

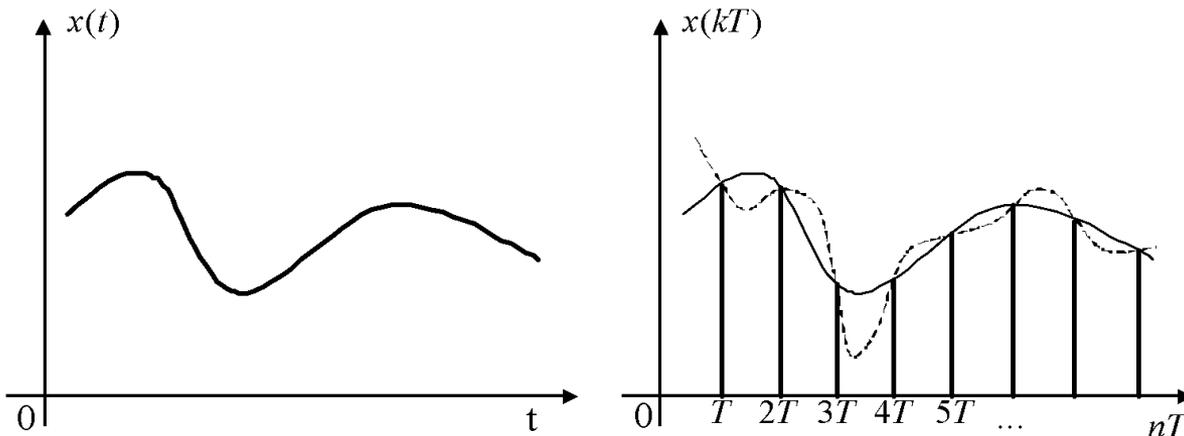
## Понятие о решетчатой функции и её разности

**Решетчатой** называется функция  $x(kT)$ , которая получена ординатами непрерывной функции  $x(t)$  в дискретные моменты времени  $t_k = kT, n=1, 2, \dots$

Итак, решетчатая функция существует только в дискретные моменты времени, а между ними она равняется нулю, так что можно записать:

$$x(kT) = x(t)|_{t=kT} \quad (1)$$

Решетчатые функции получаются при квантовании по времени непрерывных сигналов:



Дискретная функция отображает свойства непрерывной в фиксированные (дискретные) моменты времени

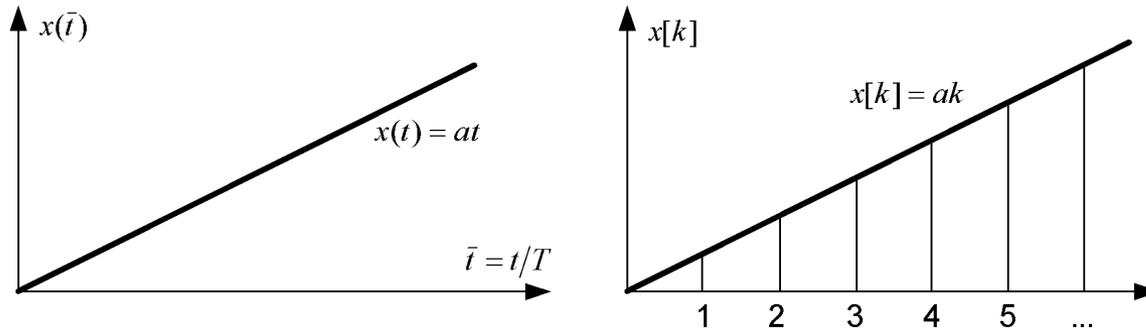
Отображение непрерывной функции в решетчатую является однозначным, в то же время, отображение решетчатой функции в непрерывную не является таковым.

Например, для непрерывной функции  $x(t) = e^{\beta t}$  соответствующей решетчатой функцией есть  $x(kT) = e^{\beta kT}$ , где  $T$  – период дискретности (такт квантования), а  $k$  – произвольное целое число.

## Понятие о решетчатой функции и её разности

Для удобства исследования дискретных систем часто вводят для рассмотрения новую переменную – так называемое относительное время:  $\bar{t} = t/T$ .

Тогда непрерывной функции  $x(\bar{t})$  аргументом будет соответствовать решетчатая  $x[k]$  с аргументом  $kT/T=k$ . Так, для непрерывной функции  $x(t)=at$  соответствующей будет решетчатая функция  $x[k]=ak$



Решетчатая функция с аргументом  $k$

По отношению к решетчатым функциям существует понятие **конечной разности**, которая является аналогом производной для непрерывной функции. Так, первая конечная разность решетчатой функции характеризует скорость её изменения:

$$\Delta x(kT) = \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} \quad (2) \text{ или } \Delta x[k] = x[k+1] - x[k] \quad (3) \text{ при применении относительного времени } \bar{t}$$

По аналогии, вторая разность, или разность второго порядка, равняется

$$\Delta^2 x[k] = \Delta x[k+1] - \Delta x[k] \quad (4) \text{ или } \Delta^2 x[k] = x[k+2] - x[k+1] - (x[k+1] - x[k]) = x[k+2] - 2x[k+1] + x[k] \quad (5)$$

# Понятие о решетчатой функции и её разности

Обобщая, разность порядка  $k$  определяется выражением:

$$\Delta^n x[k] = \Delta^{n-1} x[k+1] - \Delta^{n-1} x[k] = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i x[k+i] \quad (6)$$

где  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  (7) - число сочетаний из  $n$  элементов по  $i$ .

Для определения коэффициентов  $C$  удобно использовать так называемый «треугольник Паскаля», который составляется по итерационной формуле

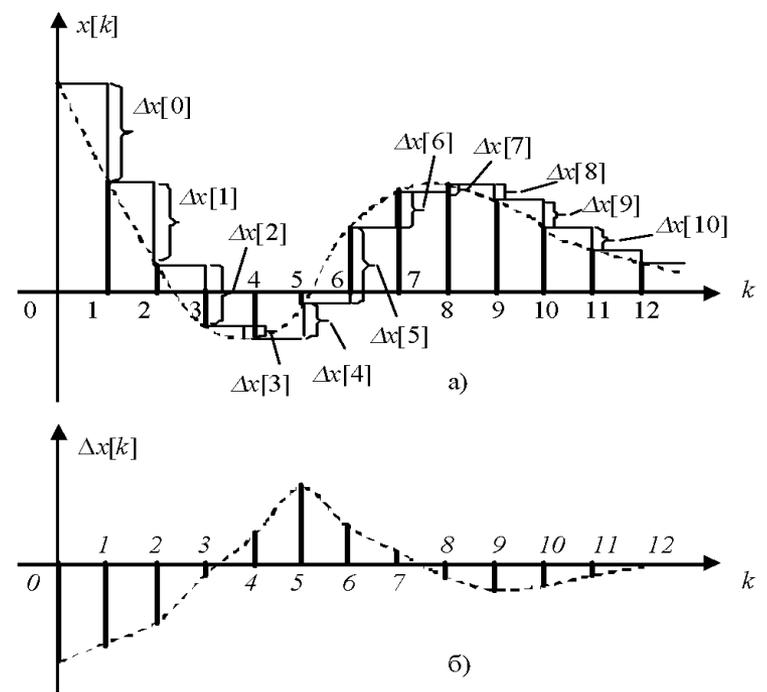
$$C_{n+1}^i = C_n^{i-1} + C_n^i \quad i = 2, \dots, n \quad (8)$$

и имеет вид:

			1	1						
			1	2	1					
		1	3	3	1					
		1	4	6	4	1				
	1	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8			
			1							

Например, воспользовавшись 4-м рядом «треугольника», можно сразу записать формулу для конечной разности 4-го порядка:

$$\Delta^4 x[n] = x[n+4] - 4x[n+3] + 6x[n+2] - 4x[n+1] + x[n]$$



К определению первой разности  
решетчатой функции

# Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Для исследования дискретных САР используются так называемые **разностные уравнения**, которые определяют взаимосвязь между решетчатой функцией и её разностями:

$$\begin{aligned} a_n \Delta^n y[k] + a_{n-1} \Delta^{n-1} y[k] + \dots + a_1 \Delta y[k] + a_0 y[k] = \\ = b_m \Delta^m u[k] + b_{m-1} \Delta^{m-1} u[k] + \dots + b_1 \Delta u[k] + b_0 u[k]. \end{aligned} \quad (9)$$

Оператор  $\Delta$  для дискретной функции является своеобразным аналогом оператора дифференцирования  $D=d/dt$  для непрерывной функции:

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta^i y(kT)}{T^i} \approx \frac{\Delta^i y[k]}{T^i} \quad (10)$$

Это выражение можно использовать для нахождения аналога линейного ДУ в виде разностного.

Если в уравнение (9) подставить выражение для конечных разностей (6), то получим **неоднородное линейное разностное уравнение**, которое определяет зависимость между значениями решетчатой функции в разные дискретные моменты времени

$$\begin{aligned} a_n^* y[k+n] + a_{n-1}^* y[k+n-1] + \dots + a_1^* y[k+1] + a_0^* y[k] = \\ = b_m^* u[k+m] + b_{m-1}^* u[k+m-1] + \dots + b_1^* u[k+1] + b_0^* u[k]. \end{aligned} \quad (11)$$

(13)

Учитывая, что дискретный оператор  $z$  связан с непрерывным оператором Лапласа  $p$  выражением:  $z = e^{Tp}$  то для перехода от разностного уравнения в области времени в виде (11) к соответствующему уравнению в области оператора  $z$  изображения сигналов, которые опережают сигнал в текущий момент времени  $x[k]$  на  $i$  тактов, умножаются на  $z^i$ , а изображения сигналов, которые запаздывают относительно этого сигнала на  $i$  тактов – умножаются на  $z^{-i}$ , то есть

$$\begin{aligned} x(kT) = x[k] &\rightarrow x(z), \\ x(kT + iT) = x[k+i] &\rightarrow z^i x(z), \\ x(kT - iT) = x[k-i] &\rightarrow z^{-i} x(z). \end{aligned} \quad (14)$$

# Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

По таким правилам уравнение (11) преобразуется к виду

$$(a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_1^* z + a_0^*) y(z) = (b_m^* z^m + b_{m-1}^* z^{m-1} + \dots + b_1^* z + b_0^*) u(z) \quad (15)$$

откуда легко определяется **дискретная передаточная функция (ДПФ) импульсной системы в полиномиальной форме** как отношение изображений выходного сигнала к входному при нулевых начальных условиях

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_m^* z^m + b_{m-1}^* z^{m-1} + \dots + b_1^* z + b_0^*}{a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + a_1^* z + a_0^*} \quad (16)$$

условием физической реализации передаточной функции ДПФ является  $m \leq n$ , т.е., степень полинома числителя не должна превышать степень полинома знаменателя. Если это условие не выполняется, это означает, что выходной сигнал опережает входной, что невозможно с диалектической точки зрения.

Полином  $G_n(z)$  в знаменателе ДПФ называется **характеристическим полиномом (Denominator)**, уравнение

$$G_n(z) = 0 \quad \text{– характеристическим уравнением, а его корни} \quad \mathbf{P}_d = [p_{d1}, p_{d2}, \dots, p_{dk}]$$

– **дискретными полюсами (Poles), или собственными числами (Eigen Value)** системы.

Полином  $H_m(z)$  в числителе ДПФ называют **полиномом воздействия (Numerator)**. Корни уравнения

$$H_m(z) = 0 \quad \text{называются} \quad \text{дискретными нулями (Zeros):} \quad \mathbf{Z}_d = [z_{d1}, z_{d2}, \dots, z_{dm}]$$

# Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Свободное движение системы будет устойчивым при условии  $|p_{di}| < 1$

поскольку только при таких условиях его решение будет сходиться

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[k] = \sum_{i=1}^n \lim p_{di}^k = 0 \quad (18)$$

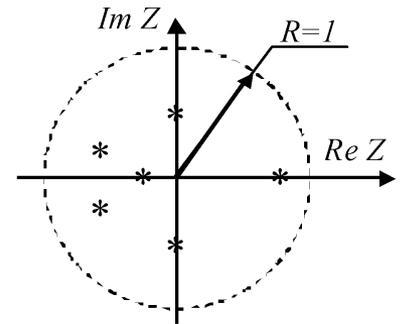
Условие устойчивости дискретной системы может быть сформулировано так: **дискретная САР будет устойчивой, если корни её характеристического уравнения, изображенные на комплексной z-плоскости, лежат внутри окружности единичного радиуса**, или по модулю меньше единицы.

## Пример

Получить разностное уравнение и дискретную передаточную функцию из дифференциального уравнения непрерывного объекта:

$$5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

сравнить переходные функции непрерывного и соответствующего дискретного объектов при разных периодах дискретизации, проанализировать устойчивость дискретной системы.



Карта полюсов устойчивой дискретной САР

## Решение.

$$5 \frac{\Delta^2 y[n]}{T^2} + 3 \frac{\Delta y[n]}{T} + 2y[n] = u[n]$$

После подстановки в последнее равенство выражений для конечных разностей (3)-(5), получаем:

$$5(y[n+2] - 2y[n+1] + y[n]) + 3(y[n+1] - y[n])T + 2y[n]T^2 = u[n]T^2 \quad \text{или, после упрощения:}$$

$$5y[n+2] - (10 - 3T)y[n+1] + (5 - 3T + 2T^2)y[n] = T^2 u[n]$$

# Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Записываем последнее разностное уравнение в операторной форме

$$[5z^2 - (10 - 3T)z + (5 - 3T + 2T^2)]y(z) = T^2u(z)$$

и получаем ДПФ

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{T^2}{5z^2 - (10 - 3T)z + (5 - 3T + 2T^2)}$$

Составляем характеристическое уравнение полученной дискретной системы

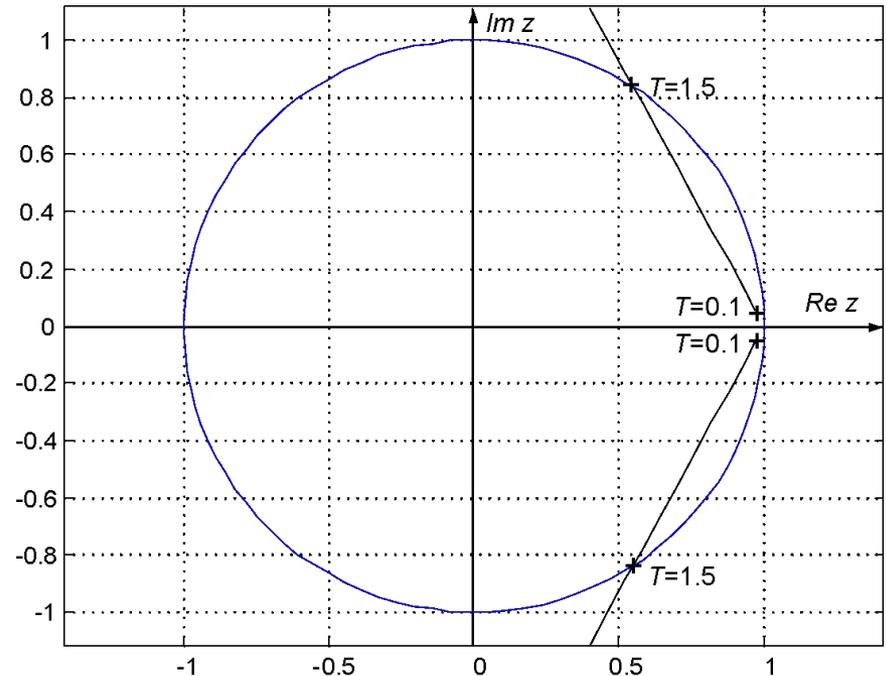
$$5z^2 - (10 - 3T)z + (5 - 3T + 4T^2) = 0$$

и находим дискретные полюсы:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{10 - 3T \pm \sqrt{(10 - 3T)^2 - 20(5 - 3T + 2T^2)}}{10} = \\ &= \frac{10 - 3T \pm \sqrt{-31T^2}}{10} = 1 - 0.3T \pm 0.557Ti. \end{aligned}$$

Определяем границу устойчивости дискретной системы, для чего записываем выражение для квадрата амплитуд комплексно-сопряженных полюсов и находим ограничения на величину период дискретности из условия устойчивости:

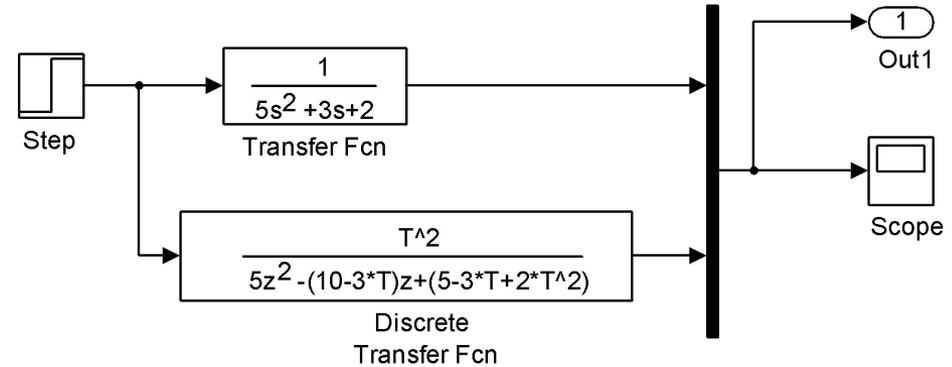
$$|z_{1,2}|^2 = (1 - 0.3T)^2 + 0.31T^2 = 1 - 0.6T + 0.4T^2 \leq 1 \quad T \leq 1.5$$



Годографы полюсов полученного дискретного динамического объекта при вариации периода дискретности

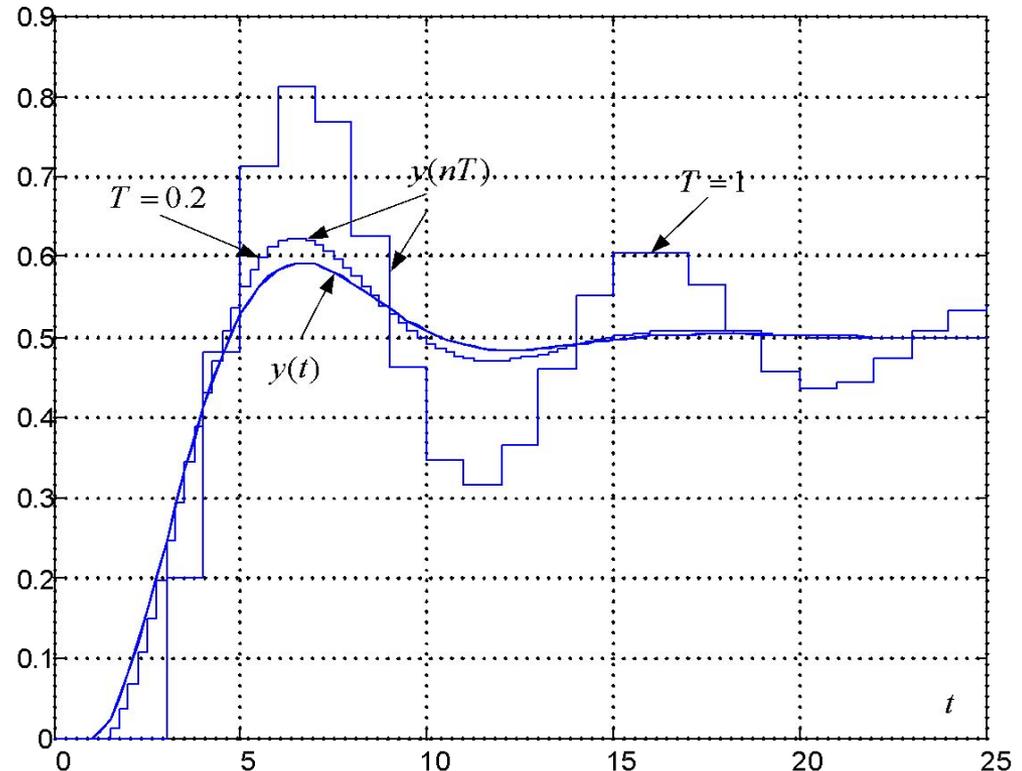
# Разностные уравнения. Связь между разностными уравнениями и дискретными передаточными функциями

Чтобы сравнить переходные характеристики выходной непрерывной системы и её дискретной аппроксимации воспользуемся Simulink-моделью



Без использования *Simulink*:

```
sa=tf(1,[5 3 2])
step(sa), grid on, hold on
for T=[0.25 1]
    sd=tf(T^2,[5 -10+3*T
5-3*T+2*T^2],T)
    step(sd)
end
```



## Дискретное преобразование Лапласа

Как известно, непрерывная функция времени  $x(t)$  при одностороннем преобразовании Лапласа отображается в функцию комплексной переменной  $x(p)$ :

где  $p = \alpha + j\beta$  – комплексная переменная

$$L\{x(t)\} = x(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt \quad (19)$$

Для решетчатых функций таким же способом вводится понятие дискретного преобразования Лапласа:

$$D\{x(kT)\} = x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(kT)e^{-pkT} \quad (20)$$

где  $D$  – символ дискретного преобразования,  
 $x^*(p)$  – функция, которая получена в результате дискретного преобразования решетчатой функции  $x(kT)$ .

Если ввести к рассмотрению относительное время, имеем:

$$D\{x[k]\} = x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x[k]e^{-pk} \quad (21)$$

или, при использовании новой безразмерной переменной  $q=pT$ :

$$D\{x[k]\} = x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[k]e^{-qk} \quad (22)$$

**Пример** Найти дискретное преобразование Лапласа для единичной решетчатой функции  $x[k]=1[k]$ .

**Решение.** В соответствии с выражением (20) находим:

$$D\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)e^{-qk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk} = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + e^{-3q} + \dots$$

Используя известную формулу для суммы элементов геометрической прогрессии, окончательно имеем

$$D\{1(k)\} = \frac{1}{1 - e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1}$$

# Дискретное преобразование Лапласа

## **Основные свойства дискретного преобразования Лапласа:**

1) поскольку дискретное преобразование Лапласа определяет связь между функцией и её изображением только в моменты  $t=nT$ , то разным выходным функциям  $x(t)$ , которые совпадают в эти моменты времени, будет соответствовать одна и та же функция  $x^*(p)$ . Итак, невозможно однозначно восстановить функцию  $x(t)$  из  $x^*(p)$  для произвольного момента времени  $t$ .

2) легко доказать, что функция  $x^*(p)$  является периодической вдоль мнимой оси  $j\omega$  комплексной плоскости, а её период составляет  $\omega_s = 2\pi/T$ . Если принять, что  $i$  – произвольное целое число, то математически это свойство дискретного преобразования Лапласа можно записать так:

$$x^*(p) = x^*(p + i\omega_s)$$

3) функция  $x^*(p)$  является иррациональной относительно  $p$ , поскольку содержит множители типа  $e^{-pT}$ . Это существенно отличает её от большинства непрерывных функций.

## Z- преобразование и его свойства

Для исследования свойств цифровых систем широко используется и так называемое Z- преобразование, которое следует из дискретного преобразования Лапласа при

$$z = e^{pT} = e^q \quad (23)$$

Итак, по аналогии с дискретным преобразованием, можем записать:

$$Z\{x[k]\} = x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} \quad (24)$$

Так, для задачи из примера Z- преобразование заданной единичной решетчатой функции будет

$$Z\{1(k)\} = \frac{e^q}{e^q - 1} \Big|_{z=e^q} = \frac{z}{z - 1}$$

Обозначим некоторые свойства Z- преобразования:

- 1) условием существования функции  $x(z)$  есть определенность функции  $x(t)$  для всех моментов времени  $t=kT$ ;
- 2) функция  $x(z)$  является рациональной относительно комплексной переменной  $z$ ;
- 3) для какой-нибудь функции времени  $x(t)$ , которая имеет дискретное преобразование Лапласа, существует и Z- преобразование;
- 4) одной функции  $x(z)$  соответствует множество функций времени  $x(t)$ , которые совпадают только в моменты времени  $t=kT$ ;
- 5) преобразование  $z=e^{pT}$  отображает всю левую полуплоскость комплексной плоскости  $p$  в круг единичного радиуса на комплексной плоскости  $z$  с центром в начале координат;

6) свойство суперпозиции:  $Z\{x_1[k] + x_2[k]\} = Z\{x_1[k]\} + Z\{x_2[k]\} = x_1(z) + x_2(z)$

7) свойство линейности:  $Z\{ax[k]\} = Z\{x_1[k]\} + aZ\{x[k]\} = ax(z)$

## Z- преобразование и его свойства

8) свойство сдвига во времени (запаздывание и опережение):

$$Z\{x[k-1]\} = z^{-1} \cdot Z\{x[k]\} = z^{-1}x(z)$$

$$Z\{x[k-n]\} = z^{-n} \cdot Z\{x[k]\} = z^{-n}x(z)$$

$$Z\{x[k+1]\} = z(x(z) - x[0])$$

$$Z\{x[k+n]\} = z^n x(z) - z^n x[0] - \dots - zx[n-1]$$

9) свертке оригиналов соответствует произведение изображений:

$$Z\left\{\sum_{i=0}^k x[i] \cdot y[k-i]\right\} = Z\{x[k]\} \cdot Z\{y[k]\} = x(z) \cdot y(z)$$

10) теорема о граничном значении:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z)$$

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z\{x(z) - x[0]\}$$

$$x[2] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2\{x(z) - x[0] - x[1]z^{-1}\}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)x(z)$$

11) дифференцирование изображения:

$$Z\{k \cdot x[k]\} = -\frac{dx(z)}{dz}$$

12) Z- преобразование функции не зависит от величины  $T$ . Действительно, поскольку время не входит в выражение (24), то выражение для  $x(z)$  не зависит от величины  $T$ .

## Z- преобразование и его свойства

При вычислении Z- преобразования функций удобно исходить не с функции времени  $x(t)$ , а из его преобразования Лапласа, т.е.  $x(p)$ . Рассмотрим пример такого вычисления Z- преобразования функции.

**Пример 3.** *Найти Z- преобразование функции*  $x(t) = e^{-\alpha t}$

$$x(p) = \frac{1}{p + \alpha}$$

**Решение.** *Как известно, преобразованием Лапласа заданной функции есть функция комплексной переменной*

*Одновременно, согласно (20),*

$$x^*(p) = D\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} e^{-pkT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha+p)kT}$$

*Находим сумму этой геометрической прогрессии:*

$$x^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha+p)T}} = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}}$$

*Поскольку  $e^{pT} = e^q = z$ , окончательно получим:*

$$x(z) = \frac{e^{pT}}{e^{pT} - e^{-\alpha T}} \Big|_{e^{pT}=z} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

Таким же способом можно получить дискретное преобразование Лапласа и Z- преобразование для других функций.

Преобразование Лапласа и z- преобразование для некоторых функций времени

Выходная функция $x(t)$	Решетчатая функция $x(kT)$	Преобразование Лапласа $x(p)$	Z- преобразование $x(z)$
$1(t)$	$1(kT)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$kT$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$1-e^{-\alpha t}$	$1-e^{-\alpha kT}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, d=e^{-\alpha T}$

При исследованиях цифровых систем иногда также необходимо по заданной функции  $x(z)$  найти соответствующую последовательность  $x(nT)$ . В таких случаях оперируют так называемым обратным Z- преобразованием, которое обозначают таким образом:

$$x(kT) = Z^{-1}\{x(z)\}$$

# Как вычислять z-преобразование

## Matlab

```
syms k  
x = 1 + 2^(k+1);  
X = ztrans ( x );  
X = combine ( X )
```

```
X =  
(3*z^2-4*z) / (z^2-3*z+2)
```

$$X(z) = \frac{3z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$x[k] = 1 + 2^{k+1}$$

z-преобразование

упрощение

# Обратное z-преобразование (численно)

## Matlab

```
n = [3 -4 0];  
d = [1 -3 2];  
T = 1;  
X = tf( n, d, T);  
x = impulse(X, 4)
```

```
x = 3  
    5  
    9  
   17  
   33
```

$$X(z) = \frac{3z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2}$$

конечное  
время

# Обратное z-преобразование (формула!)

## Matlab

```
syms z
n = 3*z^2 - 4*z;
d = z^2 - 3*z + 2;
x = iztrans(n/d)
```

```
x =
 2*2^n+1
```

$$X(z) = \frac{3z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2}$$