ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ:

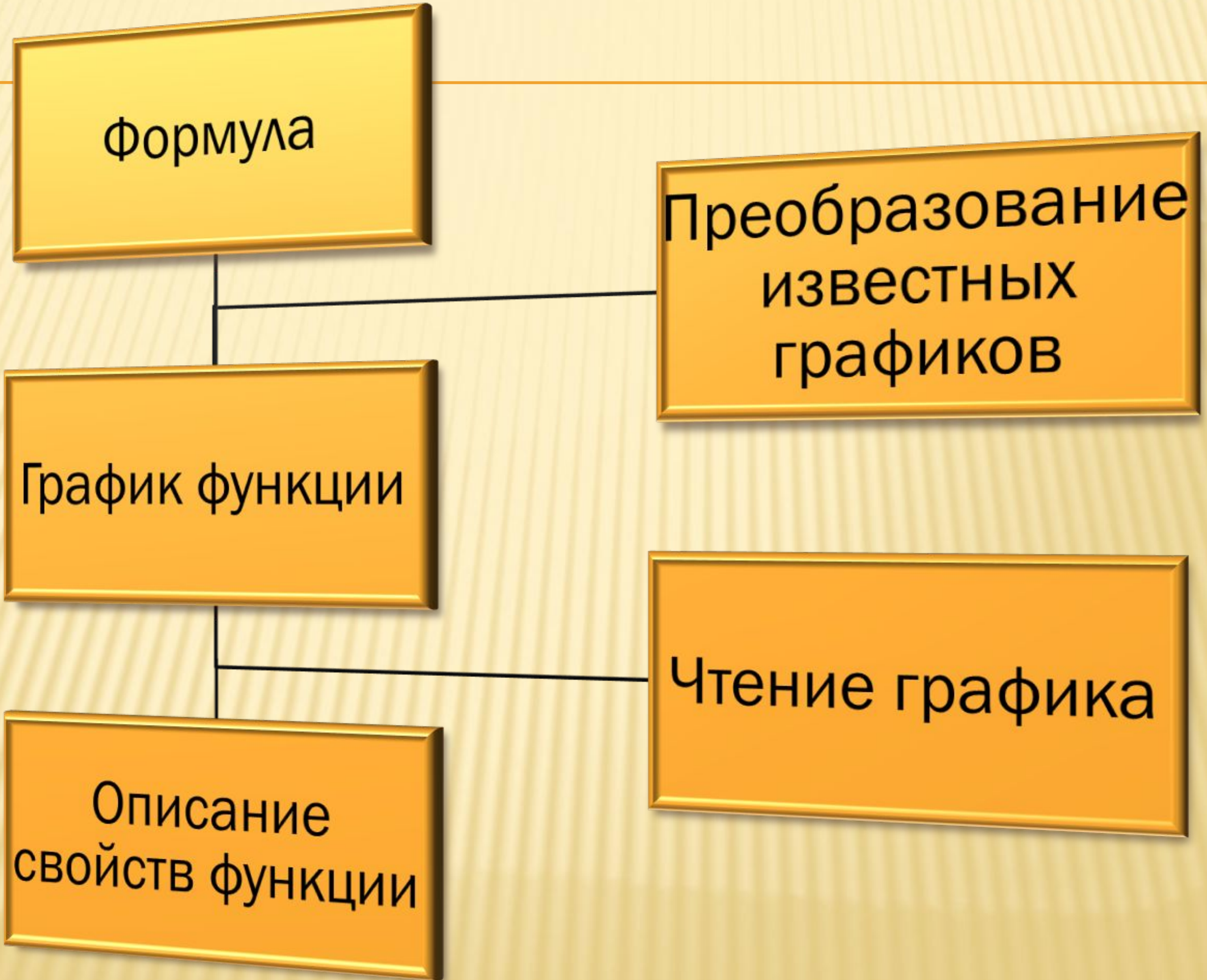
Построение графиков сложных функций на основе свойства монотонности. Моделирование задач с параметрами, используя графики сложных функций.

АКТУАЛЬНОСТЬ ВЫБРАННОЙ ТЕМЫ

Умение читать графики функций, т.е. по графику описывать свойства функции (промежутки монотонности, экстремальные значения, интервалы знакопостоянства и т.д.), необходимо и врачу (кардиограмма), и экономисту (график производительности труда, курсы валют), метеорологу (суточное изменение температуры) и другим специалистам. Поэтому в огромном море зависимостей величин необходимо хорошо ориентироваться.

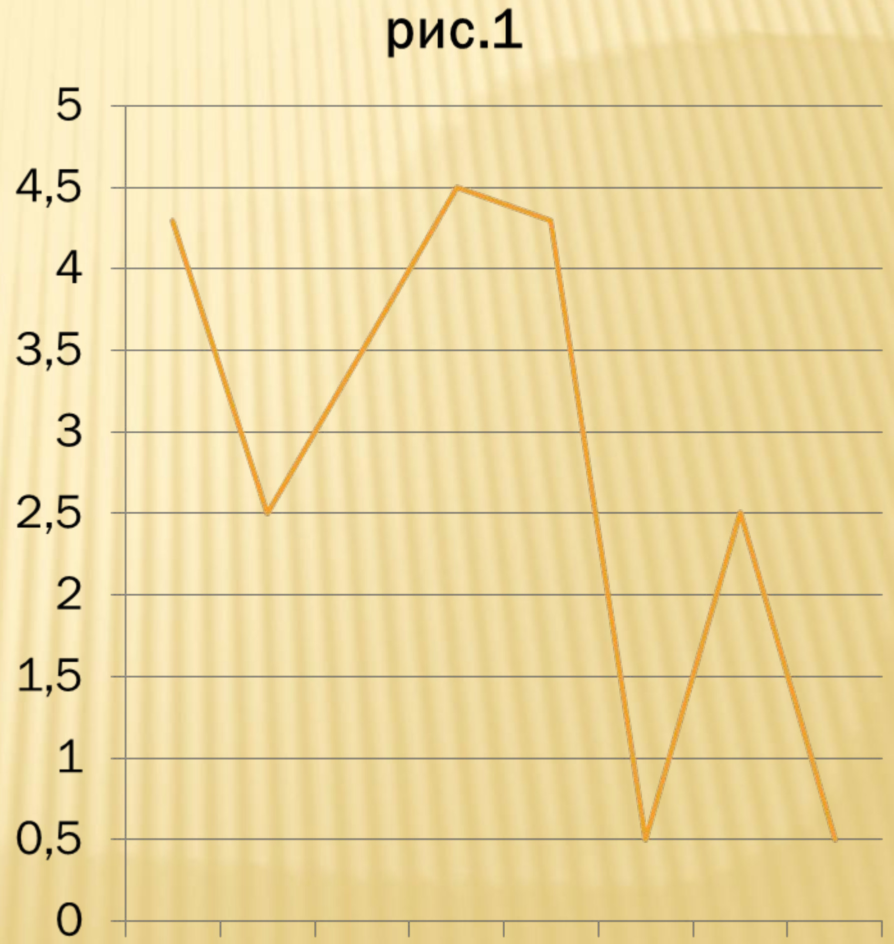
- **Проблема:**
- Зачастую методами математического анализа в курсе школы невозможно исследовать функцию и построить график.
- **Цель:**
- познакомиться с другими методами исследования функций и построения графика с тем, чтобы применить их при решении задач с параметрами;
- научиться моделировать условия нахождения значения параметра для различных математических моделей.
- **Объект исследования:**
- Многообразие задач, содержащих параметр.
- **Предмет исследования:**
- Сложные функции.
- **Задачи исследования:**
- Изучить метод построения графиков сложных функций на основе свойства монотонности функций.
- Применить данный метод при моделировании задач с параметрами.
- Научиться ставить вопросы, имея построенный график сложной функции (картинку, рисунок).

В курсе алгебры 7-9 классов мы изучали алгебраические функции, т.е. функции, заданные аналитическими выражениями, в записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, извлечение квадратного корня). К концу 9 класса у нас формируется цепочка следующих представлений:


Формула
Преобразование известных графиков
График функции
Чтение графика
Описание свойств функции

При этом десятиклассник оказывается в двусмысленной ситуации:

в 9 классе он научился строить график функции и по графику перечислять её свойства; теперь же от него требуется исследовать функцию и затем строить график.



А в старшей школе при изучении тригонометрических функций, логарифмических функций, показательных и алгебраических функций высших степеней формулировка «исследуйте функцию и постройте её график» предполагает несколько другой подход:

Формула

Как их установить?

Свойства функции

Задача, обратная чтению графика

График

Сложные функции можно исследовать разными методами.

Один из методов: построение графиков сложных функций **на основе монотонности.** Математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями других классов, которые называют сложными. Рассмотрим сложную функцию $y = f(v(x))$. Напомним, что если внутренняя функция $v(x)$ и внешняя функция $f(v)$ – монотонны, то сложная функция $y = f(v(x))$ также монотонна.

Пусть, например, $v(x)$ и $f(x)$ – убывают.
Тогда при $x_1 < x_2$

$$v_1 = f(x_1) > v_2 = f(x_2).$$

Неравенство $v_1 > v_2$ влечёт за собой неравенство $f(v_1) < f(v_2)$, т.е.

$$f(v(x_1)) < f(v(x_2)).$$

Итак, большему значению аргумента ($x_1 < x_2$) соответствует большее значение сложной функции.

Следовательно, по определению, она является возрастающей.

Конечно, говоря о монотонности функции, всегда надо указывать соответствующее множество из области определения.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АППАРАТ: $y = \frac{1}{1+x^2}$

- найдём производную.

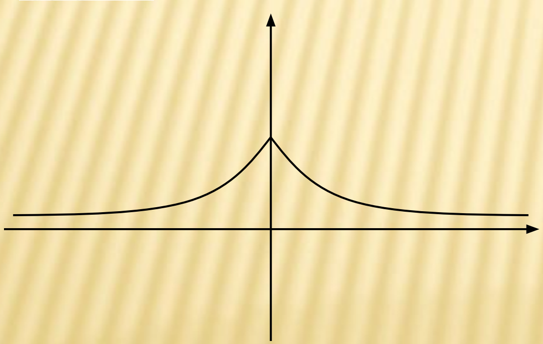
$$y` = \frac{0 * (1+x^2) - 2x * 1}{(1+x^2)^2}$$

$$y` = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

- $y` = 0$ при $x = 0$

Знак y`	+		-
Поведение y	↗	0	↘

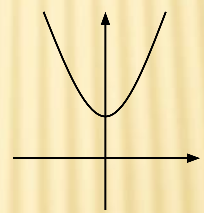
$y(0) = 1$

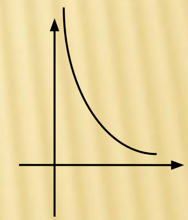


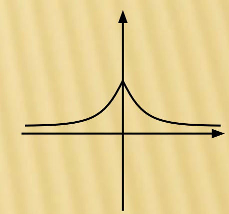
НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНОТОННОСТИ:

- D(y):R
- Чётная
- $V = 1 + x^2$ - внутренняя функция, $y = \frac{1}{V}$ - внешняя.

$V = 1 + x^2$ $y = \frac{1}{V}$ $y = \frac{1}{1+x^2}$







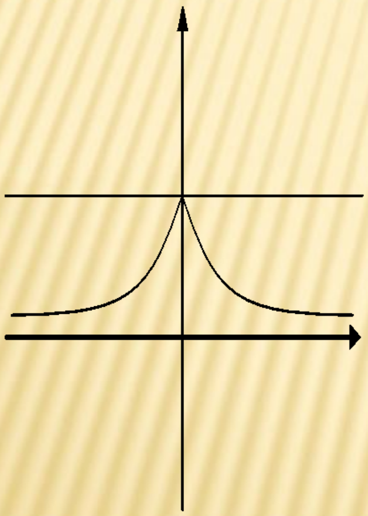
$$x[0 \uparrow \infty) \Rightarrow V[1 \uparrow \infty) \Rightarrow y[1 \downarrow 0)$$

- Рассматривается только $x \geq 0$, т.к. функция $y = \frac{1}{1+x^2}$ чётная, и, следовательно, её график симметричен относительно оси Оу.

МОДЕЛИРОВАНИЕ

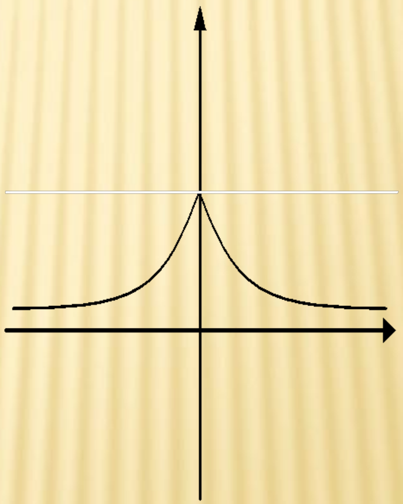
1) $\frac{1}{1+x^2} = a$;

а) При каких значениях а данное уравнение имеет один корень, т.е. горизонтальная прямая пересекает график 1 раз?



Ответ: а = 1.

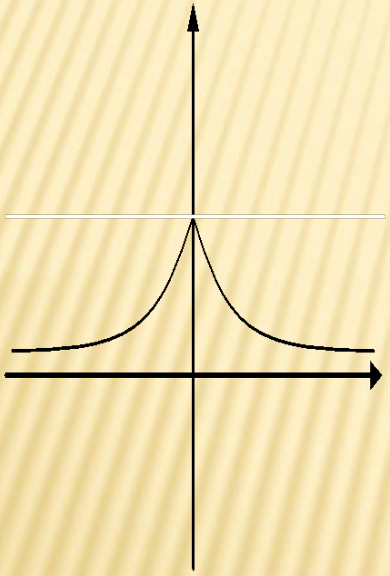
а) При каких значениях параметра а данное уравнение не имеет решение, т.е. горизонтальные прямые не пересекают график?



Ответ: (-∞;0]∩(1;∞).

МОДЕЛИРОВАНИЕ

а) При каких значениях параметра а данное уравнение имеет решение, т.е. горизонтальные прямые пересекают график?



Ответ: (0;1].

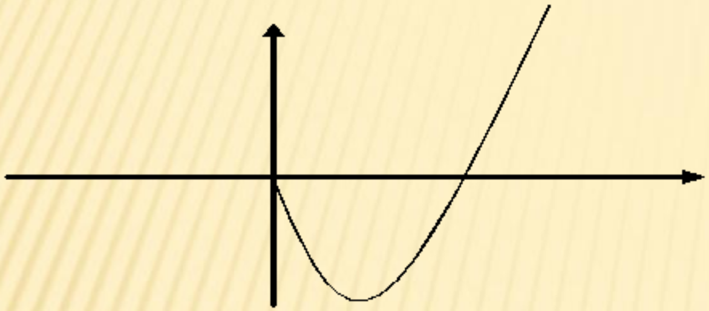
Пример 2: Исследовать функци $y = 2^{x^2 - 4|x|}$ и построить её график.

Можно исследовать функцию методами математического анализа. Большой сложности нет. Но объём исследования достаточно большой: нахождение нулей функции ; нахождение промежутков возрастания и убывания…

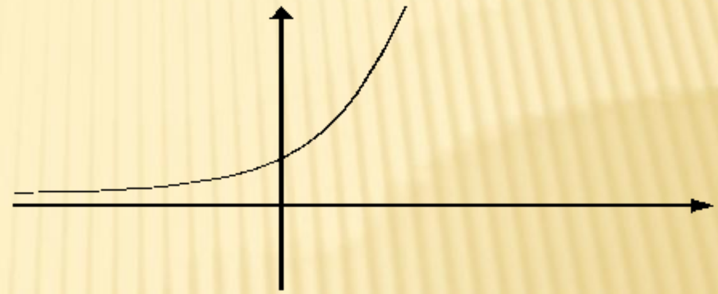
А можно применить метод на основе свойства монотонности функций.

. можно применить метод на основе свойства монотонности функций.

$= x^2 - 4x$

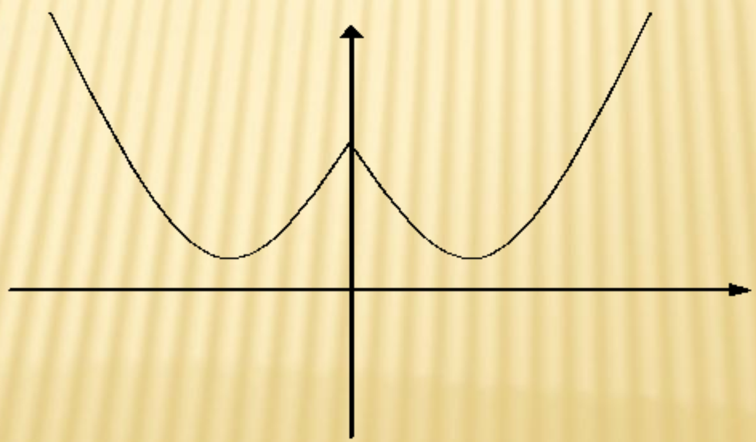


$y = 2^V$



$$x[0 \uparrow 2] \Longrightarrow V[0 \downarrow -4] \Longrightarrow y\left[1 \downarrow \frac{1}{16}\right];$$

$$x[2 \uparrow \infty) \Longrightarrow V[-4 \uparrow \infty) \Longrightarrow y\left[\frac{1}{16} \uparrow \infty\right).$$



$$x[0 \uparrow 2] \Longrightarrow y\left[1 \downarrow \frac{1}{16}\right];$$

$$x[2 \uparrow \infty) \Longrightarrow y\left[\frac{1}{16} \uparrow \infty\right);$$

$$y = 2^{arcsin|x|}$$

2008 г., С3: при каких значениях а неравенство не имеет решений?

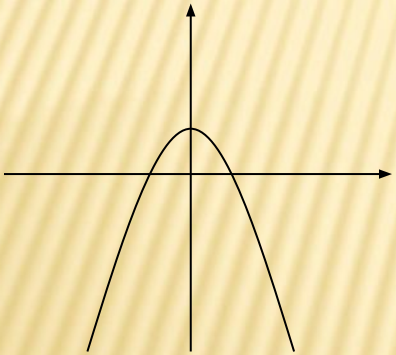
$$\frac{a-(4\sin\sqrt{9-x^2}-9)}{\log_{\frac{1}{3}}(9-x^2)-a}<0 \qquad \frac{(4\sin\sqrt{9-x^2}-9)-a}{\log_{\frac{1}{3}}(9-x^2)-a}>0$$

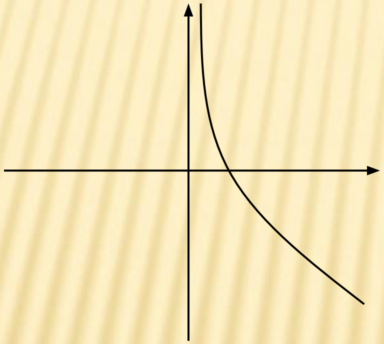
Заметим, что $9-x^2>0 \Rightarrow -3\le x\le 3$

Запретные точки $\log_{\frac{1}{3}}(9-x^2)=a.$

$u=9-x^2$

$a=\log_{\frac{1}{3}}u\ (u>0)$





$x[-3\uparrow 0]\Rightarrow u(0\uparrow 9]\Rightarrow a(\infty\downarrow -2];$

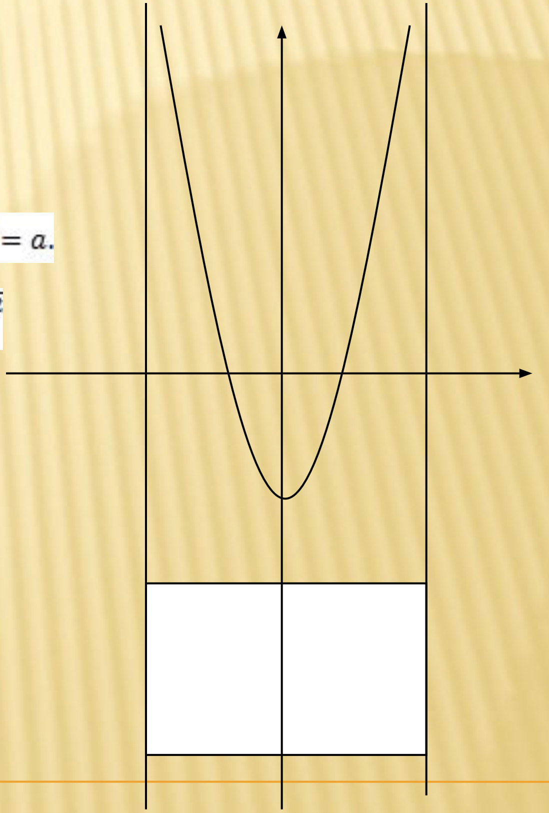
$x[0\uparrow 3)\Rightarrow u[9\downarrow 0)\Rightarrow a[-2\uparrow\infty).$

Область значений $4\sin\sqrt{9-x^2}-9=a.$

$-1\le\sin t\le 1$, где $t=\sqrt{9-x^2}$

$-4\le 4\sin t\le 4$

$-13\le 4\sin t-9\le -5$



На промежутке (-5;-2] неравенство не выполняется, т.е. горизонтальные линии не пересекают полученные области.