

Тема 2. Количественный финансовый анализ ценных бумаг с фиксированным доходом

- P - рыночная цена облигации
- N - номинал
-
- $K = \frac{P}{N} 100$ - курс облигации
- Основные задачи анализа облигаций:
- 1) определение полной доходности облигации;
- 2) определение внутренней стоимости облигации и выявление неверно оцененных рынком ценных бумаг;
- 3) оценка риска, связанного с вложениями в облигации.

Определение полной доходности облигаций

- **Определение.** Годовая внутренняя доходность облигации r – это годовая ставка сложных процентов, по которой современная стоимость потока платежей по облигации равна рыночной стоимости облигации в момент $t = 0$:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}$$

- **Доходность облигации без выплаты процентов**

- $$\frac{N}{(1+r)^n} = P \Rightarrow r = (N/P)^{1/n} - 1$$

$$r = \frac{1}{(K/100)^{1/n}} - 1$$

Определение доходности облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

- g - купонная ставка
- gN - ежегодно получаемый доход

$$A_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} gN \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = \frac{gN}{r}$$

$$\frac{gN}{r} = P \Rightarrow r = \frac{gN}{P} = \frac{g}{K} 100$$

$$\frac{gN / p}{(1 + r)^{1/p} - 1} = P \Rightarrow r = \left(\frac{gN / p}{P} + 1 \right)^p - 1 = \left(\frac{g}{p} \frac{100}{K} + 1 \right)^p - 1$$

- **Доходность облигации с выплатой процентов в конце срока**

$$\frac{N(1 + g)^n}{(1 + r)^n} = P \Rightarrow r = \left(\frac{N}{P} \right)^{1/n} \cdot (1 + g) - 1 = \frac{(1 + g)}{(K / 100)^{1/n}} - 1$$

Определение доходности облигации с периодической выплатой процентов, погашаемой в конце срока

$$N(1+r)^{-n} + Nga_{n,r} = P \qquad a_{n,r} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

$$((1+r)^{-n} + ga_{n,r})100 = K$$

$$((1+r)^{-n} + ga_{n,r}^{(p)})100 = K \qquad a_{n,r}^{(p)} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{(1+r)^{1/p} - 1}$$

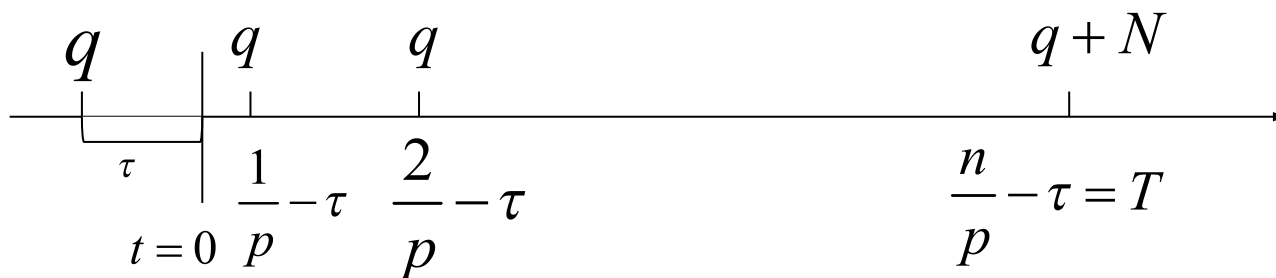
- **Определение доходности облигации в общем случае**

- N - номинал облигации;
- g - годовая купонная ставка;
- p - число купонных платежей в году;
- q - сумма отдельного купонного платежа;
- $t = 0$ – момент покупки облигации или момент, когда предполагается инвестирование в облигацию;
- T (в годах) - срок до погашения облигации от момента $t = 0$;

τ - время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации (до момента $t = 0$)

$(1/p)$ купонный период

$$0 \leq \tau < \frac{1}{p} \quad T = \frac{n}{p} - \tau$$



$$0 \leq \frac{n}{p} - T < \frac{1}{p} \quad T \cdot p \leq n < T \cdot p + 1$$

- если $T \cdot p$ – целое, то $n = T \cdot p$ и $\tau = 0$
- если $T \cdot p$ – не целое, то $n = [T \cdot p] + 1$ и $\tau = \frac{n}{p} - T$

Пример 1. По облигации производятся купонные выплаты каждые три месяца. Срок до погашения облигации а) 10,5 месяцев; б) 6 месяцев. Определить число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, а также время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } p &= 4 & T &= \frac{10,5}{12} & T \cdot p &= 3,5 \\ n &= [3,5] + 1 = 4 & \tau &= \frac{n}{p} - T = \frac{4}{4} - \frac{10,5}{12} = 0,125 \end{aligned}$$

$$\text{б) } T = \frac{6}{12} = 0,5 \quad T \cdot p = 2 \quad n = T \cdot p = 2$$

$$\tau = \frac{n}{p} - T = \frac{2}{4} - 0,5 = 0$$

- P - рыночная цена облигации в момент $t = 0$
- p - количество купонных выплат
- Предположим, облигация продается через время τ после купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных выплат

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{p} - \tau}} + \frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p} - \tau}}$$

$$P = (1+r)^\tau \left(\sum_{i=1}^n \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{p}}} + \frac{N}{(1+r)^{\frac{n}{p}}} \right) \quad q = \frac{g \cdot N}{p}$$

$$P = (1+r)^\tau \left(\frac{g \cdot N}{p} \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n/p}}{(1+r)^{1/p} - 1} + \frac{N}{(1+r)^{n/p}} \right)$$

Пример. По 9 % - й купонной облигации номиналом 1000 д.е. обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Требуется определить внутреннюю доходность облигации, если ее стоимость равна 1050 д.е., а до погашения остается 3,8 года

Здесь $N = 1000$ д.е.; $g = 0,09$; $p = 2$;

$$q = \frac{1}{p} g \cdot N = 45 \text{ д.е.} \quad T = 3,8 \text{ года}; \quad P = 1050 \text{ д.е.}$$

$$n = T \cdot p = [7,6] + 1; \quad \tau = \frac{n}{p} - T = \frac{8}{2} - 3,8 = 0,2 \text{ года}$$

$$1050 = (1 + r)^{0.2} \left(45 \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-8/2}}{(1 + r)^{1/2} - 1} + \frac{1000}{(1 + r)^{8/2}} \right)$$

$$r = 8.2\%$$

Доходность облигации с учетом налогов

m – ставка налога на прирост капитала;

h – ставка налога на текущий доход;

$m(N - P)$ – сумма налога на прирост капитала;

$(N - m(N - P))$ – сумма после уплаты налога;

hNg – налог на текущий доход;

$Ng(1 - h)$ – сумма текущего дохода после выплаты налога

$$(N - m(N - P))v^n + (1 - h)Nga_{n,r} = P$$

$$\frac{100}{1 - mv^n} ((1 - m)v^n + (1 - h)ga_{n,r}) = K$$

Доходность портфеля облигаций

$$\sum_t S_t v^t - \sum_j Q_j P_j = 0$$

Оценивание облигаций. Базовая модель оценивания облигаций

- Доходность к погашению

- P - рыночная стоимость облигации;
- $C_1, C_2, \dots, C_n$ - ожидаемый поток платежей

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

- если $r > r^*$ - облигация недооценена на рынке;
- если $r < r^*$ - облигация переоценена;
- если $r = r^*$ - облигация оценена справедливо.

Внутренняя стоимость (базовая модель оценивания облигаций)

$$V = \frac{C_1}{1+r^*} + \frac{C_2}{(1+r^*)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r^*)^n}$$

$$NVP = V - P = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r^*)^t} - P$$

- если $NVP > 0$, то облигация недооценена рынком;
- если $NVP < 0$, то облигация переоценена.

Формулы для оценивания облигаций

- Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

$$V = \frac{gN}{r^*} \qquad V = \frac{gN}{p[1 + r^*]^{1/p} - 1}$$

- Облигации без периодической выплаты процентов

$$V = N \left(\frac{1 + g}{1 + r^*} \right)^n$$

- Облигации с нулевым купоном $V = N \left(\frac{1}{1 + r^*} \right)^n$

- Облигации периодической выплатой дохода и погашением в конце срока

$$V = Nv^n + gNa_{n,r^*} \qquad v = \frac{1}{1 + r^*} \qquad a_{n,r^*} = \frac{1 - (1 + r^*)^{-n}}{r^*}$$

•

Оценка риска, связанного с вложениями в облигации

- C_t - ожидаемый платеж по облигации; $t = 1, \dots, n$

$$\bullet \quad T = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot C_t}{\sum_{t=1}^n C_t} \quad T < n \quad f_t = \frac{C_t}{\sum_{t=1}^n C_t} \quad - \text{ веса}$$

$$T = \sum_{t=1}^n (t \cdot f_t)$$

$$\sum_{t=1}^n f_t = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{\sum_{t=1}^n C_t} = \frac{1}{\sum_{t=1}^n C_t} \sum_{t=1}^n C_t = 1$$

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \cdot C_i}{\sum_{i=1}^n C_i}$$

$$T = \frac{Ng \sum_{t=1}^n t + nN}{nNg + N}$$