ТЕМА: Интегралы функции одной переменной

ВОПРОС 1. Неопределенный интеграл

ВОПРОС 2. Определенный интеграл

ВОПРОС 3. Приложения определенных интегралов

1.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Т.е.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Таблица интегралов

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$,

3. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$,

4. $\int \mathrm{e}^{u}\, du = \mathrm{e}^{u} + C$,

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$,

6. $\int \cos u du = \sin u + C$,

7. $\int \frac{du}{\cos^{2} u} = \mathrm{tg}\, u + C$,

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Метод замены переменной

Метод замены переменной состоит в том, что в интеграл $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную t, связанную с переменной x соотношением

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$ на некотором интервале изменения t.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

После того, как интеграл найден, возвращаются к первоначальной переменной с помощью подстановки $t = \varphi^{-1}(x)$.

Пример:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \left\langle t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x} \right\rangle = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Метод интегрирования по частям

Интегрирования по частям основано на применении формулы

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Случаи применения формулы по частям.

I. $\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{kx} dx}_{dv}$; $\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{a^{kx} dx}_{dv}$;

$\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{\cos kx dx}_{dv}$; $\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{\sin kx dx}_{dv}$.

II. $\int P_n(x)\cdot \arcsin mx\,dx$; $\int P_n(x)\cdot \arccos mx\,dx$;

$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} mx\,dx$;

$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arcctg} mx\,dx$;

$$\int P_n(x)\cdot \ln mx\,dx.$$

За $dv = P_n(x)dx$,

$$u = \arcsin mx,$$

$$u = \arccos mx,$$

$$u = \operatorname{arctg} mx,$$

$$u = \operatorname{arcctg} mx,$$

$$u = \ln mx.$$

III. $\int e^{ax}\cdot \sin bx dx$,

$\int e^{ax}\cdot \cos bx dx$.

Применяется двукратное интегрирование по частям.

Пример:

$$\int x e^{3x}\,dx = \left\langle \begin{matrix} u = x \\ e^{3x}\,dx = dv \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right\rangle = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3}$$

.

Интегрирование рациональных функций

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C \quad .$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \quad k \in Z, k > 1$$

.

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = I \quad ,$$

где $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. квадратный трехчлен $x^2 + px + q = 0$ не имеет действительных корней.

$$I = \frac{A}{2}\ln\left(x^2 + px + q\right) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Пример:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x+5}\,dx = \left\langle \begin{array}{l} \text{в числителе выделим} \\ \text{производную знаменателя} \\ \left(x^2+3x+5\right)' = \underline{2x+3} \\ x+1 = \frac{1}{2}\left(\underline{(2x+3)}-1\right) \end{array} \right\rangle = \int \frac{\frac{1}{2}\left((2x+3)-1\right)d}{x^2+3x+5}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+5\right) - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{11}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+5\right) - \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{(2x+3)}{\sqrt{11}} + C.$$

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

1. Интегралы вида: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где $m, n \in Z$.

а) Если $m > 0$ и нечетное, то подстановка $t = \cos x$ приводит к интегралу от рациональной функции.

Если $n > 0$ и нечетное, то к тому же приводит подстановка $t = \sin x$.

б) Если оба показателя m и n положительные и четные, то применяются формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

в) Если оба показателя m и n отрицательные и сумма их четная, то подстановка $t = \operatorname{tg} x \; (t = \operatorname{ctg} x)$ приводит к интегралу от рациональной функции.

При этом $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

1. Интегралы вида:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx$$

путем подстановки $t = \operatorname{tg} x$ сводится к интегралу от рациональной функции, при этом $x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

2. <u>Интегралы вида:</u> $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$.

<u>Формулы:</u>

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right),$$

$$\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$$

$$\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha - \beta\right) - \cos\left(\alpha + \beta\right)\right)$$

Примеры:

1.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \left\langle \begin{array}{l} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\rangle = -\int \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= -\int dt + \int t^2 dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2.

$$\int \sin 6x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 5x + \sin 7x\right) dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x dx + \frac{1}{2}\int \sin 7x dx =$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

3.

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \left\langle \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\rangle = \int \frac{t^5}{1+t^2}dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) +$$

.

2. Определенный интеграл

Если $f(x) > 0$ на $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$ (рис. 1).

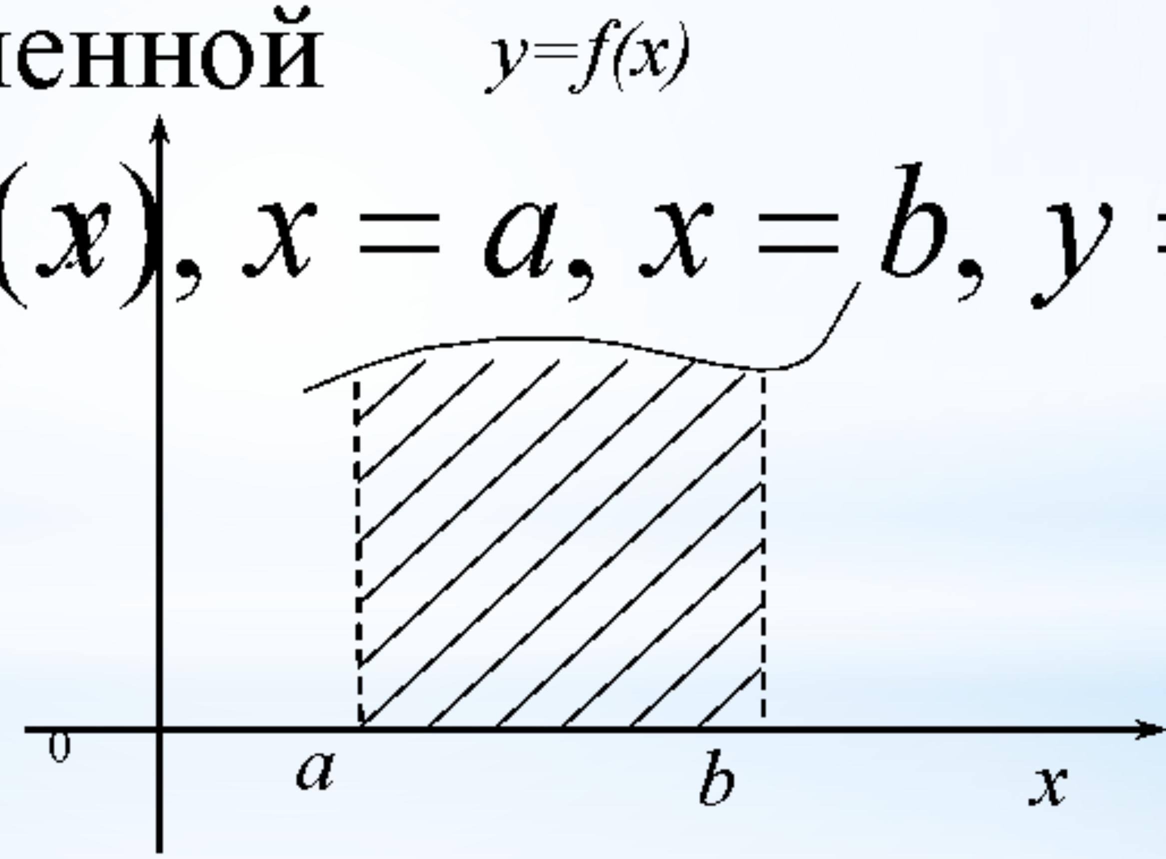

Рис. 1

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Интегрирование по частям:

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции на $[a;b]$.

Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\langle \begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\rangle = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $x=\varphi(t)$ – функция непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функция непрерывная на $[\alpha;\beta]$.

Если $f(x)$ – <u>нечетная</u> функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Если $f(x)$ – <u>четная</u> функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

3. Приложения определенных интегралов

1) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b])$, прямыми $x = a,\ x = b$ и осью OX вычисляется по формуле

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

2) Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций

$y = f_1(x)$,
$y = f_2(x)$: $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$ и

прямыми

$$x = a, \quad x = b$$

вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$$

(рис.2)

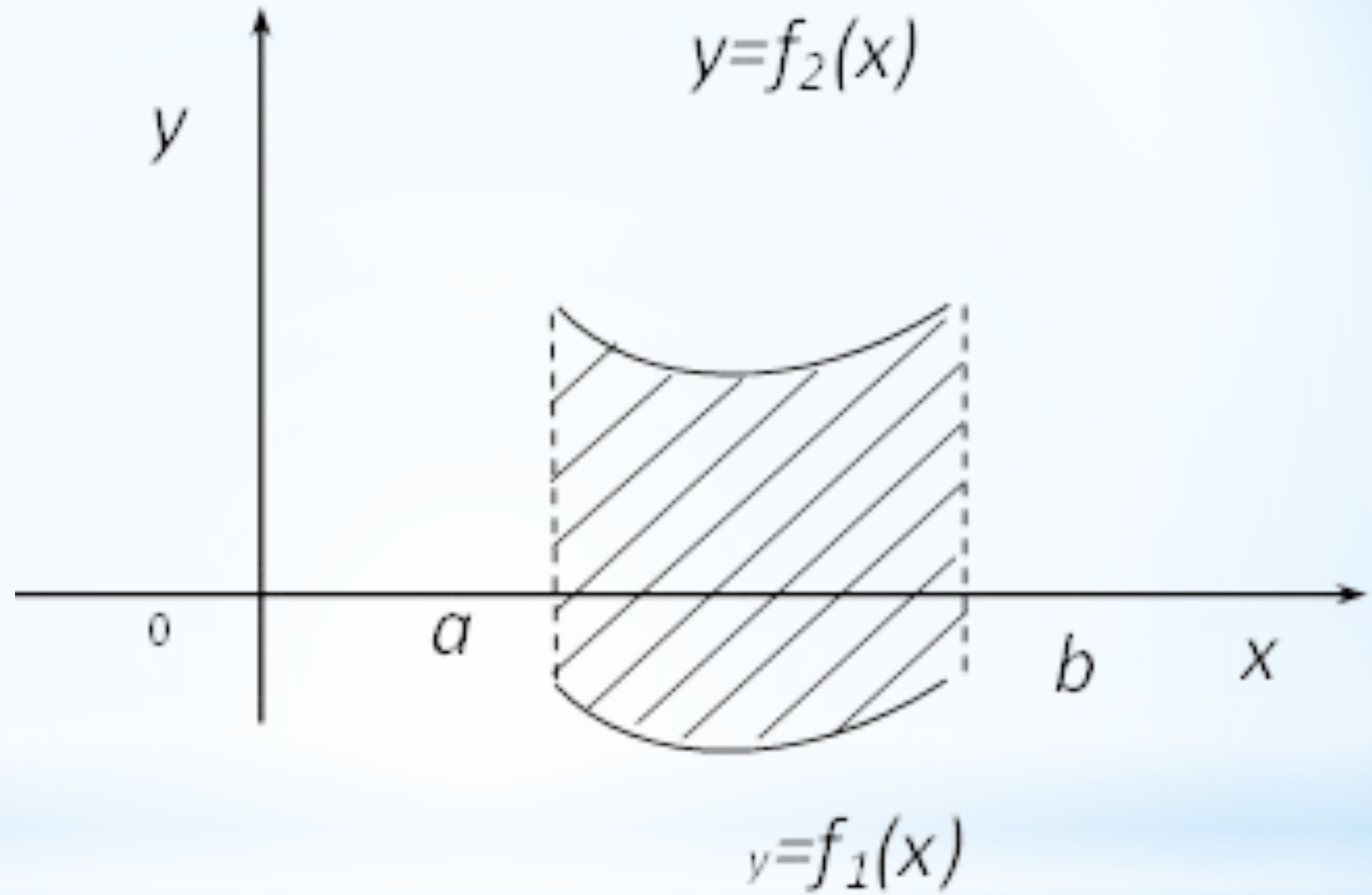

Рис 2

3) В полярных координатах площадь криволинейного сектора OAB, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

(рис.3)

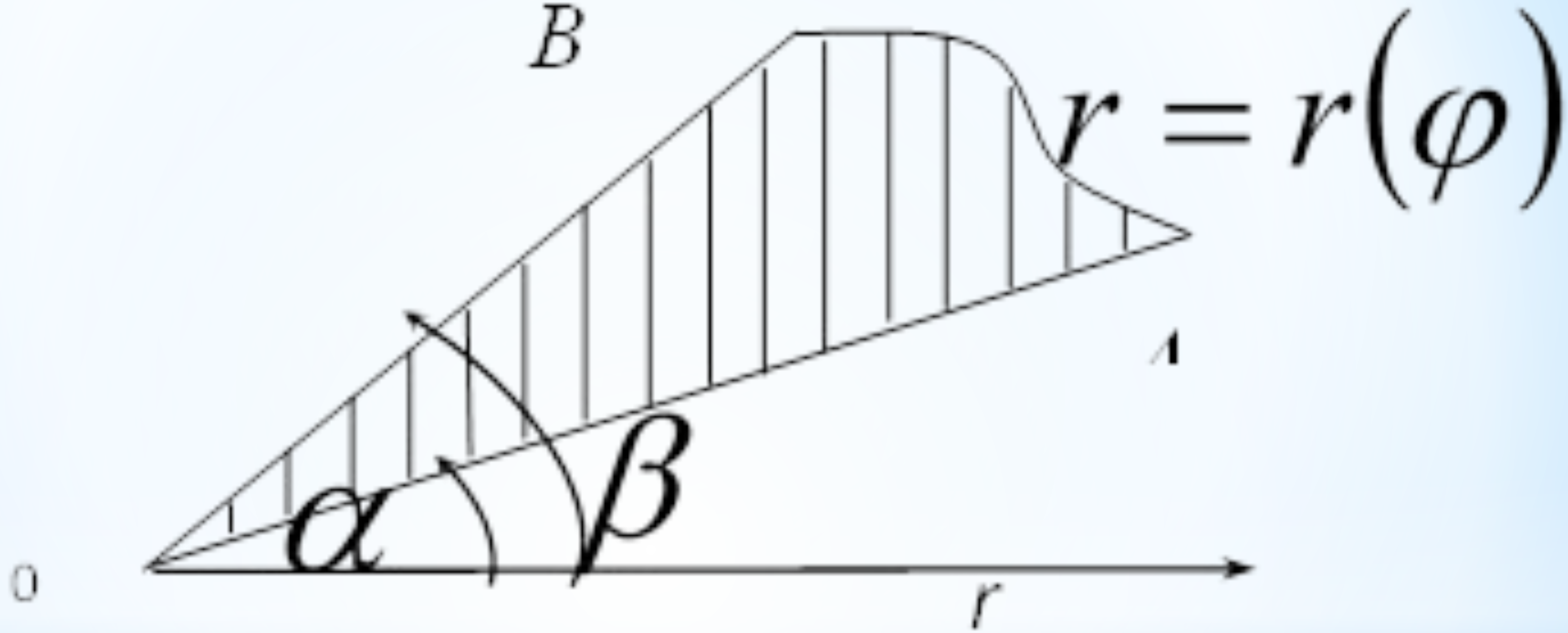

Рис. 3

4) Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, то его объем

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

5) При вращении вокруг оси OY криволинейной трапеции, образуется тело вращения, объем которого

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)dy$$

6) Если плоская кривая (l) задана уравнением $y = y(x)$, то длина ее дуги от точки $A(a, y(a))$ до точки $B(b, y(b))$ вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

Если (l) задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ где $t \in [\alpha; \beta]$, то длина ее дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$$

Если (l) задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то длина ее дуги определяется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$$

7) Работа переменной силы $F = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$, действующей в направлении оси OX на отрезке $[a;b]$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$$

8) Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, то пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2 путь

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$