

**Кубанский государственный технологический университет**  
**Институт информационных технологий и безопасности**  
Кафедра компьютерных технологий и информационной  
безопасности

**Учебная дисциплина**

**Электротехника и электроника**

**Лекция № 5**

**Гармонические колебания в  
пассивных элементах  
электрических цепей**

## Учебные вопросы:

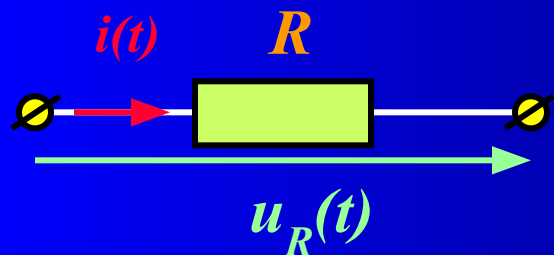
1. Гармонические колебания в пассивных элементах электрических цепей.
2. Мощность электрической цепи

## Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 61 –84.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 37 –54.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

# 1. Гармонические колебания в пассивных элементах электрической цепи.

## 1.1 Резистивный элемент и его характеристики



Пусть через резистор протекает ток  $i(t)$ :

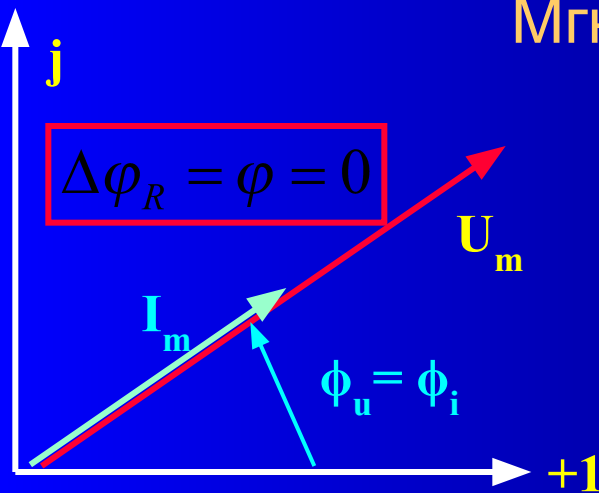
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\dot{u}(t) = R \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_{mR} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$$

КОМПЛЕКСНАЯ  
ФОРМА ЗАПИСИ

Мгновенная мощность колебания в резисторе

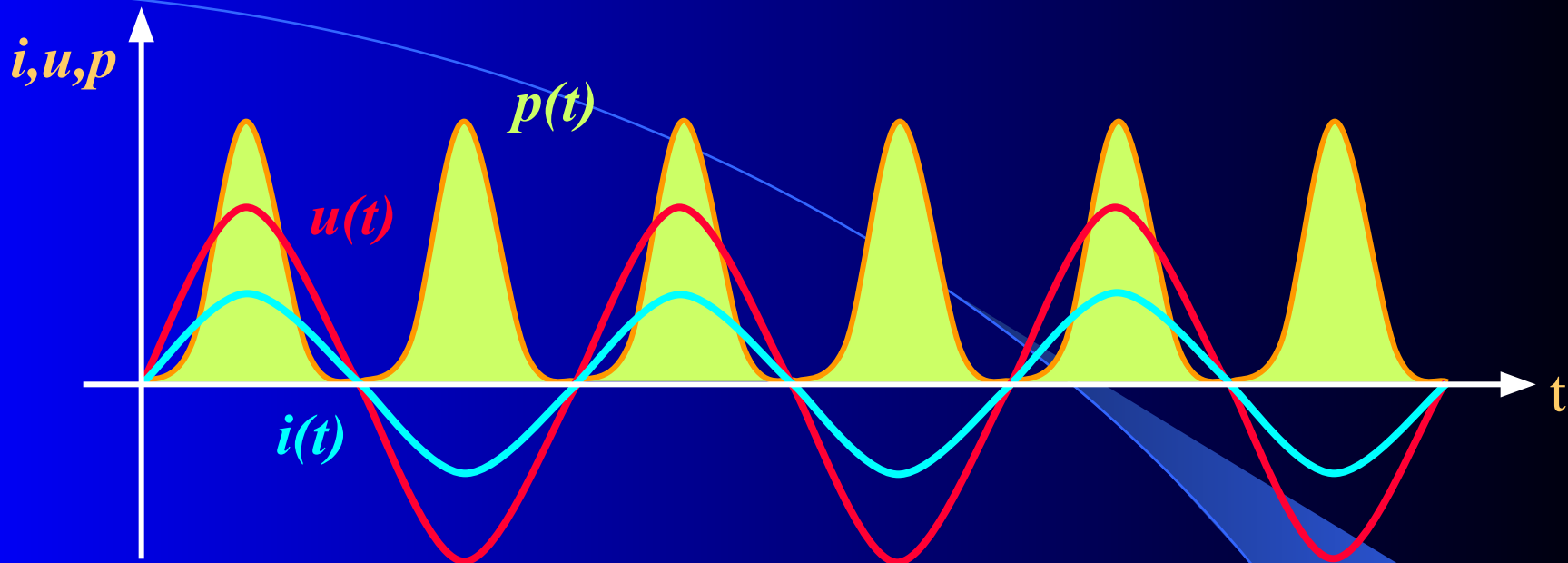


Колебания синфазные

$$U_{mR} = R \cdot I_m$$

$$U_R = R \cdot I$$

$$\begin{aligned} p(t) &= u \cdot i = R I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\ &= R I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} I_m \sin^2(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{2 U_{mR} I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \sin^2(\omega t + \varphi_i) = 2 U_R I \sin^2(\omega t + \varphi_i) = \\ &= U_R \cdot I [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_i)] \geq 0 \end{aligned}$$



**Средняя  
мощность  
колебаний**



$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

**Резистор – активное сопротивление**

$$p_R(t) = U \cdot I \cdot (1 - \cos 2\omega t)$$

$$P = U \cdot I$$

$$Q = 0$$

$$S = P$$

$$R = P / I^2$$

$$Z_R = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = U_m \cdot e^{j\varphi_u} / \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_u}}{R} = R$$

$$\Delta\varphi_R = \varphi = 0$$

$$Y_R = 1/Z_R = 1/R = G$$

$$\operatorname{Re}[Y] = R$$

$$\operatorname{Im}[Y] = 0$$

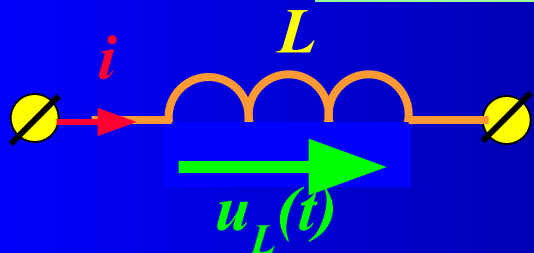
$$R_0 = \rho \cdot l / S$$

**Из-за поверхностного эффекта**

$$R \gg R_0$$

$$R = f(R_0)$$

## 1.2 Индуктивный элемент и его характеристики



$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin(\omega t + \varphi_i))}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

$$U_{mL} = \omega \cdot L \cdot I_m$$

$$X_L(\omega) = \omega \cdot L$$

$$Z_L = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{I}_m} = \frac{\omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j(\varphi_i + 90^\circ)}}{I_m \cdot e^{j\varphi_i}} = \omega \cdot L \cdot e^{j90^\circ} = j\omega \cdot L$$

Комплексное сопротивление L-элемента

$$Z_L(j\omega) = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L$$

$$\text{Re}[Z_L] = 0$$

$$\text{Im}[Z_L] = \omega \cdot L = X_L$$

Комплексная проводимость L-элемента

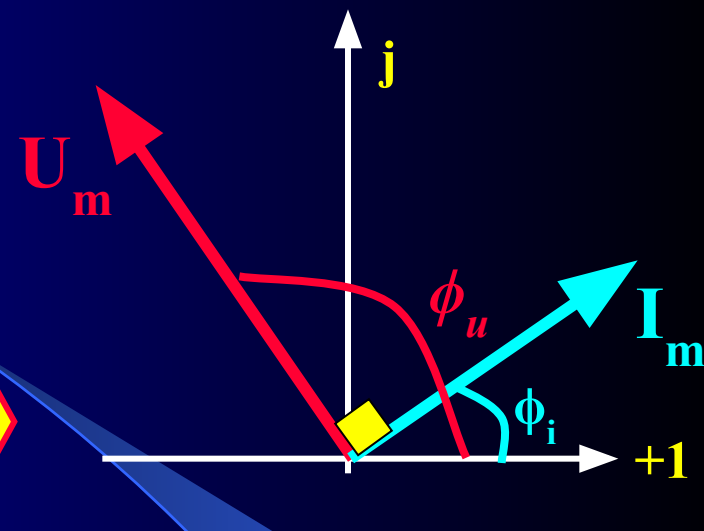
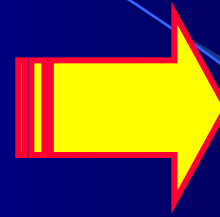
$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = -j \frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$\text{Re}[Y_L] = 0$$

$$\text{Im}[Y_L] = -\frac{1}{\omega \cdot L} = b_L$$

Напряжение на индуктивности имеет форму гармонического колебания и опережает по фазе колебания тока на угол  $+\pi/2$ .

Колебания тока и напряжения находятся в квадратуре



Мгновенная мощность изменяется во времени

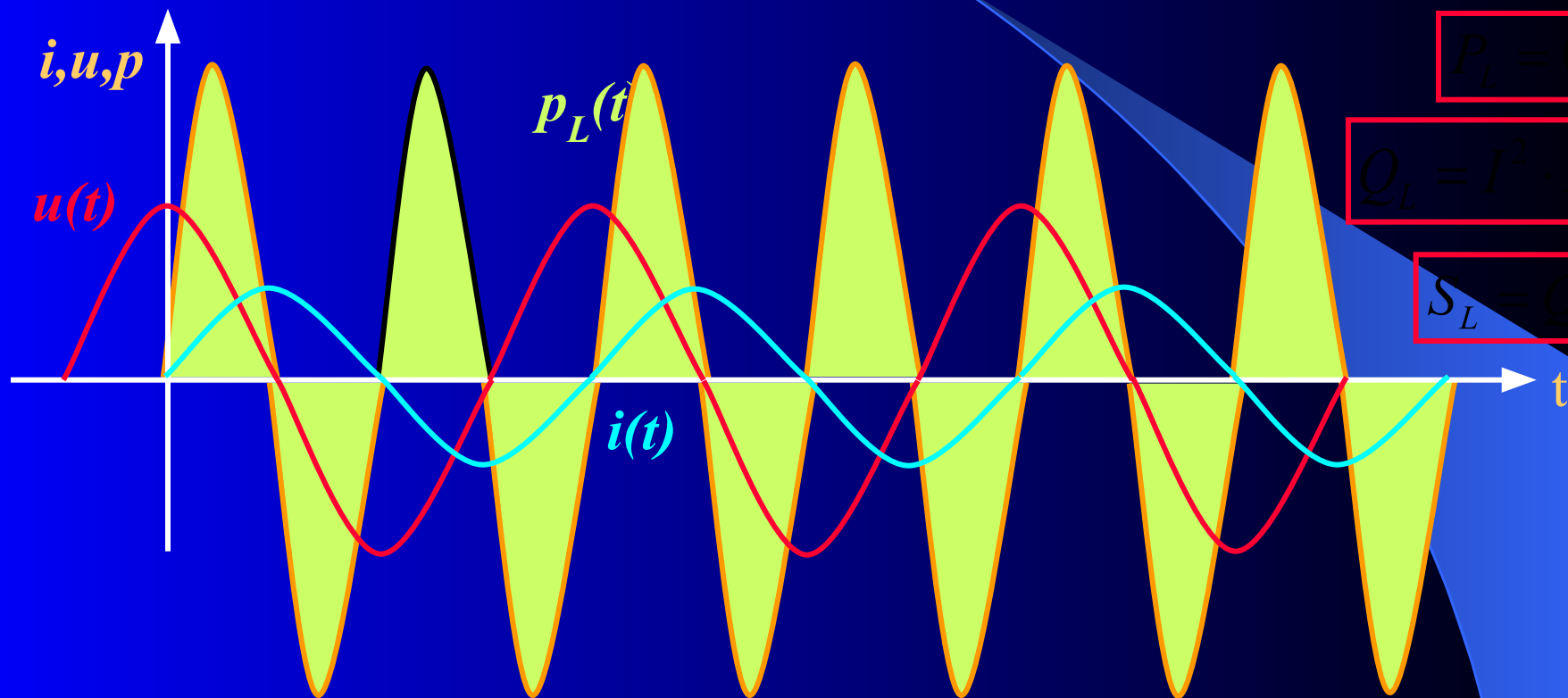
$$\begin{aligned}
 p_L &= u_L \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\
 &= \frac{1}{2} I_m U_m \left[ \cos(\omega t + \varphi_i - \omega t - \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \right] + \frac{1}{2} I_m U_m \left[ -\cos(\omega t + \varphi_i + \omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} I_m U_m \left[ -\cos(2\omega t + 2\varphi_i + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{1}{2} I_m U_m \left[ \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \right] = \underline{\underline{IU \sin 2(\omega t + \varphi_i)}}
 \end{aligned}$$

по синусоидальному закону с частотой в два раза большей частоты тока

Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению тока в индуктивном элементе  $\rightarrow 0 < t < T/4$  (накопление энергии в магнитном поле катушки индуктивности).

# Энергия поступающая в индуктивный элемент за четверть периода ( $\rho > 0$ )

$$W_L = \int_0^{T/4} p_L(t) dt = \int_0^{T/4} u_L \cdot i dt = \int_0^{T/4} L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^{T/4} L \cdot i \cdot di = \frac{LI_m^2}{2}$$



$$P_L = 0$$

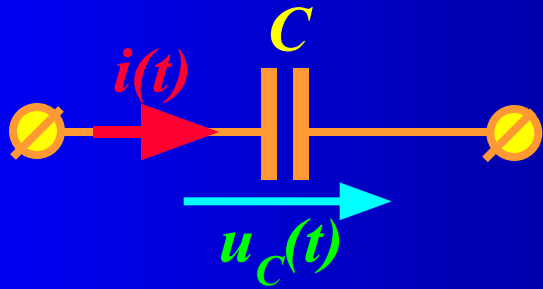
$$Q_L = I^2 \cdot X$$

$$S_L = Q_L$$

Средняя за период мощность в индуктивном элементе

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [I_m U_m \sin(2\omega t + 2\phi)] dt = 0$$

# 1.3 Емкостной элемент и его характеристики



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \varphi_i) dt =$$

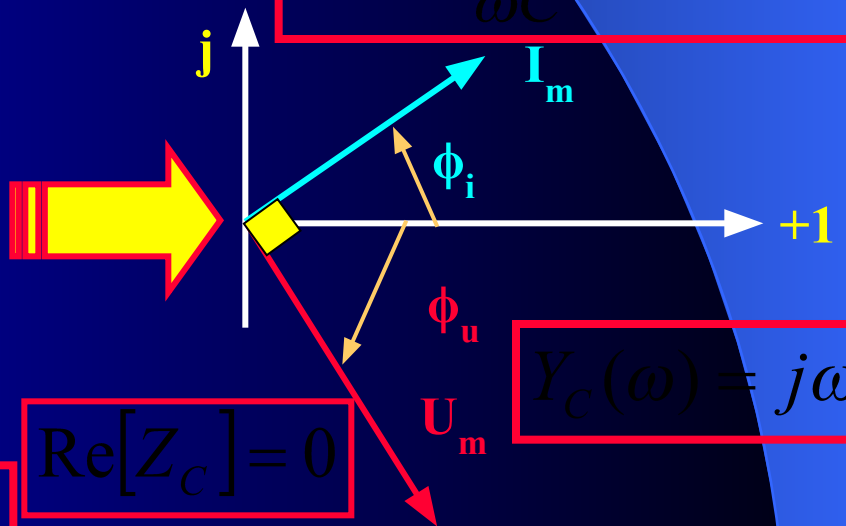
$$= \frac{-I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{-I_m}{\omega C} \sin(-\omega t - \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$= U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C} = X_C(\omega) \cdot I_m$$

Напряжение на емкостном элементе имеет форму гармонического колебания и отстает по фазе от колебания тока на угол  $\pi/2$ .



$$Y_C(\omega) = j\omega C$$

$$\text{Re}[Z_C] = 0$$

$$\text{Im}[Z_C] = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C$$

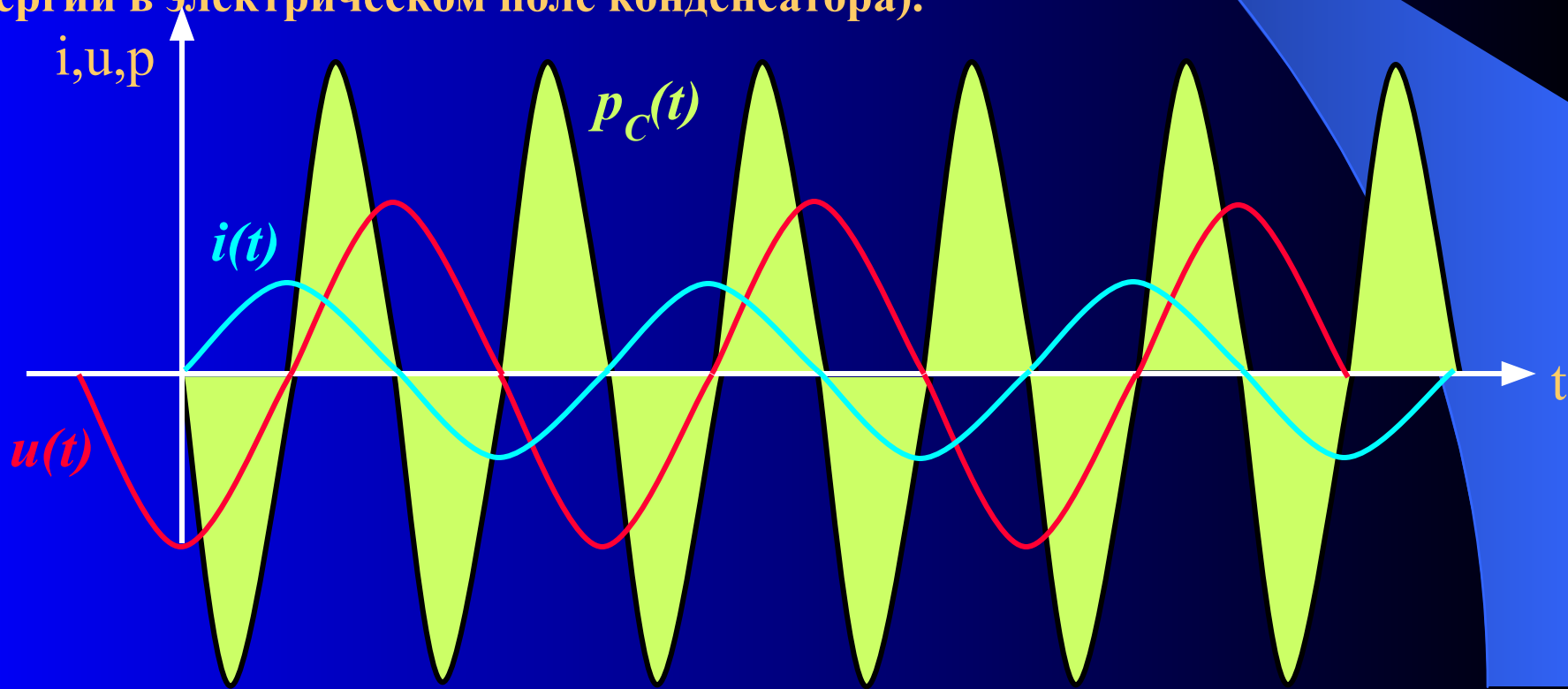
$$Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$$



## Мгновенная мощность изменяется во времени

$$p_C = u_C \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) I_m \sin(\omega t + \varphi_i) =$$
$$= \frac{1}{2} I_m U_m \left[ \cos(2\omega t + 2\varphi_i - \frac{\pi}{2}) \right] = -\frac{1}{2} I_m U_m \left[ \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \right] = \underline{\underline{-IU \sin 2(\omega t + \varphi_i)}}$$

по синусоидальному закону с частотой в два раза **большой** частоты тока. Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению напряжения на емкостном элементе  $\rightarrow T/4 < t < T/2$  (накопление энергии в электрическом поле конденсатора).



## Энергия поступающая в емкостной элемент за четверть периода ( $p_C > 0$ )

$$W_C = \int_{T/4}^{T/2} p_L(t) dt = \int_{T/4}^{T/2} u_C \cdot i dt = \int_{T/4}^{T/2} C U_m \frac{du}{dt} dt = \int_0^{U_m} C \cdot U_m \cdot du = \frac{C U_m^2}{2}$$

Средняя за период  
мощность в  
емкостном элементе

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{2} [I_m U_m \sin(2\omega t + 2\varphi_i)] dt = 0$$

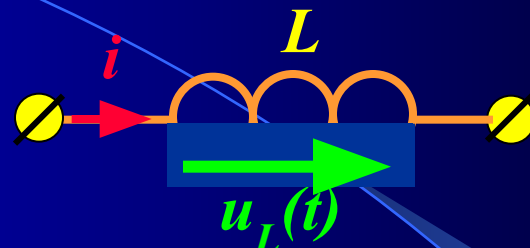
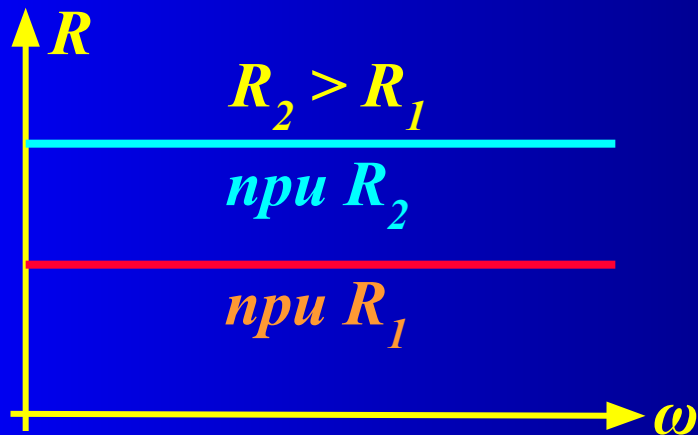
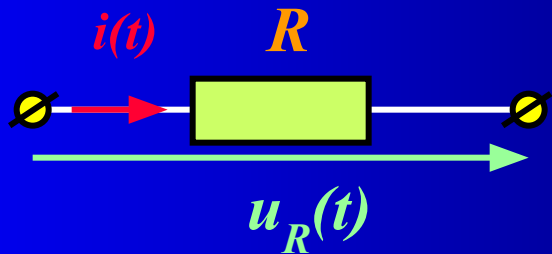
В чисто емкостной цепи, как и в чисто индуктивной цепи потери энергии отсутствуют. Вначале происходит заряд конденсатора, энергия при этом накапливается в электрическом поле конденсатора. Затем происходит разряд конденсатора, энергия, запасенная в электрическом поле, поступает к источнику.

$$P_C = 0$$

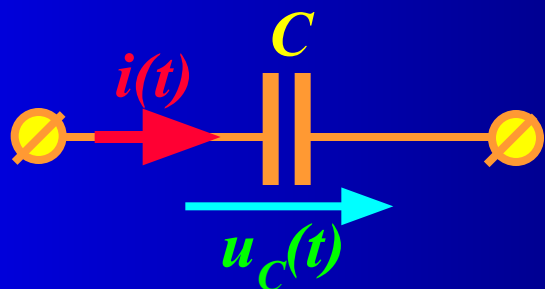
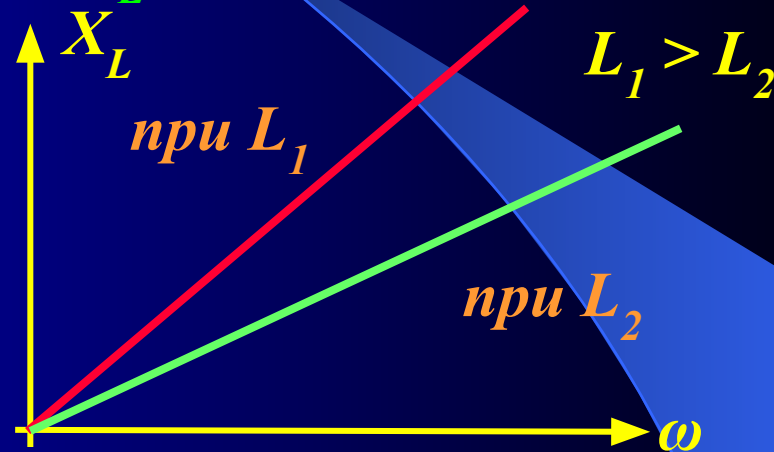
$$Q_C = -U \cdot I = -I^2 \cdot X_C$$

$$S_L = |Q_C|$$

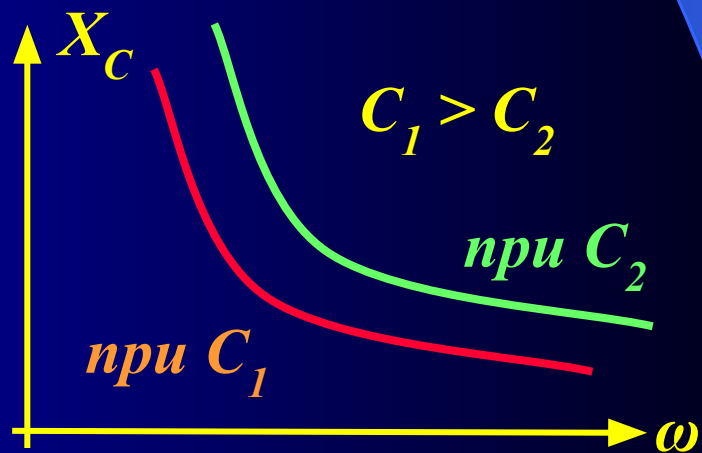
❖ Зависимость сопротивлений пассивных элементов электрической цепи от частоты переменного тока



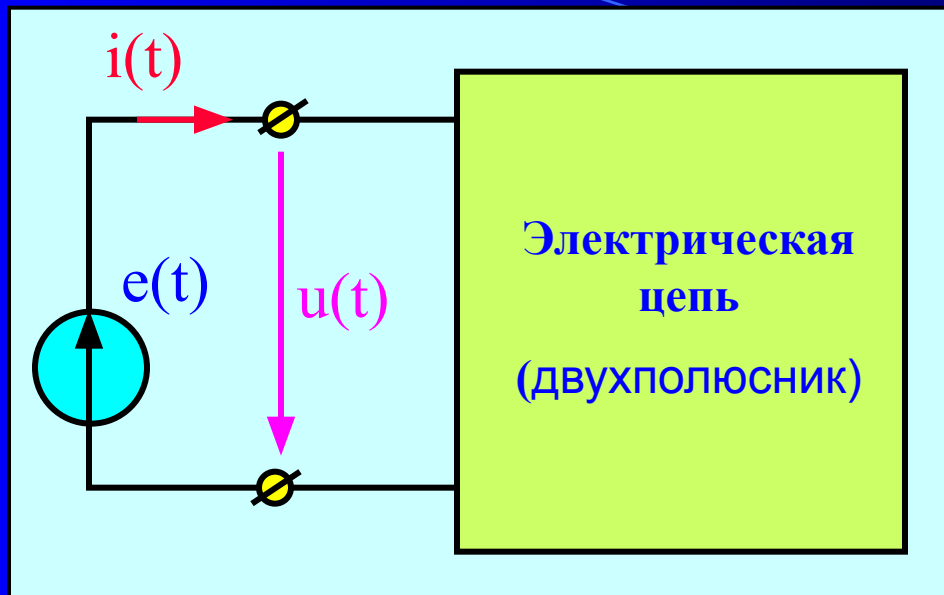
$$X_L = \omega \cdot L = X_L(\omega)$$



$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C(\omega)$$



## 2. Мощность электрической цепи.



$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

Активная мощность

$$P = P_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$= U^2 \cdot G = I^2 \cdot R \quad 0 \rightarrow [Bm]$$

Комплексно-сопряженный ток

$$\dot{S} = U \cdot I^* = S \cdot e^{j\varphi_s} = S \cdot e^{j\varphi} = I^2 \cdot \dot{Z}$$

$$\dot{S} = S \cdot e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot e^{j\varphi} \rightarrow [B \cdot A]$$

[Полная мощность] = [Активная мощность] + [Реактивная мощность]

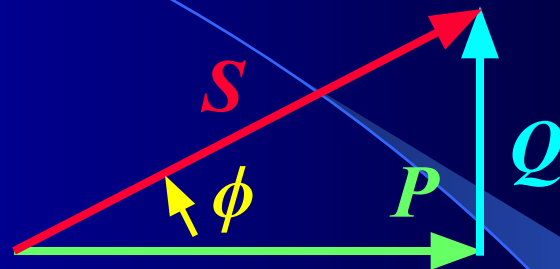
Полная мощность определяет эксплуатационные возможности многих электротехнических устройств (генераторов, трансформаторов, электрических машин) для которых она указывается в качестве номинальной:  $S_{НОМ} = U_{НОМ} I_{НОМ}$

Реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной

Если электрическая цепь имеет индуктивный характер,  $\Delta\phi > 0$  и  $P_Q > 0$ , если – емкостной характер, то  $\Delta\phi < 0$  и  $P_Q < 0$ .

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P}{U \cdot I}$$

Коэффициент мощности



$$S = P + jQ$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

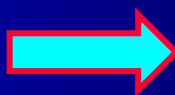
$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$$

Чем больше  $\cos \varphi$ , тем больше степень использования полной мощности, тем меньшим током при заданном напряжении можно доставить к потребителю активную **МОЩНОСТЬ**

От значения  $I \rightarrow$  сечения подводящих энергию проводов, кабелей, линий передач. Потери энергии в подводящих проводах пропорциональны  $I^2$

$$P_{\text{ПОТ}} = I^2 \cdot R_{\text{ПОТ}}$$



$$\Downarrow (\text{ток}) \rightarrow (\Uparrow \Uparrow \cos \varphi)$$

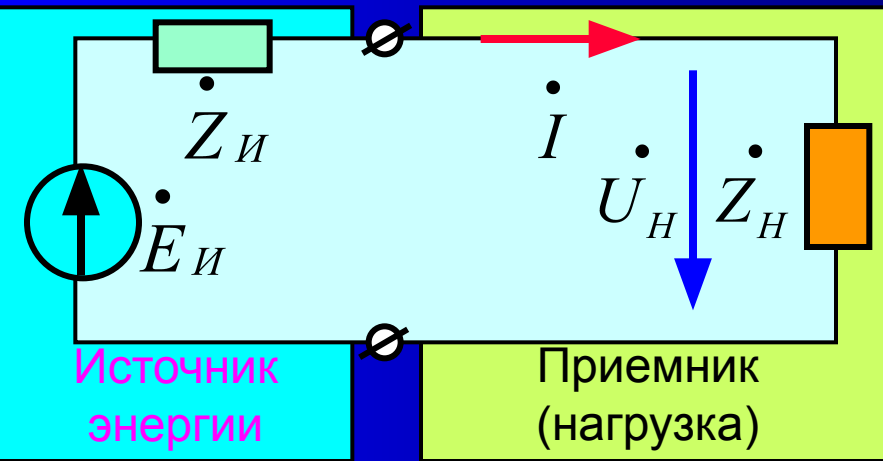
Для увеличения  $\cos \varphi$  необходимо уменьшать реактивную мощность. При  $Q = 0$  имеем  $\cos \varphi = 1$ . Так как  $Q_L > 0$ , а  $Q_C < 0$ , то для компенсации реактивной мощности параллельно нагрузке, имеющей как правило, индуктивный характер, подключают компенсирующую емкость, значение которой выбирают из условия:  $Q = Q_L + Q_C = 0$ , т.е.  $Q_L = -Q_C$

# Баланс мощности в электрической цепи

$$\dot{S}_{ИСТ} = \dot{S}_{ПРМ} = \sum_{k=1}^m \dot{E}_k \dot{I}_k + \sum_{n=1}^p \dot{U}_0 \dot{J}_0 = \sum_{k=1}^m I_k^2 R_k + j \sum_{k=1}^m I_k^2 X_k$$

В электрической цепи при гармонических воздействиях выполняется баланс комплексных мощностей источников и приемников электрической энергии

## ❖ Условия получения максимальной мощности в нагрузке



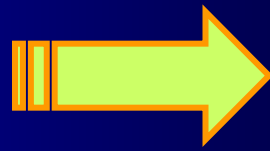
$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{E}_И}{\dot{Z}_И + \dot{Z}_Н} = \\ &= \frac{\dot{E}_И}{(R_И + R_Н) + j(X_И + X_Н)} \end{aligned}$$

$$\dot{Z}_И = R_И + jX_И \quad \dot{Z}_Н = R_Н + jX_Н$$

$$P = I^2 R_Н = \frac{E_И^2}{(R_И + R_Н)^2 + (X_И + X_Н)^2} \Rightarrow \max?$$

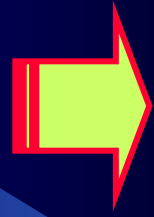
$$X_И + X_Н = 0$$

Найдем экстремум функции  $P$



$$P = \frac{E^2 R_H}{(R_{II} + R_H)^2}$$

Экстремум



$$R_{II} = R_H$$

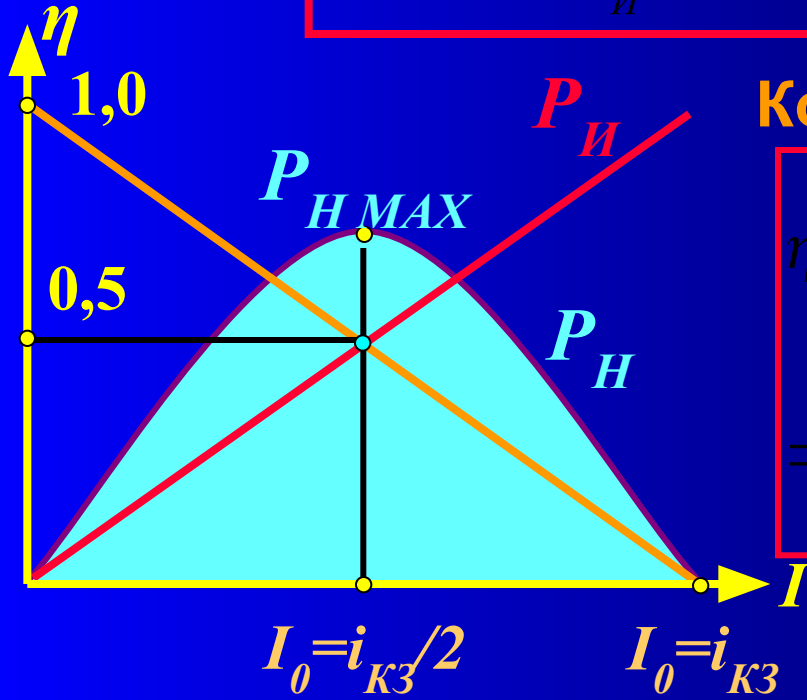
$$\frac{dP}{dR_H} = E^2 \frac{(R_{II} + R_H)^2 - R_H \cdot 2(R_{II} + R_H)}{(R_{II} + R_H)^4} = 0$$

при этом ток в цепи

$$I = I_0 = \frac{E_{II}}{2R_{II}} = \frac{I_{K3}}{2}$$

а мощность в нагрузке

$$P_H = P_{H \max} = \frac{E_{II}^2}{4R_{II}}$$



Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_H}{P_{II}} = \frac{E_{II}I - I^2 R_{II}}{E_{II}I} = 1 - \frac{IR_{II}}{E_{II}} = 1 - \frac{IR_H}{E_{II}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I^2 R_H}{I^2 R_{II} + I^2 R_H} 100\% = \frac{R_H}{R_{II} + R_H} 100\%$$

$P_{MAX}$  возможна только при  $\eta = 50\%$

## Общие выводы

1. В режиме холостого хода, т.е. при  $R_H = \infty$  (разомкнутая электрическая цепь)

$$\eta_{ХХ} = \frac{R_H}{R_{И} + R_H}$$

2. В режиме короткого замыкания, т.е. при  $R_H = 0$  (короткозамкнутая электрическая цепь)

$$\eta_{КЗ} = \frac{R_H}{R_{И} + R_H} = 0$$

3. В согласованном режиме работы

$$R_{И} = R_H$$

$$\eta_{СР} = 0,5$$

- ◆ В случае, когда необходимо обеспечить максимальную мощность независимо от экономических затрат (значения КПД) источники работают в согласованном режиме (устройства автоматики – мощности управляющих сигналов малы)
- ◆ Для силовых установок ( $R_H \gg R_{И}$ ) → режим близкий к режиму холостого хода ⇒ важен КПД



# Задание на самостоятельную работу

## Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 61 –84.
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 37 –54.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.