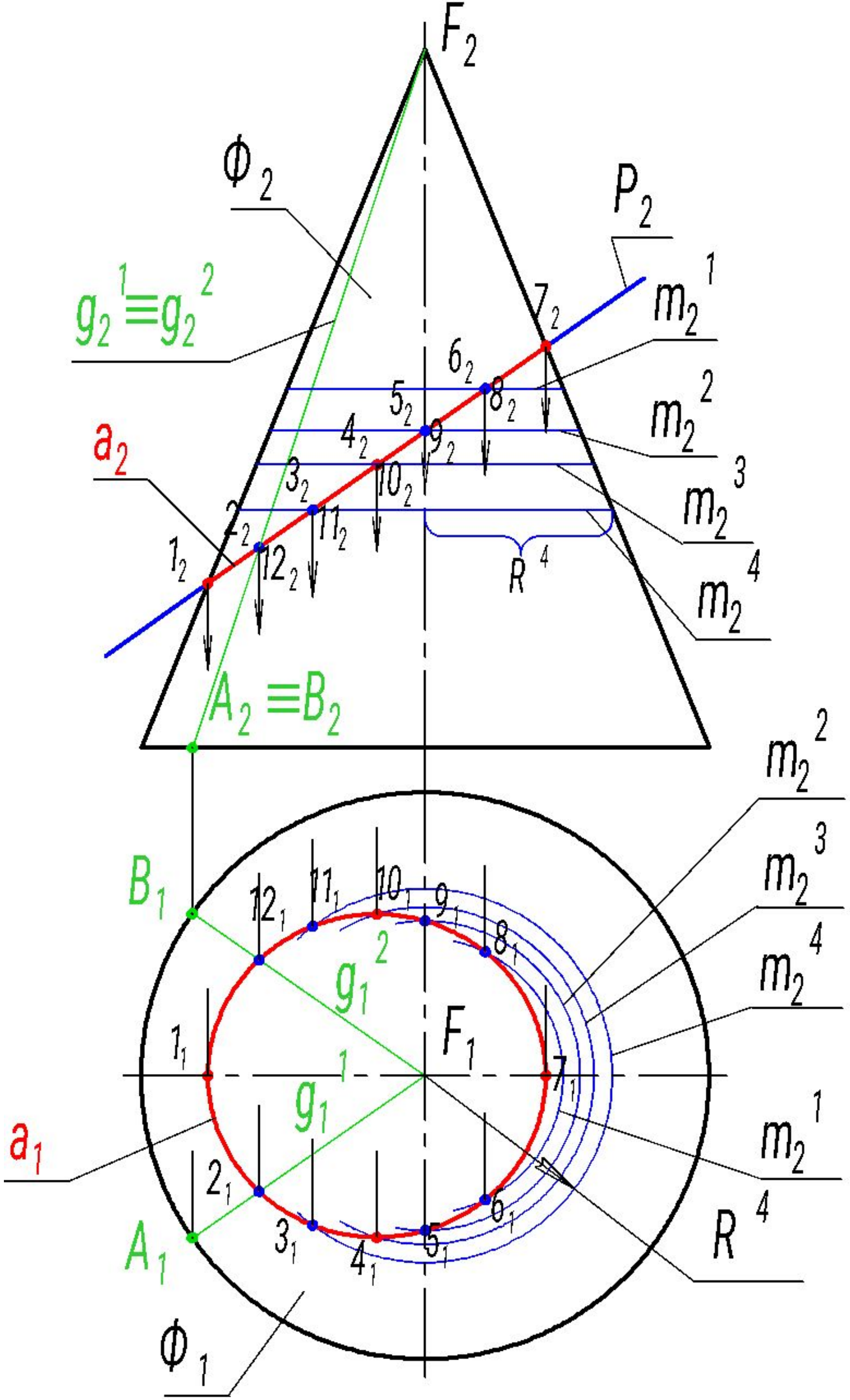


T || *g*^{1} и **T || *g*^{2} ⇒**

m – гипербола

В общем случае решение задачи на построение линии пересечения сводится к определению точек пересечения образующих поверхности с принятой секущей плоскостью.





Данная коническая поверхность относится к классу линейчатых и подклассу поверхностей вращения. Следовательно, для построения точки на поверхности можно использовать, как прямую линия (образующую), так и окружность (параллель).

Пересечение цилиндрической поверхности плоскостью

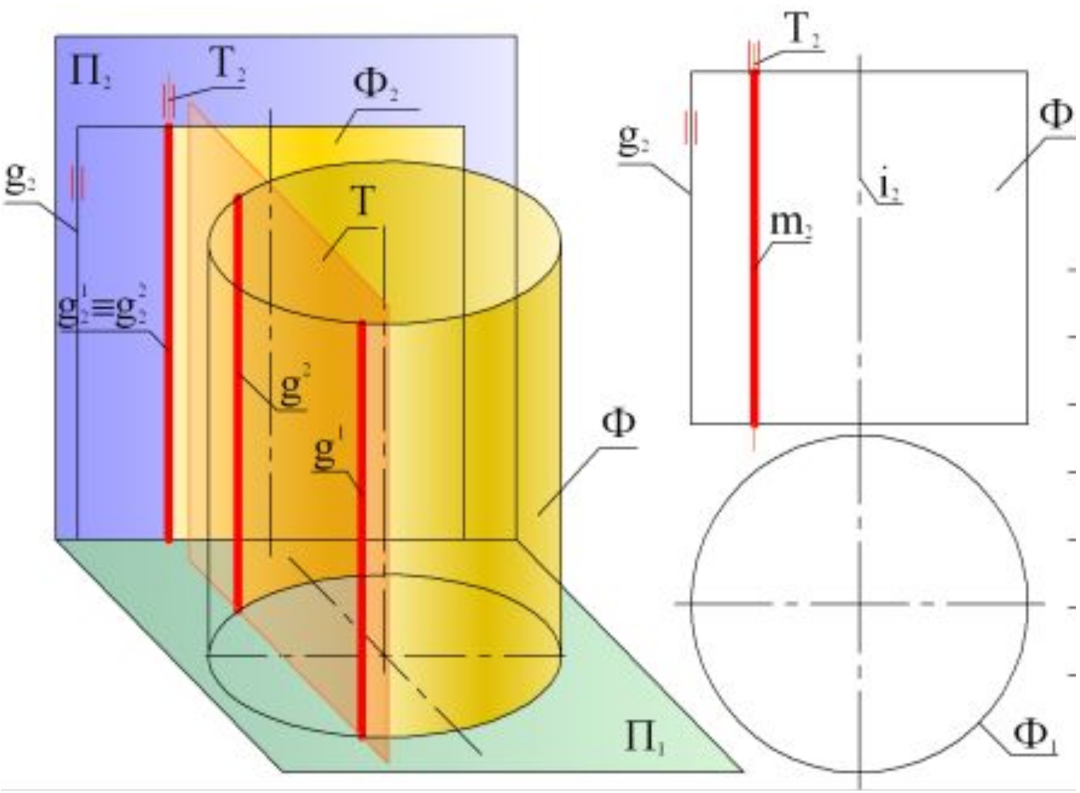
Форма линии пересечения прямой круговой цилиндрической поверхности плоскостью, так же как и при пересечении прямой круговой конической поверхности, определяется положением секущей плоскости относительно отдельных элементов поверхности.

Ф – прямая круговая цилиндрическая поверхность.

Т – секущая плоскость.

$$\mathbf{Ф} \cap \mathbf{T} = \boldsymbol{m},$$

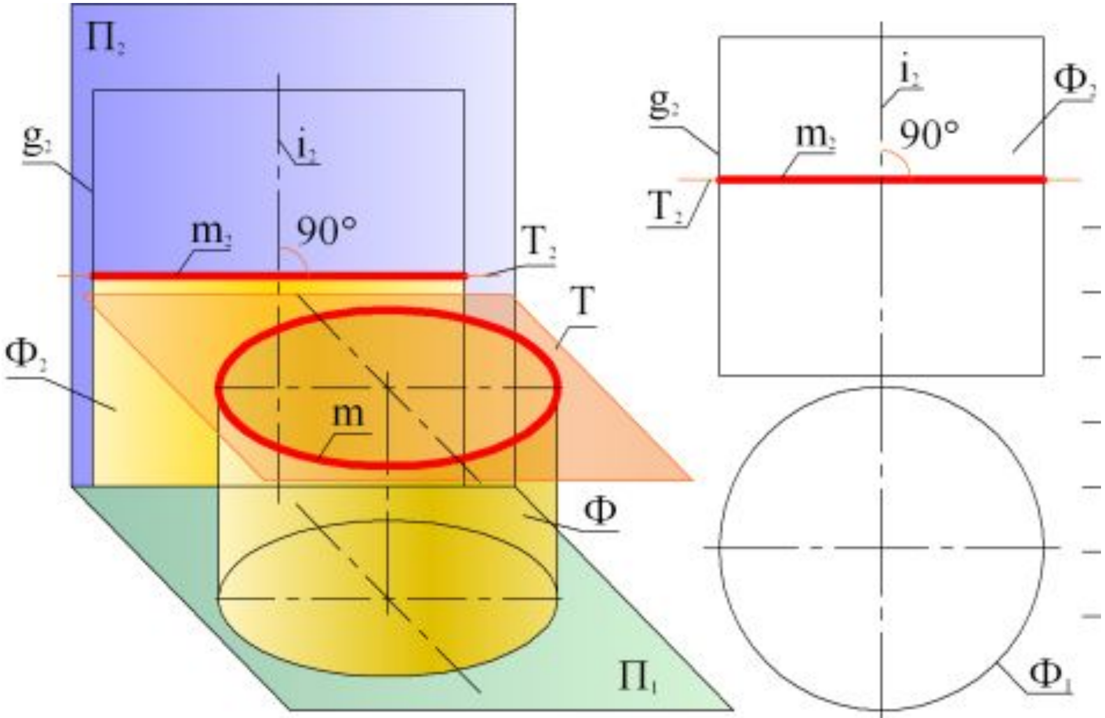
m – линия пересечения,



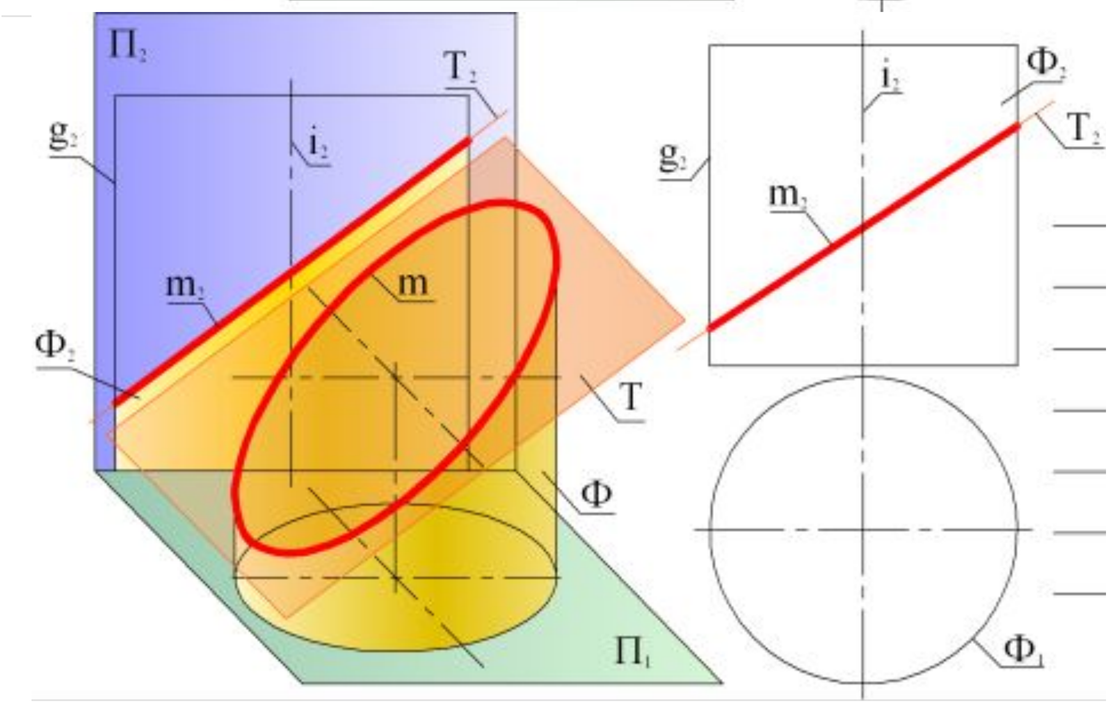
T II *g*^{n} , n=1,2,3,…,∞

⇒ ***m*** – две прямые – образующие

m^1≡ ***g***^{1} и ***m***^{2}≡ ***g***^{2}

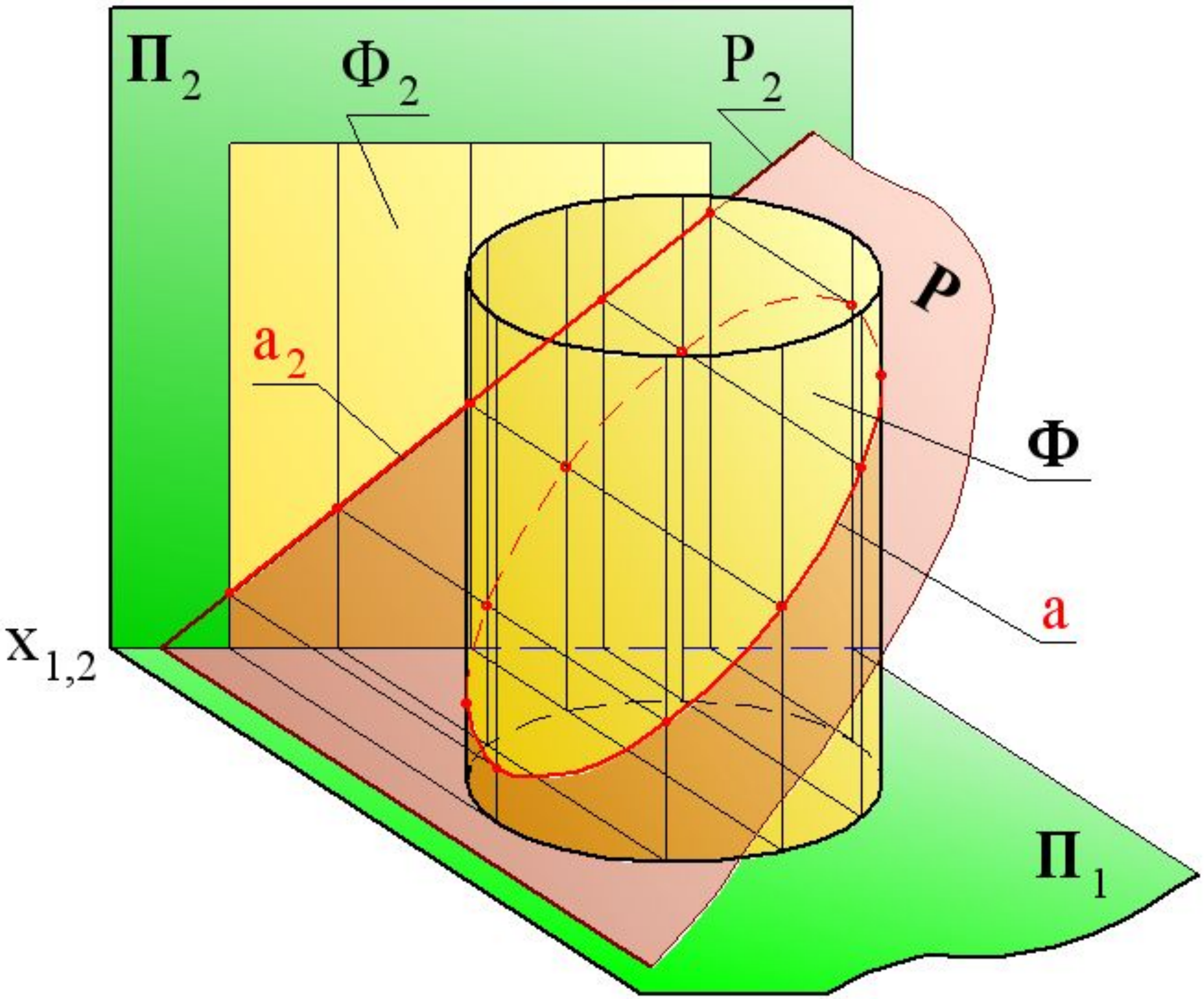


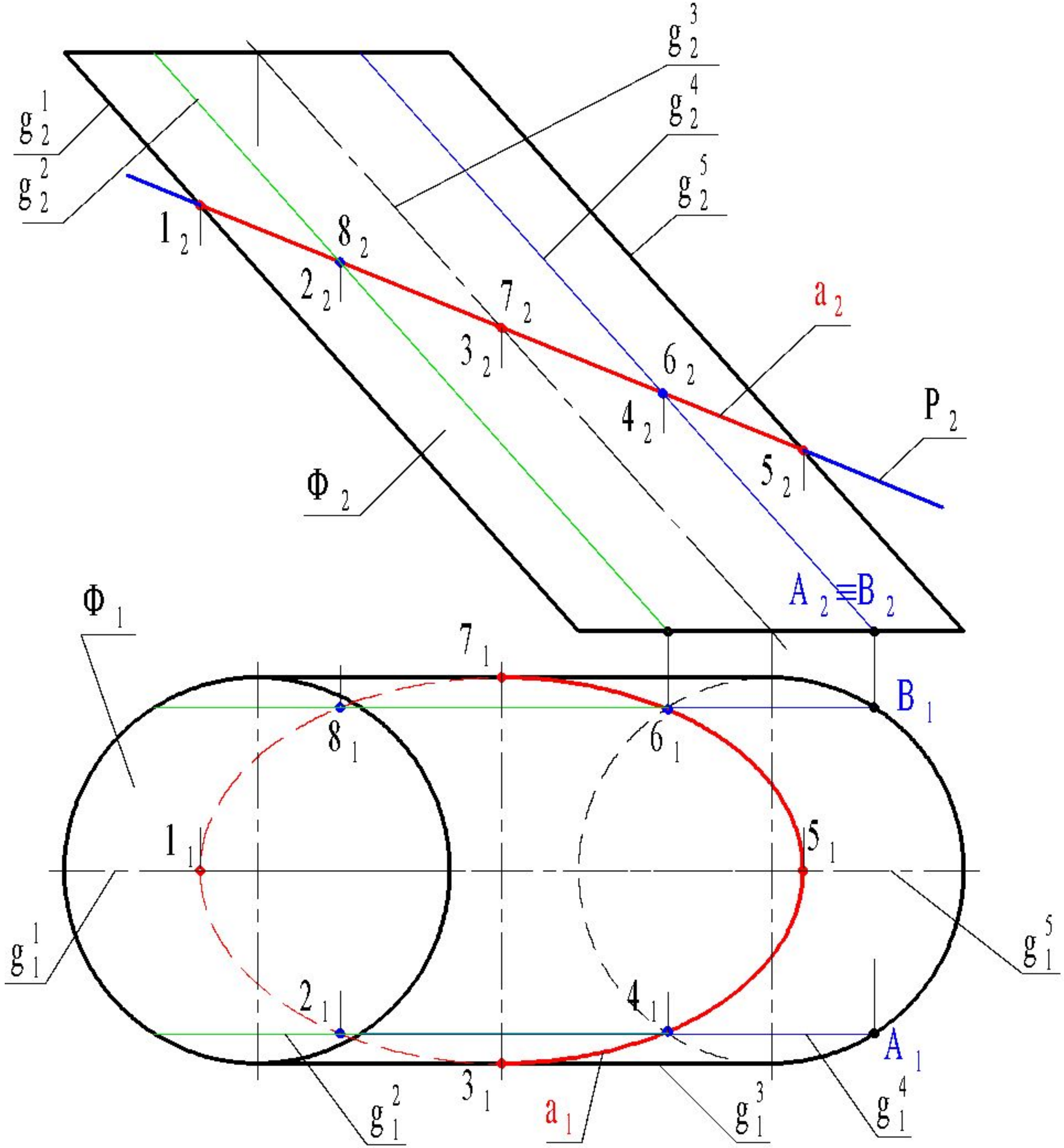
T $\perp$ ***i*****, m** $\cap$ ***g***^{n},
n=1,2,3,…,∞
⇒ ***m*** – окружность



T $\not\perp$ ***i*** , **m** $\cap$ ***g***^{n},
n=1,2,3,…,∞
⇒ ***m*** – эллипс

В общем случае решение задачи на построение линии пересечения цилиндрической поверхности плоскостью сводится к определению точек пересечения образующих поверхности с принятой секущей плоскостью.





g_2^3
g_2^1
g_2^4
g_2^2
g_2^5
1_2
8_2
2_2
7_2
a_2
3_2
6_2
4_2
P_2
5_2
Φ_2
Φ_1
A_2≡B_2
7_1
B_1
8_1
6_1
1_1
5_1
g_1^1
g_1^5
2_1
4_1
A_1
3_1
a_1
g_1^2
g_1^3
g_1^4